# CÁLCULO

ANTON BIVENS DAVIS

VOLUME II 10ª EDIÇÃO

bookman

A635c Anton, Howard.
Cálculo [recurso eletrônico] / Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis ; tradução: Claus Ivo Doering. – 10. ed. – Porto Alegre : Bookman, 2014.
v.2
Editado também como livro impresso em 2014.
ISBN 978-85-8260-246-1

1. Cálculo. I. Bivens, Irl. II. Davis, Stephen. III. Título.

CDU 510

Catalogação na publicação: Poliana Sanchez de Araujo – CRB 10/2094

HOWARD ANTON
Drexel University

IRL BIVENS
Davidson College

STEPHEN DAVIS
Davidson College

# CÁLCULO

## VOLUME II 10ª EDIÇÃO

**Tradução**

Claus Ivo Doering
Professor Titular do Instituto de Matemática da UFRGS

Versão impressa
desta obra: 2014

bookman

2014

Obra originalmente publicada sob o título
*Calculus Early Transcendentals,10th Edition*
ISBN 9780470647691 / 0470647698

copyright © 2012, John Wiley & Sons,Inc.
All Rights Reserved. This translation published under license with the original publisher
John Wiley & Sons, Inc.

Gerente editorial: *Arysinha Jacques Affonso*

*Colaboraram nesta edição:*

Editora: *Denise Weber Nowaczyk*

Capa: *Maurício Pamplona (arte sobre capa original)*

Imagem da capa: *David Henderson/Getty Images*

Leitura final: *Amanda Jansson Breitsameter*

Editoração: *Techbooks*

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
BOOKMAN EDITORA LTDA., uma empresa do GRUPO A EDUCAÇÃO S.A.
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 – Porto Alegre – RS
Fone: (51) 3027-7000 Fax: (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

Unidade São Paulo
Av. Embaixador Macedo Soares, 10.735 – Pavilhão 5 – Cond. Espace Center
Vila Anastácio – 05095-035 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3665-1100 Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444 – www.grupoa.com.br

IMPRESSO NO BRASIL
*PRINTED IN BRAZIL*

## SOBRE HOWARD ANTON

Howard Anton é Bacharel em Matemática pela Lehigh University, Mestre em Matemática pela University of Illinois e Doutor em Matemática pela Polytechnic University of Brooklyn. No início da década de 1960, trabalhou na Burroughs Corporation e na Avco Corporation em Cabo Canaveral, na Flórida, onde esteve envolvido com o programa espacial tripulado. Em 1968, entrou para o Departamento de Matemática da Drexel University, onde lecionou em tempo integral até 1983. Desde então, é professor emérito da Drexel e dedica a maior parte de seu tempo a escrever livros didáticos e a atividades junto a associações matemáticas. Foi presidente da seção do leste do estado da Pensilvânia e do estado de Delaware da Mathematical Association of America (MAA), foi membro do conselho diretor daquela organização e orientou a criação das subdivisões estudantis da MAA. Publicou vários trabalhos de pesquisa em Análise Funcional, Teoria da Aproximação e Topologia, bem como artigos pedagógicos. É especialmente conhecido por seus livros didáticos em Matemática, que estão entre os mais utilizados no mundo. Existe, atualmente, mais de uma centena de versões de seus livros, inclusive traduções para o espanhol, árabe, português, italiano, indonésio, francês, japonês, chinês, hebraico e alemão. Seu livro de Álgebra Linear recebeu o prêmio de Excelência de Livro Didático e o Prêmio McGuffey, ambos da Associação dos Autores de Livros Didáticos dos E.U.A. Em seu tempo de lazer, o Dr. Anton gosta de viajar e fotografia.

## SOBRE IRL BIVENS

Irl C. Bivens, agraciado com a Medalha George Polya e o Prêmio Merten M. Hasse de Texto Didático de Matemática, é Bacharel em Matemática pelo Pfeiffer College e Doutor em Matemática pela University of North Carolina, em Chapel Hill. Desde 1982, leciona no Davidson College, onde atualmente ocupa a posição de professor de Matemática. Em um ano acadêmico típico, leciona Cálculo, Topologia e Geometria. Também é apreciador de história da Matemática, e seu seminário anual de História da Matemática é um dos mais concorridos entre os formandos de Matemática de Davidson. Publicou vários artigos sobre Matemática do Ensino Superior, bem como trabalhos de pesquisa em sua área de especialização, a Geometria Diferencial. Foi membro dos comitês editoriais das séries Problem Books e Dolciani Mathematical Expositions da Mathematical Association of America (MAA) e do *College Mathematical Journal*. Quando não está fazendo Matemática, o Prof. Bivens gosta de leitura, malabarismo, natação e caminhadas.

## SOBRE STEPHEN DAVIS

Stephen L. Davis é Bacharel em Matemática pelo Lindenwood College e Doutor em Matemática pela Rutgers University. Tendo lecionado na Rutgers University e na Ohio State University, chegou ao Davidson College em 1981, onde atualmente é professor de Matemática. Leciona regularmente disciplinas de Cálculo, Álgebra Linear, Álgebra Abstrata e Computação. No ano letivo de 1995-1996, foi professor associado visitante no Swarthmore College. Publicou vários artigos sobre o ensino e a avaliação do Cálculo, bem como trabalhos de pesquisa em sua área de especialização, a Teoria de Grupos Finitos. Ocupou vários postos, inclusive de presidente e tesoureiro, na seção sudeste da Mathematical Association of America (MAA). Atualmente, é professor consultor do Serviço de Avaliação Educacional de Cálculo Avançado, membro da diretoria da Associação da Carolina do Norte de Professores de Matemática Avançada e ativamente envolvido no treinamento, no Clube de Matemática de Charlotte, de estudantes matematicamente talentosos do Ensino Médio. Em seu tempo de lazer, ele joga basquete, faz malabarismos e viaja. O Prof. Davis e sua esposa Elisabeth têm três filhos, Laura, Anne e James, todos ex-alunos de Cálculo.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

*Para*
minha esposa, Pat, e meus filhos, Brian, David e Lauren

*Em memória de*
minha mãe, Shirley
meu pai, Benjamin
meu orientador de tese e inspiração, George Bachman
Stephen Girard (1750-1831), filantropo

*—H.A.*

*Para*
meu filho, Robert

*—I.B.*

*Para*
minha esposa, Elisabeth
meus filhos, Laura, Anne e James

*—S.D.*

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

# AGRADECIMENTOS

Tivemos a sorte de contar com a orientação e o apoio de muita gente talentosa, cujo conhecimento e habilidade enriqueceram este livro de muitas formas. Por sua valiosa ajuda, agradecemos às seguintes pessoas.

## Revisores da décima edição

Frederick Adkins, *Indiana University of Pennsylvania*
Gerardo Aladro, *Florida International University*
Mike Albanese, *Central Piedmont Community College*
Faiz Al-Rubaee, *University of North Florida*
Mahboub Baccouch, *University of Nebraska at Omaha*
Jim Brandt, *Southern Utah University*
Elizabeth Brown, *James Madison University*
Michael Brown, *San Diego Mesa College*
Christopher Butler, *Case Western Reserve University*
Nick Bykov, *San Joaquin Delta College*
Hongwei Chen, *Christopher Newport University*
David A. Clark, *Randolph-Macon College*
Dominic P. Clemence, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
Michael Cohen, *Hofstra University*
Hugh Cornell, *Salt Lake Community College*
Kyle Costello, *Salt Lake Community College*
Walter Czarnec, *Framingham State University*
Michael Daniel, *Drexel University*
Judith Downey, *University of Nebraska, Omaha*
Artur Elezi, *American University*
David James Ellingson, *Napa Valley College*
Elaine B. Fitt, *Bucks County Community College*
Greg Gibson, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
Yvonne A. Greenbaun, *Mercer County Community College*
Jerome I. Heaven, *Indiana Tech*
Kathryn Lesh, *Union College*
Eric Matsuoka, *Leeward Community College*
Ted Nirgiotis, *Diablo Valley College*
Mihaela Poplicher, *University of Cincinnati*
Adrian R. Ranic, *Erie Community College–North*
Thomas C. Redd, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
R. A. Rock, *Daniel Webster College*
John Paul Roop, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
Philippe Rukimbira, *Florida International University*
Dee Dee Shaulis, *University of Colorado at Boulder*
Michael D. Shaw, *Florida Institute of Technology*
Jennifer Siegel, *Broward College–Central Campus*
ThomasW. Simpson, *University of South Carolina Union*
Maria Siopsis, *Maryville College*
Mark A. Smith, *Miami University, Ohio*
Alan Taylor, *Union College*
Kathy Vranicar, *University of Nebraska, Omaha*
Anke Walz, *Kutztown University*
Zhi-Qiang Wang, *Utah State University*
Tom Wells, *Delta College*
Greg Wisloski, *Indiana University of Pennsylvania*

## Revisores e colaboradores da nona edição

Frederick Adkins, *Indiana University of Pennsylvania*
Bill Allen, *Reedley College-Clovis Center*
Jerry Allison, *Black Hawk College*
Seth Armstrong, *Southern Utah University*
Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*
David Bradley, *University of Maine*
Wayne P. Britt, *Louisiana State University*
Dean Burbank, *Gulf Coast Community College*
Jason Cantarella, *University of Georgia*
Yanzhao Cao, *Florida A&M University*
Kristin Chatas,*Washtenaw Community College*
Michele Clement, *Louisiana State University*
Ray Collings, *Georgia Perimeter College*
David E. Dobbs, *University of Tennessee, Knoxville*
H. Edward Donley, *Indiana University of Pennsylvania*
T. J. Duda, *Columbus State Community College*
Jim Edmondson, *Santa Barbara City College*
Nancy Eschen, *Florida Community College, Jacksonville*
Reuben Farley, *Virginia Commonwealth University*
Michael Filaseta, *University of South Carolina*
Jose Flores, *University of South Dakota*

Mitch Francis, *Horace Mann*
Berit N. Givens, *California State Polytechnic University, Pomona*
Zhuang-dan Guan, *University of California, Riverside*
Jerome Heaven, *Indiana Tech*
Greg Henderson, *Hillsborough Community College*
Patricia Henry, *Drexel University*
Danrun Huang, *St. Cloud State University*
Alvaro Islas, *University of Central Florida*
Micah James, *University of Illinois*
Bin Jiang, *Portland State University*
Ronald Jorgensen, *Milwaukee School of Engineering*
Mohammad Kazemi, *University of North Carolina, Charlotte*
Raja Khoury, *Collin County Community College*
Przemo Kranz, *University of Mississippi*
Carole King Krueger, *The University of Texas at Arlington*
Steffen Lempp, *University of Wisconsin, Madison*
Thomas Leness, *Florida International University*
Kathryn Lesh, *Union College*
Wen-Xiu Ma, *University of South Florida*
Behailu Mammo, *Hofstra University*
Vania Mascioni, *Ball State University*
John McCuan, *Georgia Tech*
Daryl McGinnis, *Columbus State Community College*
Michael Mears, *Manatee Community College*
John G. Michaels, *SUNY Brockport*
Jason Miner, *Santa Barbara City College*
Darrell Minor, *Columbus State Community College*
Kathleen Miranda, *SUNY Old Westbury*
Carla Monticelli, *Camden County College*
Bryan Mosher, *University of Minnesota*
Ferdinand O. Orock, *Hudson County Community College*
Altay Ozgener, *Manatee Community College*
Chuang Peng, *Morehouse College*
Joni B. Pirnot, *Manatee Community College*
Elise Price, *Tarrant County College*
David Price, *Tarrant County College*
Holly Puterbaugh, *University of Vermont*
Hah Suey Quan, *Golden West College*
JosephW. Rody, *Arizona State University*
Jan Rychtar, *University of North Carolina, Greensboro*
John T. Saccoman, *Seton Hall University*
Constance Schober, *University of Central Florida*
Kurt Sebastian, *United States Coast Guard*
Paul Seeburger, *Monroe Community College*
Charlotte Simmons, *University of Central Oklahoma*
Don Soash, *Hillsborough Community College*
Bradley Stetson, *Schooleraft College*
Bryan Stewart, *Tarrant County College*
Walter E. Stone, *Jr., North Shore Community College*
Eleanor Storey, *Front Range Community College, Westminster Campus*
Stefania Tracogna, *Arizona State University*
Helene Tyler, *Manhattan College*
Pavlos Tzermias, *University of Tennessee, Knoxville*
Raja Varatharajah, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
Francis J. Vasko, *Kutztown University*
David Voss, *Western Illinois University*
Jim Voss, *Front Range Community College*
Anke Walz, *Kutztown Community College*
Richard Watkins, *Tidewater Community College*
Xian Wu, *University of South Carolina*
Yvonne Yaz, *Milwaukee School of Engineering*
Richard A. Zang, *University of New Hampshire*
Xiao-Dong Zhang, *Florida Atlantic University*
Diane Zych, *Erie Community College*

Também gostaríamos de agradecer a Celeste Hernandez e Roger Lipsett pela cuidadosa revisão da décima edição. Igualmente agradecemos a Tamas Wiandt pela revisão do manual de soluções e a Przemyslaw Bogacki pela revisão das soluções daquele manual; Brian Camp e Lyle Smith pela revisão do Guia de Estudo do Estudante; Jim Hartman pela revisão do Manual do Professor; Ann Ostberg pela revisão dos *slides* de *PowerPoint*; Beverly Fusfield por criar novos tutoriais GO e Mark McKibben por conferir esses novos tutoriais. Também agradecemos o retorno recebido de Mark Dunster, Cecelia Knoll e Michael Rosenthal a respeito de problemas selecionados de *WileyPlus*.

# PREFÁCIO

Nesta décima edição de *Cálculo*, mantivemos aqueles aspectos das edições anteriores que levaram ao sucesso desta série: continuamos buscando a compreensão do estudante sem sacrificar a precisão matemática, e os conjuntos de exercícios são cuidadosamente projetados de modo a evitar surpresas desagradáveis que podem desestruturar uma classe de Cálculo.

Todas as modificações introduzidas nesta décima edição foram revisadas cuidadosamente por um grupo de destacados professores, tanto usuários de edições anteriores, quanto não usuários. A missão desse grupo de professores foi a de garantir que as mudanças não alterassem aqueles aspectos que atraíram os usuários das edições anteriores e, ao mesmo tempo, apresentar novidades que pudessem atrair novos usuários.

A seguir, algumas características do livro:

**Flexibilidade** Esta edição foi construída com uma flexibilidade planejada para servir um amplo espectro de filosofias do Cálculo, desde a mais tradicional até a mais "reformista". Os recursos computacionais podem ser enfatizados, ou não, e a ordem de muitos tópicos pode ser permutada livremente para acomodar as necessidades específicas do professor.

**Rigor** O desafio de escrever um bom livro de Cálculo está em equilibrar corretamente o rigor e a clareza. Nosso objetivo é apresentar a mais rigorosa Matemática possível num tratamento introdutório. Quando a clareza e o rigor colidem, escolhemos clareza; contudo, acreditamos que é importante o estudante entender a diferença entre uma demonstração precisa e um argumento informal, de modo que informamos o leitor quando os argumentos apresentados são informais ou para motivação. A teoria envolvendo argumentos de $\epsilon$ e $\delta$ aparece em seções separadas, podendo ser estudada ou não, de acordo com a preferência do professor.

**Regra dos quatro** A "regra dos quatro" diz respeito à apresentação dos conceitos dos pontos de vista verbal, algébrico, visual e numérico. De acordo com a filosofia pedagógica atual, sempre que indicado, utilizamos essa abordagem.

**Exercícios** Cada conjunto de exercícios desenvolvido para esta edição foi planejado visando à prática do aluno. Exercícios com respostas proporcionam a verificação imediata do conhecimento adquirido, exercícios de compreensão focam os conceitos principais e os identificados com um ícone requerem a utilização de recursos tecnológicos, como calculadora gráfica ou sistemas computacionais.

**Aplicabilidade do cálculo** Um dos objetivos primários desta edição é o de estabelecer relações do Cálculo com o mundo real e com a experiência própria do estudante. Esse tema é mantido ao longo de exemplos e exercícios.

**Preparação profissional** Este texto foi escrito num nível matemático que prepara os estudantes para uma variedade de carreias profissionais que requeiram um fundamento matemático sólido, incluindo as engenharias, várias ciências e a administração.

**Revisão de trigonometria** Muitos alunos são atormentados por deficiências em Trigonometria, de modo que incluímos uma revisão substancial de Trigonometria no Apêndice B.

**Apêndice de equações polinomiais** Como muitos estudantes têm dificuldades em resolver equações polinomiais, o Apêndice C traz uma revisão do Teorema da Fatoração, do Teorema do Resto e do procedimento para encontrar raízes racionais.

**Princípios do cálculo de integrais** O tradicional capítulo de Técnicas de Integração é denominado "Princípios do Cálculo de Integrais" para refletir uma abordagem mais moderna do material. Esse capítulo enfatiza métodos gerais e o papel de recursos computacionais no lugar de truques específicos para calcular integrais complicadas ou obscuras.

## Materiais adicionais

Os materiais adicionais foram especialmente desenvolvidos para o aluno potencializar seu estudo e para o professor enriquecer as suas aulas, e estão disponíveis no site www.grupoa.com.br.

**Para o aluno** Procure por este livro no site do Grupo A e, depois de cadastrado, acesse livremente os seguintes materiais:

| **Em inglês** | **Em português** |
|---|---|
| Additional Materials | Colisão com Cometa |
| Graphing Video Tutorial | Iteração e Sistemas Dinâmicos |
| Student Study Guide | Kabum, o Homem Bala |
| Web Appendices | Modelando Furacões |
| | Planejamento de Estradas de Ferro |
| | Robótica |

**Para o professor** Cadastre-se no site do Grupo A, busque por este livro, clique no link Material para o Professor e acesse os seguintes materiais (em inglês):

Student Solutions Manual

The Student Study Guide

Instructor's Solutions Manual

Instructor's Manual

Computerized Test Bank

Printable Test Bank

PowerPoint Presentations

Image Gallery

# SUMÁRIO

## VOLUME II


**8 MODELAGEM MATEMÁTICA COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS 561**

8.1 Modelagem com equações diferenciais **561**
8.2 Separação de variáveis **568**
8.3 Campos de direções; método de Euler **579**
8.4 Equações diferenciais de primeira ordem e aplicações **586**

**9 SÉRIES INFINITAS 596**

9.1 Sequências **596**
9.2 Sequências monótonas **607**
9.3 Séries infinitas **614**
9.4 Testes de convergência **623**
9.5 Testes de comparação, da razão e da raiz **631**
9.6 Séries alternadas; convergência absoluta e condicional **638**
9.7 Polinômios de Maclaurin e de Taylor **648**
9.8 Séries de Maclaurin e de Taylor; séries de potências **659**
9.9 Convergência de séries de Taylor **668**
9.10 Derivação e integração de séries de potências; modelando com séries de Taylor **678**

**10 CURVAS PARAMÉTRICAS E POLARES; SEÇÕES CÔNICAS 692**

10.1 Equações paramétricas; retas tangentes e comprimento de curvas paramétricas **692**
10.2 Coordenadas polares **705**
10.3 Retas tangentes, comprimento de arco e área com curvas polares **719**
10.4 Seções cônicas **730**
10.5 Rotação de eixos; equações de segunda ordem **748**
10.6 Seções cônicas em coordenadas polares **754**

## 11 ESPAÇO TRIDIMENSIONAL; VETORES 767

11.1 Coordenadas retangulares no espaço; esferas; superfícies cilíndricas 767
11.2 Vetores 773
11.3 Produto escalar; projeções 785
11.4 Produto vetorial 795
11.5 Equações paramétricas de retas 805
11.6 Planos no espaço tridimensional 813
11.7 Superfícies quádricas 821
11.8 Coordenadas cilíndricas e esféricas 832

## 12 FUNÇÕES VETORIAIS 841

12.1 Introdução às funções vetoriais 841
12.2 Cálculo de funções vetoriais 848
12.3 Mudança de parâmetro; comprimento de arco 858
12.4 Vetores tangente, normal e binormal unitários 868
12.5 Curvatura 873
12.6 Movimento ao longo de uma curva 882
12.7 Leis de Kepler do movimento planetário 895

## 13 DERIVADAS PARCIAIS 906

13.1 Funções de duas ou mais variáveis 906
13.2 Limites e continuidade 917
13.3 Derivadas parciais 927
13.4 Diferenciabilidade, diferenciais e linearidade local 940
13.5 Regra da cadeia 949
13.6 Derivadas direcionais e gradientes 960
13.7 Planos tangentes e vetores normais 971
13.8 Máximos e mínimos de funções de duas variáveis 977
13.9 Multiplicadores de Lagrange 989

## 14 INTEGRAIS MÚLTIPLAS 1000

14.1 Integrais duplas 1000
14.2 Integrais duplas em regiões não retangulares 1009
14.3 Integrais duplas em coordenadas polares 1018
14.4 Área de superfície; superfícies paramétricas 1026
14.5 Integrais triplas 1039
14.6 Integrais triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas 1048
14.7 Mudança de variáveis em integrais múltiplas; jacobianos 1058
14.8 Centros de gravidade usando integrais múltiplas 1071

**15 TÓPICOS DO CÁLCULO VETORIAL 1084**

15.1 Campos vetoriais 1084
15.2 Integrais de linha 1094
15.3 Independência do caminho; campos vetoriais conservativos 1111
15.4 Teorema de Green 1122
15.5 Integrais de superfície 1130
15.6 Aplicações de integrais de superfície; fluxo 1138
15.7 Teorema da divergência 1148
15.8 Teorema de Stokes 1158

**A APÊNDICE**

**D PROVAS SELECIONADAS D1**

Respostas dos exercícios ímpares R1

Índice I1

## VOLUME I (ISBN 9780470647691 / 0470647698)

**0 ANTES DO CÁLCULO 1**

0.1 Funções 1
0.2 Funções novas a partir de antigas 15
0.3 Famílias de funções 27
0.4 Funções inversas; funções trigonométricas inversas 38
0.5 Funções exponenciais e logarítmicas 52

**1 LIMITES E CONTINUIDADE 67**

1.1 Limites (uma abordagem intuitiva) 67
1.2 Calculando limites 80
1.3 Limites no infinito; comportamento final de uma função 89
1.4 Limites (discutidos mais rigorosamente) 100
1.5 Continuidade 110
1.6 Continuidade de funções trigonométricas, exponenciais e inversas 121

## 2 A DERIVADA 131

2.1 Retas tangentes e taxas de variação 131
2.2 Função derivada 143
2.3 Introdução a técnicas de diferenciação 155
2.4 Regras do produto e do quociente 163
2.5 Derivadas de funções trigonométricas 169
2.6 Regra da cadeia 174

## 3 TÓPICOS EM DIFERENCIAÇÃO 185

3.1 Derivação implícita 185
3.2 Derivadas de funções logarítmicas 192
3.3 Derivadas de funções exponenciais e trigonométricas inversas 197
3.4 Taxas relacionadas 204
3.5 Aproximação linear local; diferenciais 212
3.6 Regra de L'Hôpital; formas indeterminadas 219

## 4 A DERIVADA EM GRÁFICOS E APLICAÇÕES 232

4.1 Análise de funções I: crescimento, decrescimento e concavidade 232
4.2 Análise de funções II: extremos relativos; gráficos de polinômios 244
4.3 Análise de funções III: funções racionais, cúspides e retas tangentes verticais 254
4.4 Máximos e mínimos absolutos 266
4.5 Problemas de máximos e de mínimos em aplicações 274
4.6 Movimento retilíneo 288
4.7 Método de Newton 296
4.8 O teorema de Rolle; o teorema do valor médio 302

## 5 INTEGRAÇÃO 316

5.1 Uma visão geral do problema de área 316
5.2 A integral indefinida 322
5.3 Integração por substituição 332
5.4 A definição de área como um limite; notação de somatório 340
5.5 A integral definida 353
5.6 O teorema fundamental do cálculo 362
5.7 Movimento retilíneo revisto usando integração 376
5.8 Valor médio de uma função e suas aplicações 385
5.9 Calculando integrais definidas por substituição 390
5.10 Funções logarítmicas e outras funções definidas por integral 396

**6 APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA NA GEOMETRIA, NAS CIÊNCIAS E NA ENGENHARIA 413**

6.1 Área entre duas curvas 413
6.2 Volumes por fatiamento; discos e arruelas 421
6.3 Volumes por camadas cilíndricas 432
6.4 Comprimento de uma curva plana 438
6.5 Área de uma superfície de revolução 444
6.6 Trabalho 449
6.7 Momentos, centros de gravidade e centroides 458
6.8 Pressão e força de fluidos 467
6.9 Funções hiperbólicas e cabos pendentes 474

**7 PRINCÍPIOS DO CÁLCULO DE INTEGRAIS 488**

7.1 Uma visão geral dos métodos de integração 488
7.2 Integração por partes 491
7.3 Integração de funções trigonométricas 500
7.4 Substituições trigonométricas 508
7.5 Integração de funções racionais por frações parciais 514
7.6 O uso de sistemas algébricos computacionais e de tabelas de integrais 523
7.7 Integração numérica; regra de Simpson 533
7.8 Integrais impróprias 547

**A APÊNDICES**

**A GRÁFICOS DE FUNÇÕES UTILIZANDO CALCULADORAS E RECURSOS COMPUTACIONAIS A1**
**B REVISÃO DE TRIGONOMETRIA B1**
**C RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMINAIS C1**

Respostas dos exercícios ímpares R1

Índice I1

## AS RAÍZES DO CÁLCULO

As excitantes aplicações atuais do Cálculo têm raízes que remontam ao trabalho do matemático grego Arquimedes, mas a descoberta dos princípios fundamentais do Cálculo foi feita independentemente por Isaac Newton (inglês) e Gottfried Leibniz (alemão) ao final do século XVII. O trabalho de Newton e de Leibniz foi motivado por quatro grandes classes de problemas científicos e matemáticos daquela época:

- Encontrar a reta tangente a uma curva arbitrária num dado ponto.
- Encontrar a área de uma região, o comprimento de uma curva e o volume de um sólido arbitrários.
- Encontrar os valores máximo e mínimo de uma quantidade – por exemplo, as distâncias máxima e mínima de um planeta ao Sol ou o alcance máximo possível de um projétil variando o ângulo de disparo.
- Dada uma fórmula para a distância percorrida por um objeto num certo tempo especificado, encontrar a velocidade e a aceleração desse objeto num dado instante. Reciprocamente, dada uma fórmula que especifique a aceleração e a velocidade num dado instante, encontrar a distância percorrida pelo objeto num determinado período de tempo.

Newton e Leibniz encontraram uma relação fundamental entre os problemas de determinar uma reta tangente a uma curva e o de determinar a área de uma região. A descoberta dessa relação é considerada a "descoberta do Cálculo". Embora Newton tivesse visto a relação entre esses dois problemas dez anos antes de Leibniz, este publicou seu trabalho vinte anos antes daquele, numa circunstância que levou a um conflituoso debate sobre quem teria sido o autêntico descobridor do Cálculo. Esse debate envolveu a Europa durante meio século, com os cientistas do continente europeu apoiando Leibniz e os da Inglaterra, Newton. O conflito foi extremamente infeliz, porque a notação inferior de Newton barrou muito o desenvolvimento científico na Inglaterra, e o continente, por sua vez, perdeu por quase cinquenta anos o benefício das descobertas de Newton em Astronomia e na Física. Apesar disso tudo, Newton e Leibniz foram admiradores sinceros do trabalho um do outro.

*[Imagem: domínio público de http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hw-newton.jpg. A imagem foi fornecida por cortesia da Biblioteca da Universidade do Texas em Austin.]*

### ISAAC NEWTON (1642-1727)

Newton nasceu na aldeia de Woolsthorpe, na Inglaterra. Seu pai faleceu antes de seu nascimento e sua mãe criou-o na fazenda da família. Quando jovem, mostrou pouca evidência de seu brilho como adulto, exceto por um talento pouco comum com aparelhos mecânicos; aparentemente, ele construiu um relógio movido a água e um moinho de farinha movido por um camundongo. Em 1661, ele entrou no Trinity College em Cambridge sabendo pouca Geometria. Fortuitamente, chamou a atenção de Isaac Barrow, um matemático talentoso que era professor daquela instituição. Guiado por Barrow, Newton se dedicou à Matemática e às Ciências, mas graduou-se sem distinção especial. Em razão da peste bubônica que se espalhou rapidamente por Londres, voltou para sua casa em Woolsthorpe e lá permaneceu durante os anos de 1665 e 1666. Nesses dois anos momentosos, todo o arcabouço da ciência moderna foi criado miraculosamente na mente de Newton. Ele descobriu o Cálculo, reconheceu os princípios básicos do movimento planetário e da gravitação e determinou que a "luz branca" do Sol era composta por todas as cores, desde o vermelho até o violeta. Por alguma razão, manteve para si mesmo todas as suas descobertas. Em 1667, retornou a Cambridge para obter o título de Mestre e, depois de graduado, tornou-se professor em Trinity. Em 1669, sucedeu seu professor, Isaac Barrow, na assim chamada cátedra lucasiana de Matemática de Trinity, que é um dos mais honrados postos de matemático do mundo.

Daí em diante, o fluxo de suas descobertas brilhantes foi contínuo. Newton formulou a lei da gravitação e usou-a para explicar o movimento da Lua, dos planetas e das marés; formulou as leis básicas da luz, da termodinâmica e da hidrodinâmica; projetou e construiu o primeiro telescópio refletor moderno. Ao longo de sua vida, ele hesitava em publicar suas principais descobertas, talvez temendo críticas ou controvérsias, revelando-as somente para amigos de um círculo seleto. Em 1687, somente após intensa persuasão do astrônomo Edmond Halley (o descobridor do cometa Halley), Newton publicou sua obra-prima, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*

(Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural). Esse trabalho é considerado por muitos como o livro científico mais importante e influente jamais escrito. Nele, Newton explicou o funcionamento do sistema solar e formulou as leis básicas do movimento, que até hoje são fundamentais na Engenharia e na Física. Entretanto, nem mesmo o apelo de seus amigos convenceu-o a tornar pública sua descoberta do Cálculo. Somente após Leibniz ter publicado seus resultados, Newton condescendeu e publicou seus trabalhos sobre a área.

Depois de 25 anos como professor, Newton entrou em depressão e teve um esgotamento nervoso. Ele desistiu da pesquisa em 1695 para aceitar uma posição na casa da moeda de Londres. Durante os 25 anos que lá trabalhou, ele praticamente não fez nenhum trabalho científico ou matemático. Newton foi nomeado cavaleiro em 1705 e, quando morreu, foi enterrado na abadia de Westminster com todas as honras que seu país poderia prestar. É interessante notar que ele era um teólogo instruído que viu o valor de seu trabalho como sendo o seu apoio à existência de Deus. Por toda sua vida, trabalhou apaixonadamente para datar eventos bíblicos, relacionando-os a fenômenos astronômicos. Essa paixão o consumia tanto que gastou anos procurando indícios do fim do mundo e da geografia do inferno no Livro de Daniel.

Newton descrevia sua brilhante realização da seguinte forma: "Eu tenho a impressão de ter sido apenas uma criança brincando numa praia, divertindo-me aqui e acolá e descobrindo uma pedrinha mais redonda ou uma conchinha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade está todo a ser descoberto à minha frente."

*[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg]*

## GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

Esse talentoso gênio foi uma das últimas pessoas a dominar a maior parte dos campos de conhecimento, uma realização impossível em nossa época de especialização. Ele foi um especialista em Direito, Religião, Filosofia, Literatura, Política, Geologia, Metafísica, Alquimia, História e Matemática.

Leibniz nasceu em Leipzig, na Alemanha. Seu pai, um professor de Filosofia Moral na Universidade de Leipzig, faleceu quando ele tinha seis anos de idade. A criança precoce teve, então, acesso à biblioteca de seu pai e começou a ler vorazmente sobre uma grande variedade de assuntos, um hábito que manteve durante toda sua vida. Com 15 anos, entrou na Universidade de Leipzig como estudante de Direito e, aos 20, obteve um título de Doutor da Universidade de Altdorf. Subsequentemente, Leibniz seguiu uma carreira em Direito e em Política Internacional, tendo sido conselheiro de reis e príncipes. Durante suas inúmeras missões no exterior, entrou em contato com renomados matemáticos e cientistas que estimularam seu interesse pela Matemática, mais notadamente o físico Christian Huygens. Leibniz foi autodidata em Matemática, aprendendo o assunto com a leitura de artigos e periódicos. Como um resultado dessa educação matemática fragmentada, ele frequentemente redescobria os trabalhos de outros, o que ajudou a acender o debate sobre a descoberta do Cálculo.

Leibniz nunca se casou. Ele tinha hábitos moderados e era irascível, mas facilmente acalmado e benevolente em seu julgamento acerca do trabalho de outros. Apesar de suas grandes realizações, Leibniz nunca recebeu as honras dadas a Newton e passou seus últimos anos como um homem solitário e amargurado. Em seu funeral havia uma só pessoa enlutada, sua secretária. Uma testemunha observou: "Ele foi enterrado mais como um ladrão do que o que ele realmente era, um ornamento de seu país."

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

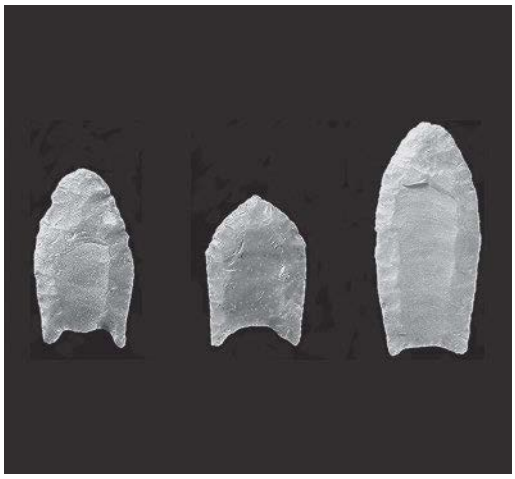


Foto de Milton Bell, catálogo # Lu1-mb1, Texas Archeological Research Labratory, The University of Texas em Austin.

# 8 MODELAGEM MATEMÁTICA COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

*Escavações nos anos 1920 em um sítio arqueológico em Folson, Novo México, EUA, revelaram uma coleção de pontas de flechas de pedra que ficou conhecida como "pontas de Folsom". Datação por carbono de ossos de bisão chamuscados encontrados nas redondezas, realizada em 1950, confirmou que caçadores humanos viveram naquela área entre 9000 e 8000 anos antes da era cristã. A datação por carbono será estudada neste capítulo.*

Muitas leis fundamentais da Ciência e da Engenharia podem ser expressas em termos de equações diferenciais. Introduzimos o conceito de uma equação diferencial na Seção 5.2, mas neste capítulo detalharemos mais. Discutiremos alguns modelos matemáticos importantes que envolvem equações diferenciais e analizaremos alguns métodos de resolução e de aproximação de soluções de alguns tipos básicos de equações diferenciais. Contudo, iremos somente tangenciar tal tópico, deixando muitos assuntos importantes em equações diferenciais para cursos completamente dedicados a esse assunto.

## 8.1 MODELAGEM COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

*Nesta seção, introduziremos alguma terminologia e conceitos básicos relativos a equações diferenciais. Também discutiremos a ideia geral de modelagem com equações diferencias e encontraremos modelos importantes que podem ser aplicados à Demografia, Medicina, Ecologia e Física. Nas últimas seções deste capítulo investigaremos os métodos que podem ser usados para resolver essas equações diferenciais.*

### TERMINOLOGIA

Na Seção 5.2, vimos que uma ***equação diferencial*** é uma equação que envolve uma ou mais derivadas de uma função desconhecida. Nesta seção, denotaremos a função desconhecida por $y = y(x)$, a menos que a equação diferencial venha de um problema aplicado envolvendo o tempo, quando a denotaremos por $y = y(t)$. A ***ordem*** da equação diferencial é a ordem da maior derivada que ela contém. Alguns exemplos estão dados na Tabela 8.1.1. As duas últimas equações da tabela estão expressas na notação "linha", que não especifica a variável independente de maneira explícita. Em geral somos capazes de dizer, a partir da própria equação ou do contexto no qual ela surge, se devemos interpretar $y'$ como $dy/dx$ ou como $dy/dt$.

**Tabela 8.1.1**

| EQUAÇÃO DIFERENCIAL | ORDEM |
|---|---|
| $\frac{dy}{dx} = 3y$ | 1 |
| $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 0$ | 2 |
| $\frac{d^3y}{dt^3} - t\frac{dy}{dt} + (t^2 - 1)y = e^t$ | 3 |
| $y' - y = e^{2x}$ | 1 |
| $y'' + y' = \cos t$ | 2 |

### SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma função $y = y(x)$ é uma ***solução*** de uma equação diferencial em um intervalo aberto se a equação estiver satisfeita identicamente no intervalo quando $y$ e suas derivadas forem substituídas na equação. Por exemplo, $y = e^{2x}$ é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x} \tag{1}$$

no intervalo $(-\infty, +\infty)$, pois substituindo $y$ e as suas derivadas no lado esquerdo dessa equação obtemos

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{d}{dx}[e^{2x}] - e^{2x} = 2e^{2x} - e^{2x} = e^{2x}$$

com qualquer valor real de $x$. Porém, essa não é a única solução em $(-\infty, +\infty)$; por exemplo, a função

$$y = e^{2x} + Ce^{x} \tag{2}$$

também é uma solução com qualquer valor real da constante $C$, pois

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{d}{dx}[e^{2x} + Ce^{x}] - (e^{2x} + Ce^{x}) = (2e^{2x} + Ce^{x}) - (e^{2x} + Ce^{x}) = e^{2x}$$

Depois de desenvolver algumas técnicas de resolução de equações como a dada em (1), poderemos mostrar que *todas* as soluções de (1) em $(-\infty, +\infty)$ podem ser obtidas substituindo a constante $C$ em (2) por valores. Em um dado intervalo, uma solução de uma equação diferencial a partir da qual podem ser deduzidas todas as soluções naquele intervalo, pela substituição de constantes arbitrárias por valores, é chamada de ***solução geral*** da equação no intervalo. Assim, (2) é a solução geral de (1) no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

A solução geral (2) da equação de primeira ordem (1) tem uma única constante arbitrária. Mais geralmente, a solução geral de uma equação diferencial de enésima ordem tem $n$ constantes arbitrárias. Isso é plausível, pois são necessárias $n$ integrações para recuperar uma função a partir de sua enésima derivada.

O gráfico de uma solução de uma equação diferencial é chamado de ***curva integral*** da equação, portanto a solução geral de uma equação diferencial produz uma família de curvas integrais correspondentes a diferentes possíveis escolhas para as constantes arbitrárias. Por exemplo, a Figura 8.1.1 mostra algumas curvas integrais de (1), que foram obtidas atribuindo-se valores para a constante arbitrária de (2).

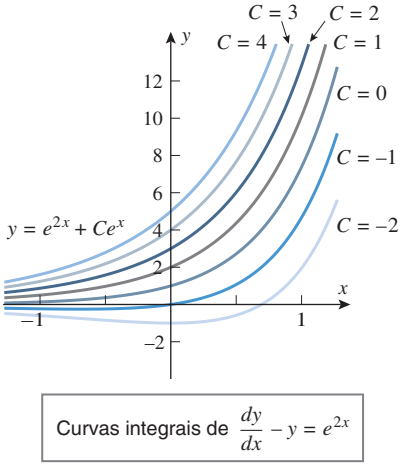



**Figura 8.1.1**

## PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Quando um problema aplicado leva a uma equação diferencial, em geral há condições no problema que determinam valores específicos para as constantes arbitrárias. Como regra empírica, necessitamos de $n$ condições para determinar os valores de todas as $n$ constantes arbitrárias na solução geral de uma equação diferencial de ordem $n$ (uma condição para cada constante). Para uma equação de primeira ordem, a única constante arbitrária pode ser determinada especificando-se o valor da função desconhecida $y(x)$ em um ponto arbitrário $x_0$, digamos $y(x_0) = y_0$. Isso é chamado de ***condição inicial***, e o problema de resolver uma equação de primeira ordem sujeita a uma condição inicial é chamado de ***problema de valor inicial de primeira ordem***. Geometricamente, a condição inicial $y(x_0) = y_0$ tem o efeito de isolar da família completa de curvas integrais a curva integral que passa pelo ponto $(x_0, y_0)$.

► **Exemplo 1** A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}, \quad y(0) = 3$$

pode ser obtida pela substituição da condição inicial $x = 0$, $y = 3$ na solução geral (2) para encontrar $C$. Obtemos

$$3 = e^0 + Ce^0 = 1 + C$$

Assim, $C = 2$, e a solução do problema de valor inicial, obtida substituindo esse valor de $C$ em (2), é

$$y = e^{2x} + 2e^x$$

Geometricamente, essa solução pode ser vista como a curva integral na Figura 8.1.1 que passa pelo ponto (0, 3). ◄

Como muitos princípios importantes das ciências físicas e sociais envolvem taxas de variação, não deveria ser uma surpresa que tais princípios possam, muitas vezes, ser modelados por equações diferenciais. Vejamos alguns exemplos do processo de modelagem.

## CRESCIMENTO POPULACIONAL IRRESTRITO

© AndreasReh/iStockphoto

*Um modelo de crescimento populacional irrestrito pode ser usado para modelar o aumento de bactérias em uma placa de Petri se o número inicial de bactérias for pequeno.*

Um dos modelos mais simples de crescimento populacional está baseado na observação de que quando populações (pessoas, plantas, bactérias e moscas-das-frutas, por exemplo) não estão restritas por limitações ambientais, elas tendem a crescer a uma taxa proporcional ao tamanho da população – quanto maior for a população, mais rapidamente ela cresce.

Para traduzir esse princípio em um modelo matemático, suponha que $y = y(t)$ denote a população no instante $t$. A cada momento, a taxa de crescimento populacional em relação ao tempo é $dy/dt$, portanto a hipótese de que a taxa de crescimento seja proporcional à população é descrita pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{3}$$

onde $k$ é uma constante de proporcionalidade positiva que pode ser usualmente determinada experimentalmente. Assim, se a população for conhecida em algum instante, digamos $y = y_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para a população $y(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad y(0) = y_0$$

## CRESCIMENTO POPULACIONAL RESTRITO; MODELOS LOGÍSTICOS

A premissa básica do modelo de crescimento populacional irrestrito é a de que a população $y = y(t)$ não é condicionada pelo meio ambiente. Essa hipótese até é razoável enquanto o tamanho da população for relativamente pequeno, mas os efeitos ambientais se tornam cada vez mais importantes à medida que a população cresce. Em geral, as populações crescem dentro de sistemas ecológicos que podem suportar somente um certo número de indivíduos; o número $L$ desses indivíduos é denominado ***capacidade de tolerância*** do sistema. Quando $y > L$, a população excede a capacidade do sistema ecológico e tende a decrescer em direção a $L$; quando $y < L$, a população está abaixo da capacidade do sistema ecológico e tende a crescer em direção a $L$; quando $y = L$, a população está em equilíbrio com a capacidade do sistema ecológico e tende a permanecer estável.

Para traduzir isso em um modelo matemático, devemos procurar uma equação diferencial na qual $y > 0$, $L > 0$ e

$$\frac{dy}{dt} < 0 \quad \text{se} \quad \frac{y}{L} > 1, \qquad \frac{dy}{dt} > 0 \quad \text{se} \quad \frac{y}{L} < 1, \qquad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{se} \quad \frac{y}{L} = 1$$

Além disso, quando a população estiver muito abaixo da capacidade de tolerância (ou seja, se $y/L \approx 0$), então as restrições do meio ambiente deveriam ter pouco efeito e a taxa de crescimento deveria se comportar como no modelo de crescimento irrestrito. Assim, queremos que

$$\frac{dy}{dt} \approx ky \quad \text{se} \quad \frac{y}{L} \approx 0$$

Uma equação diferencial simples que dá conta de todas essas exigências é

$$\frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{L}\right)y$$

em que $k$ é uma constate positiva de proporcionalidade. Assim, se $k$ e $L$ puderem ser determinados experimentalmente e se a população for conhecida em algum ponto, digamos, $y(0) = y_0$, então uma fórmula para a população $y(t)$ pode ser determinada resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{L}\right)y, \quad y(0) = y_0 \tag{4}$$

Deve-se tal teoria do crescimento populacional ao matemático belga P. F. Verhulst (1804-1849), que a introduziu em 1838 e a descreveu como "crescimento logístico"*. Assim, a equação diferencial (4) é denominada ***equação diferencial logística***, e o modelo de crescimento descrito por (4) é denominado ***modelo logístico***.

## FARMACOLOGIA

Quando uma droga (digamos, penicilina ou aspirina) é administrada a um indivíduo, ela entra na corrente sanguínea e, então, é absorvida pelo corpo no decorrer do tempo. Pesquisas médicas mostraram que a quantidade de uma droga presente nessa corrente tende a decrescer a uma taxa proporcional à quantidade de droga presente – quanto mais droga estiver presente na corrente sanguínea, mais rapidamente ela será absorvida pelo corpo.

Para traduzir este princípio em um modelo matemático, suponha que $y = y(t)$ seja a quantidade de droga presente na corrente sanguínea no instante $t$. A cada instante, a taxa de variação de $y$ em relação a $t$ é $dy/dt$, portanto, a hipótese de que o decrescimento da taxa seja proporcional à quantidade $y$ na corrente sanguínea traduz-se na equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -ky \tag{5}$$

onde $k$ é uma constante de proporcionalidade positiva que depende da droga e pode ser determinada experimentalmente. O sinal negativo é requerido, pois $y$ decresce com o tempo. Assim, se a dosagem inicial da droga for conhecida, digamos $y = y_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para $y(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor incial

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \quad y(0) = y_0$$

## DISSEMINAÇÃO DE UMA DOENÇA

Suponha que uma doença comece a se espalhar em uma população de $L$ indivíduos. A lógica sugere que, em cada instante, a taxa segundo a qual a doença se espalha irá depender de quantos indivíduos estão afetados e de quantos não estão – à medida que mais indivíduos estiverem afetados, a oportunidade de disseminação da doença tende a crescer, mas ao mesmo tempo há menos indivíduos que não foram afetados, portanto, a disseminação da doença tende a decrescer. Dessa forma, existem duas influências conflitantes sobre a taxa segundo a qual a doença se espalha.

* O modelo de Verhulst caiu na obscuridade por quase um século porque ele não havia oferecido dados de censo em quantidade suficiente para testar sua validade. No entanto, o interesse nesse modelo foi ressuscitado nos anos 1930, quando biólogos tiveram sucesso em sua utilização para descrever o crescimento das populações de moscas-das-frutas e de besouros de farinha. O próprio Verhulst utilizou seu modelo para prever que um limite superior da população da Bélgica seria de aproximadamente 9.400.000. A população da Bélgica em 2006 era de 10.379.000.

Para traduzir isso em um modelo matemático, suponha que $y = y(t)$ seja o número de indivíduos que têm a doença no instante $t$, logo necessariamente o número de indivíduos que não têm a doença no instante $t$ é $L - y$. Quando o valor de $y$ cresce, o valor de $L - y$ decresce, assim as influências conflitantes dos dois valores sobre a taxa de disseminação $dy/dt$ são levadas em conta pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y)$$

Mostre que o modelo de disseminação de uma doença pode ser visto como um modelo logístico com constante de proporcionalidade $kL$: basta reescrever (6) de acordo.

onde $k$ é uma constante de proporcionalidade positiva que depende da natureza da doença e dos padrões de comportamento dos indivíduos e pode ser determinada experimentalmente. Assim, se o número de indivíduos afetados for conhecido em um certo instante, digamos $y = y_0$ em $t = 0$, então a fórmula geral para $y(t)$ pode ser obtida resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky(L - y), \quad y(0) = y_0 \tag{6}$$

## LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON

Se um objeto quente for colocado em um ambiente frio, o objeto resfriará a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e o ambiente. Analogamente, se um objeto frio for colocado num ambiente quente, o objeto esquentará a uma taxa que é, novamente, proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e o ambiente. Juntas, essas duas observações constituem o que é conhecido como a *Lei do Resfriamento de Newton*. (Essa lei já apareceu anteriormente nos exercícios da Seção 2.2 e foi mencionada rapidamente na Seção 5.8.) Para traduzir essa lei num modelo matemático, suponha que $T = T(t)$ seja a temperatura do objeto em um instante de tempo $t$ e que $T_e$ seja a temperatura do ambiente, que supomos ser constante. Como a taxa de variação $dT/dt$ é proporcional a $T - T_e$, temos

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_e)$$

em que $k$ é uma constate positiva de proporcionalidade. Além disso, como $dT/dt$ é positivo se $T < T_e$ e é negativo se $T > T_e$, o sinal de $k$ deve ser *negativo*. Assim, se a temperatura do objeto for conhecida em algum instante de tempo, digamos, $T = T_0$ no instante $t = 0$, então uma fórmula para a temperatura $T(t)$ pode ser obtida resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_e), \quad T(0) = T_0 \tag{7}$$

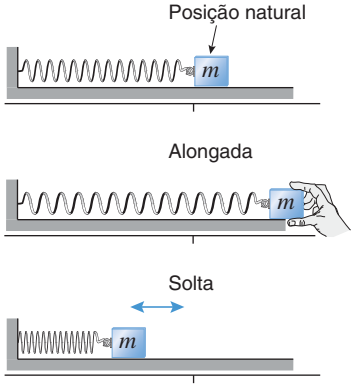



**Figura 8.1.2**

## OSCILAÇÃO DE MOLAS

Concluímos esta seção com um modelo da Engenharia que leva a uma equação diferencial de segunda ordem.

Considere um bloco de massa $m$ preso a uma extremidade de uma mola horizontal, conforme a Figura 8.1.2. Suponha que o bloco seja colocado em movimento oscilatório puxando a mola além de sua posição natural e soltando-a no instante de tempo $t = 0$. Estaremos interessados em encontrar um modelo matemático que descreva o movimento oscilatório do bloco no decorrer do tempo.

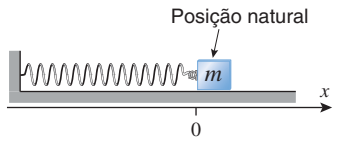



**Figura 8.1.3**

Para traduzir esse problema em forma matemática, introduzimos um eixo horizontal $x$ cujo sentido positivo seja para a direita e cuja origem esteja na extremidade direita da mola quando a mola estiver na posição natural (Figura 8.1.3). Nossa meta é encontrar a coordenada $x = x(t)$ do ponto em que o bloco está preso à mola como uma função do tempo. No desenvolvimento desse modelo, suporemos que a única força que age sobre a massa $m$ é a força restauradora da mola e ignoraremos a influência de outras forças, como a do atrito e a da resistência do ar, e assim por diante. Lembre que, pela Lei de Hooke (Seção 6.6), quando o ponto de conexão tiver a coordenada $x(t)$, a força restauradora será $-kx(t)$, em que $k$ é uma constante da mola. [O sinal é negativo porque a força restauradora atua para a esquerda quando $x(t)$ for

positivo e atua para a direita quando $x(t)$ for negativo.] Segue da Segunda Lei do Movimento de Newton [Equação (5) da Seção 6.6] que essa força restauradora é igual ao produto da massa $m$ pela aceleração $d^2x/dt^2$ da massa. Em outras palavras, temos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem em $x$. Se a mola for solta de sua posição natural $x(0) = x_0$ no instante $t = 0$, então uma fórmula para $x(t)$ pode ser encontrada resolvendo o problema de valor inicial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0 \tag{8}$$

[Se a mola for solta de sua posição natural com uma velocidade inicial $v_0 \neq 0$ no instante $t = 0$, então a condição $x'(0) = 0$ deve ser trocada por $x'(0) = v_0$.]

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.1 (Ver página 568 para respostas.)

**1.** Associe cada equação diferencial com sua família de soluções.

(a) $x\dfrac{dy}{dx} = y$ _____ (i) $y = x^2 + C$

(b) $y'' = 4y$ _____ (ii) $y = C_1 \operatorname{sen} 2x + C_2 \cos 2x$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ _____ (iii) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -4y$ _____ (iv) $y = Cx$

**2.** Se $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$ é a solução geral de uma equação diferencial, então a ordem da equação é _____ e a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$ é dada por $y =$ _____.

**3.** O gráfico de uma função diferenciável $y = y(x)$ passa pelo ponto (0, 1) e em cada ponto $P(x, y)$ do gráfico a reta tangente é perpendicular à reta que passa por $P$ e pela origem. Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(x)$.

**4.** Um copo de água gelada a uma temperatura de 36°F é colocado em uma sala com uma temperatura ambiente constante de 68°F. Supondo que a Lei do Resfriamento de Newton se aplique, encontre um problema de valor inicial cuja solução seja a temperatura da água $t$ minutos depois de ter sido colocada na sala. [*Nota*: a equação diferencial irá envolver uma constante de proporcionalidade.]

## EXERCÍCIOS 8.1

**1.** Confirme que $y = 3e^{x^3}$ é uma solução do problema de valor inicial $y' = 3x^2y$, $y(0) = 3$.

**2.** Confirme que $y = \frac{1}{4}x^4 + 2\cos x + 1$ é uma solução do problema de valor inicial $y' = x^3 - 2\operatorname{sen} x$, $y(0) = 3$.

**3-4** Dê a ordem da equação diferencial e confirme que as funções da família dada são soluções. ■

**3.** (a) $(1 + x)\dfrac{dy}{dx} = y$; $y = c(1 + x)$

(b) $y'' + y = 0$; $y = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t$

**4.** (a) $2\dfrac{dy}{dx} + y = x - 1$; $y = ce^{-x/2} + x - 3$

(b) $y'' - y = 0$; $y = c_1e^t + c_2e^{-t}$

**5-8 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**5.** A equação

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx} + 2y$$

é um exemplo de equação diferencial de segunda ordem.

**6.** A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2y + 1$$

tem uma solução que é constante.

**7.** A solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

envolve três constantes arbitrárias.

**8.** Se cada solução de uma equação diferencial puder ser expressa na forma $y = Ae^{x+b}$ com alguma escolha de constantes $A$ e $b$, então a equação diferencial deve ser de segunda ordem.

**9-14** Em cada parte, verifique que as funções dadas são soluções da equação diferencial substituindo as funções na equação. ■

**9.** $y'' + y' - 2y = 0$

(a) $e^{-2x}$ e $e^x$

(b) $c_1e^{-2x} + c_2e^x$ ($c_1$, $c_2$ constantes)

**10.** $y'' - y' - 6y = 0$
(a) $e^{-2x}$ e $e^{3x}$
(b) $c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$ ($c_1$, $c_2$ constantes)

**11.** $y'' - 4y' + 4y = 0$
(a) $e^{2x}$ e $xe^{2x}$
(b) $c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$ ($c_1$, $c_2$ constantes)

**12.** $y'' - 8y' + 16y = 0$
(a) $e^{4x}$ e $xe^{4x}$
(b) $c_1e^{4x} + c_2xe^{4x}$ ($c_1$, $c_2$ constantes)

**13.** $y'' + 4y = 0$
(a) sen $2x$ e cos $2x$
(b) $c_1$ sen $2x + c_2$ cos $2x$ ($c_1$, $c_2$ constantes)

**14.** $y'' + 4y' + 13y = 0$
(a) $e^{-2x}$ sen $3x$ e $e^{-2x}$ cos $3x$
(b) $e^{-2x}(c_1$ sen $3x + c_2$ cos $3x)$ ($c_1$, $c_2$ constantes)

**15-20** Use os resultados dos Exercícios 9 a 14 para encontrar uma solução do problema de valor inicial. ■

**15.** $y'' + y' - 2y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -4$

**16.** $y'' - y' - 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 8$

**17.** $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$

**18.** $y'' - 8y' + 16y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

**19.** $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

**20.** $y'' + 4y' + 13y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -1$

**21-26** Encontre uma solução do problema de valor inicial. ■

**21.** $y' + 4x = 2,\ y(0) = 3$

**22.** $y'' + 6x = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

**23.** $y' - y^2 = 0,\ y(1) = 2$ [*Sugestão*: suponha que a solução tenha uma função inversa $x = x(y)$. Encontre e resolva a equação diferencial que envolve $x'(y)$.]

**24.** $y' = 1 + y^2, y(0) = 0$ (Ver Exercício 23.)

**25.** $x^2y' + 2xy = 0,\quad y(1) = 2$ [*Sugestão*: interprete o lado esquerdo da equação como a derivada de um produto de duas funções.]

**26.** $xy' + y = e^x,\ y(1) = 1 + e$ (Ver Exercício 25.)

## ENFOCANDO CONCEITOS

**27.** (a) Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ cresça a uma taxa proporcional ao quadrado da quantidade presente e que em $t = 0$ ela seja $y_0$. Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
(b) Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ decresça a uma taxa proporcional ao quadrado da quantidade presente e que em $t = 0$ ela seja $y_0$. Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.

**28.** (a) Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ varie de tal modo que $dy/dt = k\sqrt{y}$, onde $k > 0$. Descreva em palavras a variação de $y$.
(b) Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ varie de tal modo que $dy/dt = -ky^3$, onde $k > 0$. Descreva em palavras a variação de $y$.

**29.** (a) Suponha que uma partícula se mova ao longo de um eixo $s$ de tal forma que a sua velocidade $v(t)$ seja sempre a metade de $s(t)$. Determine uma equação diferencial cuja solução seja $s(t)$.
(b) Suponha que um objeto se mova ao longo de um eixo $s$ de tal forma que a sua aceleração $a(t)$ seja sempre o dobro da velocidade. Determine uma equação diferencial cuja solução seja $s(t)$.

**30.** Suponha que um corpo se mova ao longo de um eixo $s$ através de um meio resistente de tal forma que a velocidade $v = v(t)$ decresça a uma taxa que seja o dobro do quadrado da velocidade.
(a) Encontre uma equação diferencial cuja solução seja a velocidade $v(t)$.
(b) Encontre uma equação diferencial cuja solução seja a posição $s(t)$.

**31.** Considere uma solução $y = y(t)$ do modelo de crescimento populacional irrestrito.
(a) Use a Equação (3) para explicar por que $y$ será uma função crescente de $t$.
(b) Use a Equação (3) para explicar por que o gráfico de $y = y(t)$ será côncavo para cima.

**32.** Considere o modelo de crescimento populacional logístico.
(a) Explique por que esse modelo tem duas soluções constantes.
(b) Com qual tamanho a população crescerá mais rapidamente?

**33.** Considere o modelo de disseminação de uma doença.
(a) Explique por que esse modelo tem duas soluções constantes.
(b) Com qual tamanho da população infectada a disseminação da doença crescerá mais rapidamente?

**34.** Explique por que existe exatamente uma solução constante do modelo da Lei do Resfriamento de Newton.

**35.** Mostre que se $c_1$ e $c_2$ forem quaisquer constantes, a função

$$x = x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

será uma solução da equação diferencial da oscilação de uma mola. (O movimento correspondente da mola é conhecido como ***movimento harmônico simples***.)

**36.** (a) Use o resultado do Exercício 35 para resolver o problema de valor inicial em (8).
(b) Encontre a amplitude, o período e a frequência da resposta dada no item (a) e interprete cada um deles em termos do movimento da mola.

**37.** **Texto** Selecione um dos modelos desta seção e escreva um parágrafo discutindo as condições diante das quais esse modelo não seria apropriado. Como o modelo poderia ser modificado para levar em consideração essas condições?

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.1

**1.** (a) (iv) (b) (iii) (c) (i) (d) (ii) **2.** $2;\ e^{2x} + 2xe^{2x}$ **3.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y},\ y(0) = 1$ **4.** $\dfrac{dT}{dt} = k(T - 68),\ T(0) = 36$

## 8.2 SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

*Nesta seção, discutiremos um método denominado "separação de variáveis", que pode ser usado para resolver uma classe grande de equações diferenciais de primeira ordem de um certo formato. Utilizaremos esse método para investigar os modelos matemáticos para o crescimento e o decaimento exponenciais, inclusive modelos populacionais e a datação por carbono.*

### EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM SEPARÁVEIS

Veremos agora um método de resolução que pode, muitas vezes, ser aplicado a equações de primeira ordem que possam ser expressas da forma

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1}$$

Alguns autores definem uma equação separável como uma que pode ser escrita no formato $dy/dx = G(x)H(y)$. Explique por que isso equivale à nossa definição.

Tais equações de primeira ordem são denominadas ***separáveis***. Alguns exemplos de equações separáveis são dadas na Tabela 8.2.1. A terminologia decorre da possibilidade de reescrever essas equações no formato

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx \tag{2}$$

em que as expressões envolvendo $x$ aparecem de um lado e as envolvendo $y$, do outro lado da equação. O processo de reescrever (1) no formato (2) é denominado ***separar as variáveis***.

**Tabela 8.2.1**

| EQUAÇÃO | FORMATO (1) | $h(y)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ | $y\dfrac{dy}{dx} = x$ | $y$ | $x$ |
| $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^3$ | $\dfrac{1}{y^3}\dfrac{dy}{dx} = x^2$ | $\dfrac{1}{y^3}$ | $x^2$ |
| $\dfrac{dy}{dx} = y$ | $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = 1$ | $\dfrac{1}{y}$ | $1$ |
| $\dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{y}{x}$ | $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{x}$ | $\dfrac{1}{y}$ | $1 - \dfrac{1}{x}$ |

Para motivar um método de resolução de equações separáveis, suponha que $h(y)$ e $g(x)$ sejam funções contínuas de suas respectivas variáveis e considere antiderivadas $H(y)$ e $G(x)$ de $h(y)$ e $g(x)$, respectivamente. Em seguida, integre ambos os lados de (2), o lado esquerdo em relação a $y$ e o lado direito em relação a $x$. Então, temos

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx \tag{3}$$

ou, equivalentemente,

$$H(y) = G(x) + C \tag{4}$$

onde $C$ denota uma constante de integração. Afirmamos que uma função diferenciável $y = y(x)$ é uma solução de (1) se, e somente se, $y$ satisfaz a Equação (4) com alguma escolha da constante $C$.

Suponha que $y = y(x)$ seja uma solução de (1). Então segue da regra da cadeia que

$$\frac{d}{dx}[H(y)] = \frac{dH}{dy}\frac{dy}{dx} = h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) = \frac{dG}{dx} \tag{5}$$

Como as funções $H(y)$ e $G(x)$ têm a mesma derivada em relação a $x$, elas têm uma diferença constante (Teorema 4.8.3). Desse modo, vemos que $y$ satisfaz (4) com uma escolha apropriada de $C$. Reciprocamente, se $y = y(x)$ for definida implicitamente pela Equação (4), então a derivação implícita mostra que (5) é válida e, portanto, $y(x)$ é uma solução de (1) (Exercício 67). Em vista disso, é prática comum dizer que a Equação (4) é a "solução" de (1).

Resumindo, temos o procedimento denominado ***separação de variáveis*** a seguir para resolver (1).

***Separação de Variáveis***

**Passo 1** Separe as variáveis em (1) reescrevendo a equação da forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

**Passo 2** Integre ambos os lados da equação do Passo 1 (o lado esquerdo em relação a $y$ e o lado direito em relação $x$):

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

**Passo 3** Se $H(y)$ for uma antiderivada qualquer de $h(y)$ e se $G(x)$ for uma antiderivada qualquer de $g(x)$, então geralmente a equação

$$H(y) = G(x) + C$$

definirá implicitamente uma família de soluções. Em alguns casos, é possível resolver essa equação implicitamente em $y$.

**▶ Exemplo 1** Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2$$

e, então, resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2, \quad y(0) = 1$$

Em um problema de valor inicial em que a equação diferencial for separável, podemos usar a condição inicial para resolver em $C$, como no Exemplo 1, ou substituir as integrais indefinidas do Passo 2 por integrais definidas (Exemplo 68).

***Solução*** Com $y \neq 0$, podemos reescrever essa equação no formato (1) como

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -4x$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{1}{y^2}\,dy = -4x\,dx$$

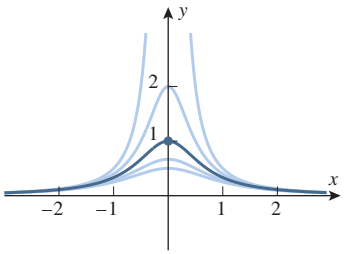
$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int -4x\,dx$$

ou

$$-\frac{1}{y} = -2x^2 + C$$

Resolvendo em $y$ como uma função de $x$, obtemos

$$y = \frac{1}{2x^2 - C}$$




Curvas integrais de $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$

**Figura 8.2.1**

A condição inicial $y(0) = 1$ requer que $y = 1$ quando $x = 0$. Substituindo esses valores na nossa solução, temos $C = -1$ (verifique). Assim, uma solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1}{2x^2 + 1} \tag{6}$$

Algumas curvas integrais e a nossa solução do problema de valor inicial estão esboçadas na Figura 8.2.1. ◀

Um aspecto da nossa solução no Exemplo 1 merece um comentário especial. Se a condição inicial tivesse sido $y(0) = 0$ em vez de $y(0) = 1$, o método que utilizamos teria deixado de fornecer uma solução para o problema de valor inicial (Exercício 25). Isso se deve ao fato de que precisamos supor $y \neq 0$ para poder reescrever a equação $dy/dx = -4xy^2$ no formato

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -4x$$

É importante lembrar dessas hipóteses quando uma equação diferencial for manipulada algebricamente.

**▶ Exemplo 2** Resolva o problema de valor inicial

$$(4y - \cos y)\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0, \quad y(0) = 0$$

A solução de um problema de valor inicial em $x$ e $y$ pode, às vezes, ser expressa explicitamente como uma função de $x$ [como na Fórmula (6) do Exemplo 1] ou como uma função de $y$ [como na Fórmula (8) do Exemplo 2]. Contudo, às vezes, a solução não pode ser expressa em nenhuma dessas formas, de modo que a única opção é expressá-la implicitamente como uma equação em $x$ e $y$.

***Solução*** Podemos reescrever essa equação na forma (1) como

$$(4y - \cos y)\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$(4y - \cos y)\,dy = 3x^2\,dx$$

$$\int (4y - \cos y)\,dy = \int 3x^2\,dx$$

ou

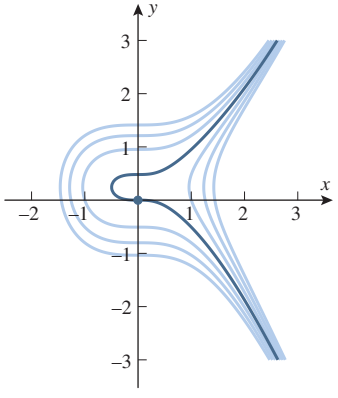
$$2y^2 - \operatorname{sen} y = x^3 + C \tag{7}$$

Para o problema de valor inicial, a condição inicial $y(0) = 0$ requer que $y = 0$ se $x = 0$. Substituindo esses valores em (7) para determinar a constante de integração, obtemos $C = 0$ (verifique). Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$2y^2 - \operatorname{sen} y = x^3$$

ou

$$x = \sqrt[3]{2y^2 - \operatorname{sen} y} \quad \blacktriangleleft \tag{8}$$




Curvas integrais de $(4y - \cos y)\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$

**Figura 8.2.2**

Algumas curvas integrais e a solução do problema de valor inicial do Exemplo 2 estão esboçadas na Figura 8.2.2.

Muitos problemas de valor inicial resultam de questões geométricas, como no exemplo seguinte.

**▶ Exemplo 3** Encontre uma curva no plano $xy$ que passe por $(0, 3)$ e cuja reta tangente em um ponto $(x, y)$ tenha inclinação $2x/y^2$.

***Solução*** Como a inclinação da reta tangente é $dy/dx$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \tag{9}$$

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Alguns CAS podem fazer gráficos de equações implícitas. A Figura 8.2.2 mostra os gráficos de (7) com $C = 0, \pm 1, \pm 2$ e $\pm 3$. Usando um CAS que faça o gráfico de equações implícitas, leia o manual e tente repetir esta figura.

e, como a curva passa por (0, 3), temos a condição inicial

$$y(0) = 3$$

A Equação (9) é separável e pode ser escrita como

$$y^2\,dy = 2x\,dx$$

portanto,

$$\int y^2\,dy = \int 2x\,dx \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{3}y^3 = x^2 + C$$

Tem-se, da condição inicial, que $y = 3$ se $x = 0$. Substituindo esses valores na última equação, obtemos $C = 9$ (verifique); portanto, a equação da curva desejada é

$$\tfrac{1}{3}y^3 = x^2 + 9 \quad \text{ou} \quad y = (3x^2 + 27)^{1/3} \blacktriangleleft$$

## MODELOS DE CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAL

Os modelos de crescimento populacional e de farmacologia desenvolvidos na Seção 8.1 são exemplos de uma classe geral de modelos chamados de *modelos exponenciais*. Em geral, os modelos exponenciais surgem em situações nas quais uma quantidade cresce ou decresce a uma taxa que é proporcional ao montante de quantidade presente. Mais precisamente, vamos fazer a seguinte definição.

**8.2.1 DEFINIÇÃO** Dizemos que uma quantidade $y = y(t)$ tem um ***modelo de crescimento exponencial*** se ela crescer a uma taxa que é proporcional ao tamanho da quantidade presente, e dizemos que tem um ***modelo de decaimento exponencial*** se ela decresce a uma taxa que é proporcional ao tamanho da quantidade presente. Assim, para um modelo de crescimento exponencial, a quantidade $y(t)$ satisfaz a uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad (k > 0) \tag{10}$$

e, para um modelo de decaimento exponencial, a quantidade $y(t)$ satisfaz uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad (k > 0) \tag{11}$$

A constante $k$ é chamada de ***constante de crescimento*** ou ***constante de decaimento***, conforme apropriado.

As Equações (10) e (11) são separáveis, pois têm o formato de (1), mas com $t$ em vez de $x$ como variável independente. Para ilustrar como essa equações podem ser resolvidas, suponha que uma quantidade positiva $y = y(t)$ tenha um modelo de crescimento exponencial e que saibamos o total dessa quantidade em algum instante de tempo, digamos $y = y_0$, quando $t = 0$. Assim, uma fórmula para $y(t)$ pode ser obtida resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad y(0) = y_0$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$$

ou (já que $y > 0$)

$$\ln y = kt + C \tag{12}$$

A condição inicial implica que $y = y_0$ quando $t = 0$. Substituindo esses valores em (12), obtemos $C = \ln y_0$ (verifique). Assim,

$$\ln y = kt + \ln y_0$$

do que segue que

$$y = e^{\ln y} = e^{kt+\ln y_0}$$

ou, equivalentemente,

$$y = y_0 e^{kt} \tag{13}$$

Deixamos a cargo do leitor mostrar que se $y = y(t)$ tiver um modelo de decaimento exponencial e se $y(0) = y_0$, então

$$y = y_0 e^{-kt} \tag{14}$$

## INTERPRETAÇÃO DAS CONSTANTES DE CRESCIMENTO E DECAIMENTO

O significado da constante $k$ nas Fórmulas (13) e (14) pode ser entendido reexaminando as equações diferenciais que dão origem a essas fórmulas. Por exemplo, no caso do modelo de crescimento exponencial, a Equação (10) pode ser reescrita como

$$k = \frac{dy/dt}{y} \tag{15}$$

É comum nas aplicações chamar a taxa de crescimento relativo (15) de *taxa de crescimento*, mesmo que não esteja realmente correto (a taxa de crescimento é $dy/dt$). Entretanto, a prática é tão comum que a seguiremos aqui.

que afirma que a taxa de crescimento, como uma fração de toda população, permanece constante no tempo, e esta constante é $k$. Por essa razão, $k$ é chamada de ***taxa de crescimento relativo*** da população. É comum expressar a taxa de crescimento relativo como uma porcentagem. Assim, uma taxa de crescimento relativo de 3% por unidade de tempo em um modelo de crescimento exponencial significa que $k = 0{,}03$. Analogamente, a constante $k$ em um modelo de decaimento exponencial é chamada de ***taxa de decaimento relativo.***

► **Exemplo 4** De acordo com os dados das Nações Unidas, a população mundial em 2011 era de, aproximadamente, 6,9 bilhões e estava crescendo a uma taxa em torno de 1,10% ao ano. Supondo um modelo de crescimento exponencial, estime a população mundial no início do ano de 2030.

***Solução*** Vamos supor que a população no início de 2011 era de 6,9 bilhões e sejam

$t$ = tempo decorrido desde o começo de 2011 (em anos)

$y$ = população mundial (em bilhões)

Como o começo de 2011 corresponde a $t = 0$, segue dos dados fornecidos que

$$y_0 = y(0) = 6{,}9 \text{ bilhões}$$

Como a taxa de crescimento é de 1,10% ($k = 0{,}011$), segue de (13) que a população mundial no instante $t$ será

$$y(t) = y_0 e^{kt} = 6{,}9e^{0{,}011t} \tag{16}$$

No Exemplo 4, a taxa de crescimento foi dada, logo não há a necessidade de calculá-la. Se a taxa de crescimento ou decaimento em um modelo exponencial é desconhecida, então pode ser calculada usando a condição inicial e o valor de $y$ em um outro ponto no tempo (Exercício 44).

Como o começo de 2030 corresponde ao tempo decorrido de $t = 19$ anos (2030 – 2011 = 19 anos), segue de (16) que a população mundial em 2030 será de

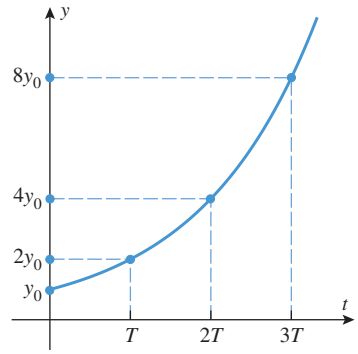
$$y(19) = 6{,}9e^{0{,}011(19)} \approx 8{,}5$$

que é uma população de 8,5 bilhões, aproximadamente. ◄

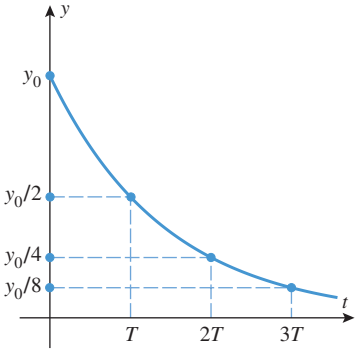
## TEMPO DE DUPLICAÇÃO E MEIA VIDA

Se a quantidade $y$ tiver um modelo de crescimento exponencial, então o tempo necessário para o tamanho inicial dobrar é chamado de ***tempo de duplicação***, e se $y$ tiver um modelo de decaimento exponencial, então o tempo requerido para o tamanho original se reduzir à metade é chamado de ***meia vida***. O tempo de duplicação e a meia vida dependem somente da taxa de crescimento ou de decaimento, e não da quantidade presente inicialmente. Para ver isso, suponha que $y = y(t)$ tenha um modelo de crescimento exponencial

$$y = y_0 e^{kt} \tag{17}$$




Modelo de crescimento exponencial com tempo de duplicação $T$




Modelo de decaimento exponencial com meia vida $T$

**Figura 8.2.3**

e seja $T$ o tempo requerido para $y$ dobrar o seu tamanho. Dessa forma, no tempo $t = T$ o valor de $y$ será $2y_0$ e, portanto, de (17)

$$2y_0 = y_0e^{kT} \quad \text{ou} \quad e^{kT} = 2$$

Tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados, temos que $kT = \ln 2$, portanto o tempo de duplicação é

$$T = \frac{1}{k}\ln 2 \tag{18}$$

Deixaremos como exercício mostrar que a Fórmula (18) também dá a meia vida de um modelo de decaimento exponencial. Observe que essa fórmula não envolve a quantidade inicial $y_0$, de modo que, em um modelo de crescimento ou de decaimento exponencial, a quantidade $y$ duplica-se (ou reduz-se ao meio) a cada $T$ unidades (Figura 8.2.3).

**▶ Exemplo 5** Tem-se a partir de (18) que, com uma taxa de crescimento continuada de 1,10% ao ano, o tempo de duplicação para a população mundial será

$$T = \frac{1}{0{,}011}\ln 2 \approx 63$$

ou aproximadamente 63 anos. Assim, com uma taxa de crescimento anual continuada de 1,10%, a população de 6,9 bilhões em 2011 dobrará para 13,8 bilhões no ano de 2074 e dobrará outra vez para 27,6 bilhões em 2137. ◀

## ■ DECAIMENTO RADIOATIVO

É um fato da Física que os elementos radioativos se desintegram espontaneamente em um processo chamado de ***decaimento radioativo***. Os experimentos têm mostrado que a taxa de desintegração é proporcional à quantidade de elemento presente, o que implica que a quantidade $y = y(t)$ de elemento radioativo é uma função do tempo com um modelo de decaimento exponencial.

Todo elemento radioativo tem uma meia vida específica; por exemplo, a meia vida do carbono-14 radioativo está em torno de 5.730 anos. Assim, a partir de (18), a constante de decaimento para esse elemento é

$$k = \frac{1}{T}\ln 2 = \frac{\ln 2}{5.730} \approx 0{,}000121$$

e isso implica que, se houver $y_0$ unidades de carbono-14 presente no instante $t = 0$, então o número de unidades presentes depois de $t$ anos será de aproximadamente

$$y(t) = y_0e^{-0{,}000121t} \tag{19}$$

**▶ Exemplo 6** Se 100 gramas de carbono-14 radioativo forem armazenados em uma caverna por 1.000 anos, quantos gramas restarão no final desse período?

***Solução*** A partir de (19) com $y_0 = 100$ e $t = 1.000$, obtemos

$$y(1.000) = 100e^{-0{,}000121(1.000)} = 100e^{-0{,}121} \approx 88{,}6$$

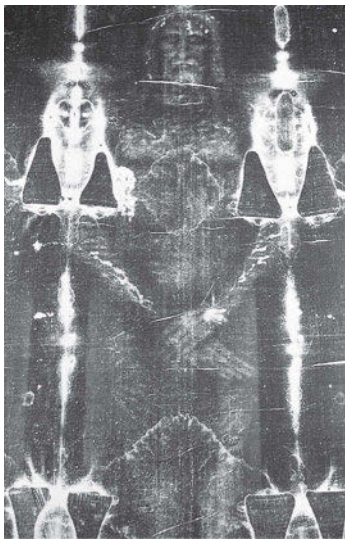
Assim, restarão cerca de 88,6 gramas. ◀

## ■ DATAÇÃO POR CARBONO

Quando o nitrogênio na parte superior da atmosfera da Terra é bombardeado pelos raios cósmicos, produz-se o elemento carbono-14 radioativo. O carbono-14 combina-se com o oxigênio para formar o dióxido de carbono, o qual é ingerido pelas plantas, que por sua vez, são comidas pelos animais. Dessa maneira, todas as plantas e os animais vivos absorvem quantidades de carbono-14 radioativo. Em 1947, o cientista nuclear americano W. F. Libby* propôs

* W. F. Libby, "Radiocarbon Dating", *American Scientist*, vol. 44, 1956, pp. 98-112.

a teoria de que a porcentagem de carbono-14 na atmosfera e em tecidos vivos de plantas é a mesma. Quando uma planta ou um animal morre, o carbono-14 no tecido começa a decair. Assim, a idade de um artefato que contenha material animal ou vegetal pode ser estimada determinando qual a porcentagem que resta do seu conteúdo de carbono-14 original. Vários procedimentos, chamados de ***datação por carbono*** ou ***datação por radiocarbono***, foram desenvolvidos para medir essa porcentagem.



Patrick Mesner/Liaison Agency, Inc./Getty Images
*O Sudário de Turim.*

**► Exemplo 7** Em 1988, o Vaticano autorizou o Museu Britânico a datar a relíquia de pano conhecida como o Sudário de Turim, possivelmente o sudário de Jesus de Nazaré. Esse pano, que apareceu em 1356, contém o negativo da imagem de um corpo humano que se acreditava no mundo inteiro ser o de Jesus. O relatório do Museu Britânico mostrou que as fibras no pano continham entre 92 e 93% do carbono-14 original. Use esta informação para estimar a idade do sudário.

***Solução*** A partir de (19), a fração de carbono-14 original que permanece após $t$ anos é

$$\frac{y(t)}{y_0} = e^{-0{,}000121t}$$

Tomando-se o logaritmo natural em ambos os membros e resolvendo-se para $t$, obtemos

$$t = -\frac{1}{0{,}000121} \ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right)$$

Assim, tomando-se $y(t)/y_0$ como sendo 0,93 e 0,92, obtemos

$$t = -\frac{1}{0{,}000121} \ln(0{,}93) \approx 600$$

$$t = -\frac{1}{0{,}000121} \ln(0{,}92) \approx 689$$

Isso significa que, em 1988, quando o teste foi feito, a idade do sudário estava entre 600 e 689 anos, colocando desta forma a sua origem entre 1299 e 1388 d.C. Portanto, aceitando-se a validade de datar por carbono-14, o sudário de Turim não pode ser de Jesus de Nazaré. ◄

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.2 (Ver página 579 para respostas.)

**1.** Resolva a equação diferencial separável de primeira ordem

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

completando os passos a seguir.

**Passo 1** Separe as variáveis escrevendo a equação na forma diferencial _____.

**Passo 2** Integre ambos os lados da equação do Passo 1: _____.

**Passo 3** Se $H(y)$ for uma antiderivada qualquer de $h(y)$, $G(x)$ for uma antiderivada qualquer de $g(x)$ e $C$ for uma constante não especificada, então, conforme sugerido no Passo 2, a equação _____ em geral definirá implicitamente uma família de soluções de $h(y)\,dy/dx = g(x)$.

**2.** Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ tenha um modelo de crescimento exponencial com constante de crescimento $k > 0$.
(a) $y(t)$ satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem do tipo $dy/dt =$ _____.
(b) Em termos de $k$, o tempo de duplicação da quantidade $y$ é _____.
(c) Se $y_0 = y(0)$ é a quantidade inicial de $y$, então uma fórmula explícita para $y(t)$ é dada por $y(t) =$ _____.

**3.** Suponha que uma quantidade $y = y(t)$ tenha um modelo de decaimento exponencial com constante de decaimento $k > 0$.
(a) $y(t)$ satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem do tipo $dy/dt =$ _____.
(b) Em termos de $k$, a meia vida da quantidade $y$ é _____.
(c) Se $y_0 = y(0)$ é a quantidade inicial de $y$, então uma fórmula explícita para $y(t)$ é dada por $y(t) =$ _____.

**4.** O problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1$$

tem solução $y(x) =$ _____.

## EXERCÍCIOS 8.2 Recurso Gráfico C CAS

**1-10** Resolva a equação diferencial por separação de variáveis. Quando for razoável, expresse a família de soluções como funções explícitas de $x$. ■

**1.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

**2.** $\dfrac{dy}{dx} = 2(1 + y^2)x$

**3.** $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+y}\dfrac{dy}{dx} = -x$

**4.** $(1 + x^4)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{y}$

**5.** $(2 + 2y^2)y' = e^x y$

**6.** $y' = -xy$

**7.** $e^{-y} \operatorname{sen} x - y' \cos^2 x = 0$

**8.** $y' - (1 + x)(1 + y^2) = 0$

**9.** $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y^2 - y}{\operatorname{sen} x} = 0$

**10.** $y - \dfrac{dy}{dx}\sec x = 0$

**11-14** Resolva o problema de valor inicial por separação de variáveis ■

**11.** $y' = \dfrac{3x^2}{2y + \cos y}, \quad y(0) = \pi$

**12.** $y' - xe^y = 2e^y, \quad y(0) = 0$

**13.** $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t + 1}{2y - 2}, \quad y(0) = -1$

**14.** $y' \cosh^2 x - y \cosh 2x = 0, \quad y(0) = 3$

**15.** (a) Esboce algumas curvas integrais típicas da equação diferencial $y' = y/2x$.
(b) Determine uma equação da curva integral que passe pelo ponto (2, 1).

**16.** (a) Esboce algumas curvas integrais típicas da equação diferencial $y' = -x/y$.
(b) Determine uma equação da curva integral que passe pelo ponto (3, 4).

**17-18** Resolva a equação diferencial e, então, use um recurso computacional para gerar cinco curvas integrais para a equação. ■

**17.** $(x^2 + 4)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

**18.** $(\cos y)y' = \cos x$

**19-20** Resolva a equação diferencial e então utilize um recurso gráfico computacional para gerar cinco curvas integrais da equação. ■

**19.** $y' = \dfrac{x^2}{1 - y^2}$

**20.** $y' = \dfrac{y}{1 + y^2}$

**21-24 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**21.** Toda equação diferencial da forma $y' = f(y)$ é separável.

**22.** Uma equação diferencial da forma

$$h(x)\frac{dy}{dx} = g(y)$$

não é separável.

**23.** Se um elemento radioativo tiver uma meia vida de 1 minuto e se um recipiente contiver 32 g desse elemento às 13 horas, então a quantidade que restará às 13h05 será de 1 g.

**24.** Se uma população estiver crescendo exponencialmente, então o tempo que leva para essa população quadruplicar é independente do tamanho da população.

**25.** Suponha que a condição inicial no Exemplo 1 tivesse sido $y(0) = 0$. Mostre que nenhuma das soluções geradas no Exemplo 1 satisfaz essa condição inicial e então resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2, \quad y(0) = 0$$

Por que o método do Exemplo 1 deixa de fornecer essa solução particular?

**26.** Encontre todos os pares ordenados $(x_0, y_0)$ tais que se a condição inicial no Exemplo 1 for trocada por $y(x_0) = y_0$, então a solução do problema de valor inicial resultante estará definida em todos os números reais.

**27.** Encontre uma equação de uma curva que corte o eixo $x$ no ponto 2 e cuja reta tangente em qualquer ponto $(x, y)$ tenha inclinação $xe^{-y}$.

**28.** Use um recurso gráfico computacional para gerar uma curva que passe pelo ponto (1, 1) e cuja reta tangente em $(x, y)$ seja perpendicular à reta por $(x, y)$ com inclinação $-2y/(3x^2)$.

**29.** Suponha que uma população inicial de 10.000 bactérias cresça exponencialmente a uma taxa de 2% por hora e que $y = y(t)$ seja o número de bactérias presentes $t$ horas mais tarde.
(a) Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
(b) Encontre uma fórmula para $y(t)$.
(c) Quanto tempo leva para a população inicial de bactérias dobrar?
(d) Quanto tempo leva para a população de bactérias atingir 45.000?

**30.** Uma célula da bactéria *E.colli* divide-se em duas células a cada 20 minutos quando colocada em cultura de nutrientes. Seja $y = y(t)$ o número de células presentes $t$ minutos após uma única célula ter sido colocada na cultura. Suponha que o crescimento da bactéria seja aproximado por um modelo de crescimento exponencial contínuo.
(a) Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
(b) Encontre uma fórmula para $y(t)$.

(c) Quantas células estão presentes após 2 horas?
(d) Quanto tempo leva para o número de células atingir 1.000.000?

**31.** O rádon-222 é um gás radioativo com uma meia vida de 3,83 dias. Esse gás é prejudicial à saúde porque tende a ficar preso nos porões das casas, e o Ministério da Saúde sugere que se fechem os porões para evitar a entrada do gás. Suponha que $5{,}0 \times 10^7$ átomos de rádon fiquem presos em um porão no momento em que ele é selado e que $y(t)$ seja o número de átomos presentes $t$ dias mais tarde.
(a) Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
(b) Encontre uma fórmula para $y(t)$.
(c) Quantos átomos estarão presentes após 30 dias?
(d) Quanto tempo levará para decair 90% da quantidade original do gás?

**32.** O polônio-210 é um elemento radioativo com uma meia vida de 140 dias. Suponha que 10 miligramas do elemento sejam colocados em um recipiente de chumbo e que $y(t)$ seja o número de miligramas presentes $t$ dias mais tarde.
(a) Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
(b) Encontre uma fórmula para $y(t)$.
(c) Quantos miligramas estarão presentes após 10 semanas?
(d) Quanto tempo levará para decair 70% da quantidade inicial?

**33.** Suponha que 100 moscas-das-frutas sejam colocadas em um recipiente de acasalamento que possa suportar, no máximo, 10.000 moscas. Supondo que a população cresça exponencialmente a uma taxa de 2% por dia, quanto tempo levará para o recipiente atingir a sua capacidade?

**34.** Suponha que a cidade de Gray Rock tenha tido uma população de 10.000 em 2006 e de 12.000 em 2011. Supondo que o modelo de crescimento seja exponencial, em que ano a população atingirá 20.000?

**35.** Uma cientista deseja determinar a meia vida de certa substância radioativa. Ela determina que em exatamente 5 dias uma amostra de 10,0 miligramas da substância decai para 3,5 miligramas. Baseado nesses dados, qual será a meia vida?

**36.** Suponha que 30% de certa substância radioativa decaiam em 5 anos.
(a) Qual é a meia vida da substância em anos?
(b) Suponha que uma certa quantidade dessa substância seja estocada em uma caverna. Qual é a porcentagem remanescente após $t$ anos?

## ENFOCANDO CONCEITOS

**37.** (a) Faça uma conjectura sobre o efeito nos gráficos de $y = y_0e^{kt}$ e $y = y_0e^{-kt}$ de variar $k$ e manter $y_0$ fixo. Confirme a sua conjectura com um recurso gráfico computacional.
(b) Faça uma conjectura sobre os efeitos nos gráficos de $y = y_0e^{kt}$ e $y = y_0e^{-kt}$ de variar $y_0$ e manter $k$ fixo. Confirme a sua conjectura com um recurso gráfico computacional.

**38.** (a) Qual será o efeito sobre o tempo de duplicação e a meia vida de um modelo exponencial de aumentar $y_0$ e manter $k$ fixo? Justifique a sua resposta.
(b) Qual será o efeito sobre o tempo de duplicação e a meia vida de um modelo exponencial de aumentar $k$ e manter $y_0$ fixo? Justifique a sua resposta.

**39.** (a) Há um truque, chamado de ***Regra dos 70***, que pode ser usado para obter estimativas rápidas do tempo de duplicação e meia vida de um modelo exponencial. De acordo com essa regra, o tempo de duplicação ou meia vida é aproximadamente 70 dividido pela porcentagem da taxa percentual de crescimento ou de decaimento. Por exemplo, mostramos no Exemplo 5 que, com uma taxa de crescimento contínua de 1,10% ao ano, a população mundial dobraria a cada 63 anos. Esse resultado está de acordo com a Regra dos 70, uma vez que $70/1{,}10 \approx 63{,}6$. Explique por que essa regra funciona.
(b) Use a Regra dos 70 para estimar o tempo de duplicação de uma população que cresce exponencialmente a uma taxa de 1% ao ano.
(c) Use a Regra dos 70 para estimar a meia vida de uma população que decresce exponencialmente a uma taxa de 3,5% por hora.
(d) Use a Regra dos 70 para estimar a taxa de crescimento que seria requerida para uma população crescendo exponencialmente dobrar a cada 10 anos.

**40.** Determine uma fórmula para o tempo de triplicação de um modelo de crescimento exponencial.

**41.** Em 1950, uma equipe de pesquisa escavando próximo de Folsom, Novo México, encontrou ossos de bisão chamuscados junto a algumas pontas de projéteis em forma de folha (chamados de "pontas de Folsom"), que foram manufaturadas por uma tribo de caçadores palio-indígena. Ficou claro, pela evidência encontrada, que o bisão havia sido cozinhado e comido por quem fez as pontas, de modo que a datação por radiocarbono possibilitou aos pesquisadores determinar quando os caçadores vagaram pela América do Norte. Os testes mostraram que os ossos continham entre 27 e 30% do carbono-14 original. Use esta informação para mostrar que os caçadores viveram aproximadamente entre 9000 e 8000 a.C.

**42.** (a) Use um recurso computacional para fazer um gráfico de $p_{\text{rem}}$ *versus* $t$, onde $p_{\text{rem}}$ é a porcentagem de carbono-14 remanescente em um artefato após $t$ anos.
(b) Use o gráfico para estimar a porcentagem de carbono-14 que deveria estar presente no teste de 1988 do Sudário de Turim para que ele tivesse sido de Jesus. (Ver Exemplo 7.)

**43.** (a) Aceita-se correntemente que a meia vida do carbono-14 pode variar $\pm 40$ anos de seu valor nominal de 5.730 anos. Essa variação torna possível datar o Sudário de Turim como sendo do tempo de Jesus de Nazaré? (Ver Exemplo 7.)
(b) Reveja a subseção da Seção 3.5 intitulada Propagação de Erros em Aplicações e então estime o erro percentual que resulta na idade computada de um artefato a partir de $r$ % de erro na meia vida do carbono-14.

**44.** Suponha que uma quantidade $y$ tenha um modelo de crescimento exponencial $y = y_0e^{kt}$ ou de decaimento exponencial $y = y_0e^{-kt}$ e que $y = y_1$ em $t = t_1$. Em cada caso, determine uma fórmula para $k$ em termos de $y_0$, $y_1$ e $t_1$, supondo que $t_1 \neq 0$.

**45.** (a) Mostre que se uma quantidade $y = y(t)$ tiver um modelo exponencial e se $y(t_1) = y_1$ e $y(t_2) = y_2$, então o tempo de duplicação ou a meia vida $T$ será

$$T = \left| \frac{(t_2 - t_1)\ln 2}{\ln(y_2/y_1)} \right|$$

(b) Durante um período de 1 hora o número de bactérias em uma colônia cresce 25%. Supondo um modelo de crescimento exponencial, qual é o tempo de duplicação para a colônia?

**46.** Suponha que $P$ dólares tenham sido investidos a uma taxa de juros anuais de $r \times 100\%$. Se os juros acumulados forem creditados na conta ao final do ano, então dizemos que eles são *compostos anualmente*; se forem creditados no final de um período de 6 meses, dizemos que são *compostos semestralmente*; se forem creditados ao final de cada período de 3 meses, dizemos que são *compostos trimestralmente*. Quanto mais frequentemente os juros forem compostos, melhor é para o investidor, uma vez que mais juros rendem juros sobre si mesmo.

(a) Mostre que se os juros forem compostos $n$ vezes ao ano em intervalos igualmente espaçados, então o valor $A$ do investimento após $t$ anos será

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

(b) É possível imaginar juros sendo compostos a cada dia, a cada hora, a cada minuto e assim por diante; levado ao limite, é possível conceber juros compostos a cada instante de tempo; isto é chamado de ***composição contínua***. Assim, pela parte (a), o valor $A$ de $P$ dólares após $t$ anos, quando investidos a uma taxa anual de $r \times 100\%$, compostos continuamente, será

$$A = \lim_{n \to +\infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Use o fato de que $\lim_{x \to 0}(1 + x)^{1/x} = e$ para provar que $A = Pe^{rt}$.

(c) Use o resultado da parte (b) para mostrar que dinheiro investido a juros compostos contínuos cresce continuamente a uma taxa proporcional à quantidade presente.

**47.** (a) Se \$1.000 forem investidos a 8% ao ano compostos continuamente (Exercício 46), qual será o valor do investimento após 5 anos?

(b) Se for desejado que um investimento a 8% ao ano composto continuamente deva ter um valor de \$10.000 após 10 anos, quanto deve ser investido agora?

(c) Quanto tempo leva para que um investimento a 8% ao ano composto continuamente dobre seu valor?

**48.** Qual é a taxa de juros efetiva de uma taxa de juros anual de $r\%$ composta continuamente?

**49.** Suponha que $y = y(t)$ satisfaça a equação logística com o valor inicial $y_0 = y(0)$ de $y$.

(a) Use separação de variáveis para deduzir a solução

$$y = \frac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$$

(b) Use a parte (a) para mostrar que $\lim_{t \to +\infty} y(t) = L$.

**50.** Use sua resposta do Exercício 49 para deduzir uma solução para o modelo da disseminação de uma doença [Equação (6) da Seção 8.1].

**51.** O gráfico de uma solução da equação logística é conhecido como uma ***curva logística*** e, se $y_0 > 0$, ela tem um de quatro formatos gerais, que dependem da relação entre $y_0$ e $L$. Em cada parte, suponha que $k = 1$ e use um recurso computacional para esboçar a curva logística que satisfaz as condições dadas.

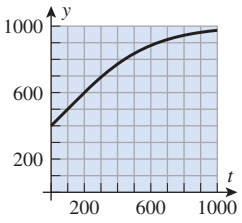
(a) $y_0 > L$ (b) $y_0 = L$
(c) $L/2 \leq y_0 < L$ (d) $0 < y_0 < L/2$

**52-53** É mostrado o gráfico de um modelo logístico

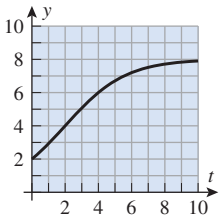
$$y = \frac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{-kt}}$$

Estime $y_0$, $L$ e $k$.

**52.**




**53.**




**54.** Esboce uma solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}98\left(1 - \frac{y}{5}\right)y, \quad y_0 = 1$$

**55.** Suponha que o crescimento de uma população $y = y(t)$ seja dado pela equação logística

$$y = \frac{60}{5 + 7e^{-t}}$$

(a) Qual é a população no instante $t = 0$?
(b) Qual é a capacidade de tolerância $L$?
(c) Qual é a constante $k$?
(d) Quando a população atinge a metade da capacidade de tolerância?
(e) Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.

**56.** Suponha que o crescimento de uma população $y = y(t)$ seja dado pela equação logística

$$y = \frac{1000}{1 + 999e^{-0{,}9t}}$$

(a) Qual é a população no instante $t = 0$?
(b) Qual é a capacidade de tolerância $L$?

(c) Qual é a constante $k$?
(d) Quando a população atinge 75% da capacidade de tolerância?
(e) Determine um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.

**57.** Suponha que em um alojamento universitário existam 1.000 estudantes. Após as férias, 20 estudantes do alojamento retornam com gripe e, 5 dias mais tarde, 35 estudantes estão gripados.
(a) Use o resultado do Exercício 50 para encontrar o número de estudantes que estarão gripados $t$ dias após o retorno das férias.
(b) Faça uma tabela que ilustre como se espalha a gripe dia a dia por um período de duas semanas.
(c) Use um recurso computacional para gerar um gráfico que ilustre como se espalha a gripe por um período de duas semanas.

**58.** Suponha que, no instante $t = 0$, um objeto com uma temperatura de $T_0$ é colocado em uma sala a uma temperatura constante de $T_a$. Se $T_0 < T_a$, então a temperatura do objeto irá subir, enquanto que se $T_0 > T_a$ ela irá baixar. Supondo que a Lei do Resfriamento de Newton se aplique, mostre que em ambos os casos a temperatura $T(t)$ no instante $t$ é dada por

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

onde $k$ é uma constante positiva.

**59.** Um copo de água a uma temperatura de 95°C é colocado em uma sala com uma temperatura constante de 21°C.
(a) Supondo que a Lei do Resfriamento de Newton se aplique, encontre a temperatura da água $t$ minutos após ser colocada na sala. [*Nota*: A solução irá envolver uma constante de proporcionalidade.]
(b) Quantos minutos levará para a água atingir uma temperatura de 51°C se ela esfria a 85°C em 1 minuto?

**60.** Um copo de limonada a uma temperatura de 40°F é colocado em uma sala a uma temperatura constante de 70°F e, 1 hora mais tarde, a sua temperatura é de 52°F. Mostre que $t$ horas após a limonada ter sido colocada na sala, sua temperatura é dada por $T = 70 - 30e^{-0,5t}$.

**61.** Um foguete, disparado verticalmente para cima a partir do repouso no instante $t = 0$, tem uma massa inicial de $m_0$ (incluindo o combustível). Supondo que o combustível seja consumido a uma taxa constante $k$, a massa $m$ do foguete, enquanto o combustível estiver sendo queimado, será dada por $m = m_0 - kt$. Pode ser mostrado que, se a resistência do ar for desprezada e os gases do combustível forem expelidos a uma velocidade constante $c$ em relação ao foguete, a velocidade $v$ do foguete irá satisfazer a equação

$$m\frac{dv}{dt} = ck - mg$$

onde $g$ é a aceleração da gravidade.
(a) Determine $v(t)$, lembrando que a massa $m$ é uma função de $t$.
(b) Suponha que o combustível seja responsável por 80% da massa inicial do foguete e que todo o combustível seja consumido em 100 segundos. Determine a velocidade do foguete em metros por segundo no instante em que acabar o combustível. [Tome $g = 9,8$ m/s$^2$ e $c = 2.500$ m/s.]

**62.** Uma bala de massa $m$ é disparada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de $v_0$, e torna-se mais lenta pela força de gravidade e uma força de resistência do ar de $kv^2$, onde $k$ é uma constante positiva. Enquanto a bala move-se para cima, a sua velocidade $v$ satisfaz a equação

$$m\frac{dv}{dt} = -(kv^2 + mg)$$

onde $g$ é a aceleração constante em razão da gravidade
(a) Mostre que se $x = x(t)$ for a altura da bala acima da boca da arma no instante $t$, então

$$mv\frac{dv}{dx} = -(kv^2 + mg)$$

(b) Expresse $x$ em termos de $v$ dado que $x = 0$ quando $v = v_0$.
(c) Supondo que

$$v_0 = 988 \text{ m/s}, \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2$$
$$m = 3,56 \times 10^{-3} \text{ kg}, \quad k = 7,3 \times 10^{-6} \text{ kg/m}$$

use o resultado na parte (b) para encontrar a altura atingida pela bala. [*Sugestão*: Determine a velocidade da bala em seu ponto mais alto.]

**63-64** Suponha que um tanque contendo um líquido tenha uma abertura para o ar no topo e uma saída na base, através da qual o líquido pode ser drenado. Tem-se da ***lei de Torricelli*** da Física que se a saída for aberta no instante $t = 0$, então a cada instante a profundidade $h(t)$ do líquido e a área $A(h)$ da superfície do líquido estão relacionadas por

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

onde $k$ é uma constante positiva que depende de fatores como a viscosidade do líquido e a área da seção transversal da saída. Use esse resultado nestes exercícios, supondo que $h$ seja dado em pés, $A(h)$ em pés quadrados e $t$ em segundos. ■

**63.** Suponha que o tanque cilíndrico na figura abaixo esteja cheio até uma profundidade de 4 pés no instante $t = 0$ e que a constante na lei de Torricelli seja $k = 0,025$.
(a) Encontre $h(t)$.
(b) Quantos minutos irá levar para esvaziar completamente o tanque?

**64.** Siga as orientações do Exercício 63 para o tanque cilíndrico na figura abaixo, supondo que o tanque esteja cheio até uma profundidade de 4 pés em $t = 0$ e que a constante na lei de Torricelli seja $k = 0,025$.

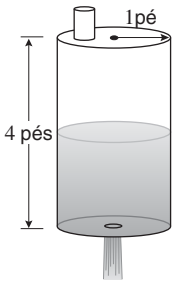


Figura Ex-63

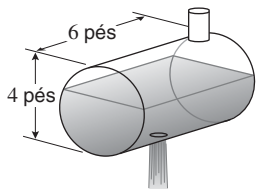


Figura Ex-64

**65.** Suponha que uma partícula movendo-se ao longo do eixo $x$ encontre uma força resistente que imprime uma aceleração de $a = dv/dt = -\frac{1}{32}v^2$. Dado que $x = 0$ cm e $v = 128$ cm/s em $t = 0$, encontre a velocidade $v$ e a posição $x$ como uma função de $t$ com $t \geq 0$.

**66.** Suponha que uma partícula movendo-se ao longo do eixo $x$ encontre uma força resistente que imprime uma aceleração de $a = dv/dt = -0{,}02\sqrt{v}$. Dado que $x = 0$ cm e $v = 9$ cm/s em $t = 0$, determine a velocidade $v$ e a posição $x$ como uma função de $t$ com $t \geq 0$.

**ENFOCANDO CONCEITOS**

**67.** Use derivação implícita para provar que qualquer função diferenciável definida implicitamente pela Equação (4) é uma solução de (1).

**68.** Prove que uma solução do problema de valor inicial

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

é definida implicitamente pela equação

$$\int_{y_0}^{y} h(r)\,dr = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$$

**69.** Sejam $L$ um reta tangente em $(x, y)$ à solução da Equação (1) e $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ dois pontos quaisquer de $L$. Prove que a Equação (2) é satisfeita por $dy = \Delta y = y_2 - y_1$ e $dx = \Delta x = x_2 - x_1$.

**70.** **Texto** Um estudante tem problemas com o método de separação de variáveis porque muitas vezes esse método fornece uma equação em $x$ e $y$ em vez de uma função explícita $y = f(x)$. Discuta os pontos a favor e contra a opinião desse estudante.

**71.** **Texto** Um estudante tem problemas com o Passo 2 do método de separação de variáveis porque um lado da equação é integrado em relação a $x$, ao passo que o outro é integrado em relação a $y$. Responda à objeção desse estudante. [*Sugestão*: Lembre-se do método de integração por substituição.]

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.2

**1.** Passo 1: $h(y)\,dy = g(x)\,dx$; Passo 2: $\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$; Passo 3: $H(y) = G(x) + C$ **2.** (a) $ky$ (b) $\dfrac{\ln 2}{k}$ (c) $y_0e^{kt}$

**3.** (a) $-ky$ (b) $\dfrac{\ln 2}{k}$ (c) $y_0e^{-kt}$ **4.** $y = \sqrt{1 - x^2}$

# 8.3 CAMPOS DE DIREÇÕES; MÉTODO DE EULER

*Nesta seção, reexaminaremos o conceito de campos de direções e discutiremos um método para aproximar numericamente as soluções de equações de primeira ordem. As aproximações numéricas são importantes nos casos em que a equação diferencial não pode ser resolvida exatamente.*

## FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Aqui, estaremos interessados em equações de primeira ordem que são expressas com uma derivada sozinha de um lado da equação. Por exemplo,

$$y' = x^3 \quad \text{e} \quad y' = \operatorname{sen}(xy)$$

A primeira dessas equações envolve somente $x$ no lado direito, logo tem a forma $y' = f(x)$. No entanto, a segunda equação envolve $x$ e $y$ no lado direito, logo tem a forma $y' = f(x, y)$, onde o símbolo $f(x, y)$ representa uma função das duas variáveis $x$ e $y$. Mais adiante no livro, estudaremos com maior profundidade funções de duas variáveis, mas por ora basta pensar em $f(x, y)$ como uma fórmula que produz uma única saída quando forem dados como entradas valores de $x$ e $y$. Por exemplo, se

$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

Em problemas aplicados envolvendo o tempo, é comum usar $t$ como a variável independente, caso em que estaremos interessados em equações da forma $y' = f(t, y)$, onde $y' = dy/dt$.

se as entradas forem $x = 2$ e $y = -4$, então a saída é

$$f(2, -4) = 2^2 + 3(-4) = 4 - 12 = -8$$

## CAMPOS DE DIREÇÕES

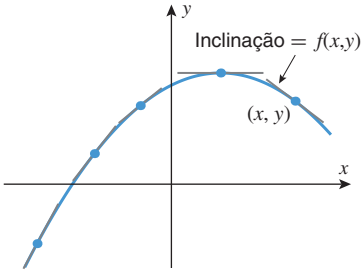
Na Seção 5.2, introduzimos o conceito de um campo de direções no contexto das equações diferenciais da forma $y' = f(x)$; os mesmos princípios aplicam-se a equações diferenciais da forma

$$y' = f(x, y)$$

Para ver isso, vamos revisar a ideia básica. Se interpretarmos $y'$ como a inclinação da reta tangente, então a equação diferencial afirma que, em cada ponto $(x, y)$ sobre uma curva integral, a inclinação da reta tangente é igual ao valor de $f$ naquele ponto (Figura 8.3.1). Por exemplo, suponha que $f(x, y) = y - x$, caso em que temos a equação diferencial

$$y' = y - x \tag{1}$$

Uma descrição geométrica do conjunto de curvas integrais pode ser obtida escolhendo-se uma malha retangular de pontos no plano $x\,y$, calculando-se as inclinações das retas tangentes às curvas integrais nos pontos da malha e desenhando pequenos segmentos das retas tangentes naqueles pontos. A figura resultante é chamada de ***campo de direções*** ou ***campo de inclinações*** para a equação diferencial, porque mostra a "direção" ou a "inclinação" das curvas integrais nos pontos da malha. Quanto mais pontos forem usados na malha, melhor será a descrição das curvas integrais. Por exemplo, a Figura 8.3.2 mostra dois campos de direções para (1) – o primeiro foi obtido à mão usando uma malha de 49 pontos mostrado na tabela em anexo; o segundo, que dá uma imagem mais clara das curvas integrais, foi obtido usando uma malha de 625 pontos e um CAS.




Em cada ponto $(x, y)$ de uma curva integral $y' = f(x, y)$, a reta tangente tem inclinação $f(x, y)$.

**Figura 8.3.1**

VALORES DE $f(x, y) = y - x$

| | $y=-3$ | $y=-2$ | $y=-1$ | $y=0$ | $y=1$ | $y=2$ | $y=3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=-3$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $x=-2$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $x=-1$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $x=0$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $x=1$ | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
| $x=2$ | −5 | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 |
| $x=3$ | −6 | −5 | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 |

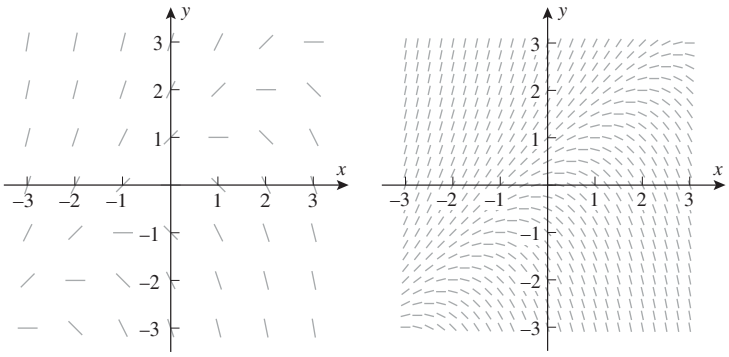



**Figura 8.3.2**

Acontece que a Equação (1) pode ser resolvida exatamente usando um método que introduziremos na Seção 8.4. Deixamos a cargo do leitor mostrar que a solução geral dessa equação é

$$y = x + 1 + Ce^x \tag{2}$$

A Figura 8.3.3 mostra algumas curvas integrais sobrepostas ao campo de direções. Observe, porém, que não é necessário ter a solução geral para construir o campo de direções. Na realidade, os campos de direções são importantes principalmente porque podem ser construídos nos casos em que a equação diferencial não pode ser resolvida exatamente.

Confirme que o primeiro campo de direções na Figura 8.3.2 está de acordo com os valores apresentados na tabela acima.

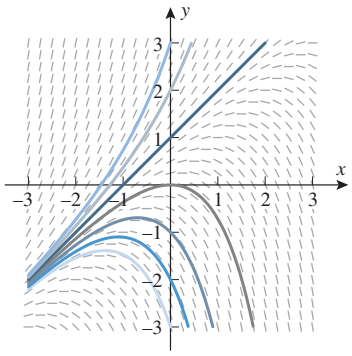



**Figura 8.3.3**

## MÉTODO DE EULER

Considere um problema de valor inicial da forma

$$y' - f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

O campo de direções da equação diferencial $y' = f(x, y)$ fornece uma maneira de visualizar a solução do problema de valor inicial, pois o gráfico da solução é a curva integral que passa pelo ponto $(x_0, y_0)$. O campo de direções também ajuda a desenvolver um método para aproximar numericamente a solução do problema de valor inicial, como segue.

Não vamos tentar aproximar $y(x)$ para todos os valores de $x$; em vez disto, vamos escolher um pequeno incremento $\Delta x$ e focalizar na aproximação dos valores de $y(x)$ numa sucessão de valores de $x$ distantes $\Delta x$ unidades um do outro, começando em $x_0$. Vamos denotar esses valores de $x$ por

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \quad x_3 = x_2 + \Delta x, \quad x_4 = x_3 + \Delta x, \ldots$$

e denotaremos as aproximações de $y(x)$ nesses pontos por

$$y_1 \approx y(x_1), \quad y_2 \approx y(x_2), \quad y_3 \approx y(x_3), \quad y_4 \approx y(x_4), \ldots$$

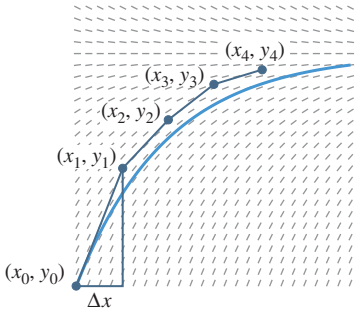



**Figura 8.3.4**

A técnica que iremos descrever para obter estas aproximações é chamada de ***método de Euler***. Embora haja melhores métodos de aproximação disponíveis, muitos deles usam o método de Euler como ponto de partida, de modo que é importante entender os conceitos subjacentes.

A ideia básica do método de Euler é começar no ponto inicial conhecido $(x_0, y_0)$ e traçar um segmento de reta na direção determinada pelo campo de direções até atingir o ponto $(x_1, y_1)$ com coordenada $x$ igual a $x_1 = x_0 + \Delta x$ (Figura 8.3.4). Se $\Delta x$ for pequeno, então é razoável esperar que esse segmento de reta não desviará muito da curva integral $y = y(x)$ e, assim, $y_1$ deverá aproximar muito bem $y(x_1)$. Para obter as aproximações subsequentes, repetimos o processo usando o campo de direções como um guia a cada passo. Começando no extremo $(x_1, y_1)$, traçamos um segmento de reta determinado pelo campo de direções até atingirmos o ponto $(x_2, y_2)$, com coordenada $x$ igual a $x_2 = x_1 + \Delta x$, e desse ponto traçamos um segmento de reta determinado pelo campo de direções até o ponto $(x_3, y_3)$, com coordenada $x$ igual a $x_3 = x_2 + \Delta x$, e assim por diante. Conforme indicado na Figura 8.3.4, isso produz uma linha poligonal que tende a seguir de perto a curva integral. Portanto, é razoável esperar que os valores $y, y_2, y_3, y_4$,... aproximem muito bem $y(x_2)$, $y(x_3)$, $y(x_4)$,....

Para explicar como podem ser calculadas as aproximações $y_1, y_2, y_3$,...,vamos focalizar um segmento de reta típico. Conforme indicado na Figura 8.3.5, suponha que tenhamos encontrado o ponto $(x_n, y_n)$ e que queiramos determinar o próximo ponto $(x_{n+1}, y_{n+1})$, onde $x_{n+1} = x_n + \Delta x$. Como a inclinação do segmento de reta ligando esses pontos é determinada pelo campo de direções no ponto inicial, a inclinação é $f(x_n, y_n)$, e portanto

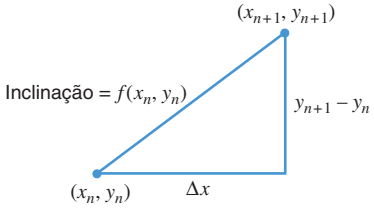



**Figura 8.3.5**

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = f(x_n, y_n)$$

a qual podemos reescrever como

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x$$

Essa fórmula, que é o ponto central do método de Euler, aponta como usar cada aproximação para calcular a próxima.

***Método de Euler***
Para aproximar a solução do problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

procedemos como segue:

**Passo 1** Escolha um número $\Delta x$ diferente de zero para servir como um ***incremento*** ou ***tamanho de passo*** ao longo do eixo $x$, e sejam

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \quad x_3 = x_2 + \Delta x, \ldots$$

**Passo 2** Calcule sucessivamente

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x \\ y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\Delta x \\ &\vdots \\ y_{n+1} &= y_n + f(x_n, y_n)\Delta x \end{aligned}$$

Os números $y_1$, $y_2$, $y_3$,... nessas equações são aproximações de $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y(x_3)$,....

**▶ Exemplo 1** Use o método de Euler com o tamanho de passo 0,1 para fazer uma tabela de valores aproximados da solução do problema de valor inicial

$$y' = y - x, \quad y(0) = 2 \tag{3}$$

no intervalo $0 \le x \le 1$.

***Solução*** Neste problema, temos que $f(x, y) = y - x$, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$. Além disso, uma vez que o tamanho de passo é 0,1, os valores de $x$ nos quais os valores aproximados serão obtidos são

$$x_1 = 0{,}1, \quad x_2 = 0{,}2, \quad x_3 = 0{,}3, \ldots, \quad x_9 = 0{,}9, \quad x_{10} = 1$$

As três primeiras aproximações são

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x = 2 + (2 - 0)(0{,}1) = 2{,}2 \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x = 2{,}2 + (2{,}2 - 0{,}1)(0{,}1) = 2{,}41 \\ y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\Delta x = 2{,}41 + (2{,}41 - 0{,}2)(0{,}1) = 2{,}631 \end{aligned}$$

Aqui está uma maneira de organizar as 10 aproximações arredondadas para 5 casas decimais:

MÉTODO DE EULER PARA $y' = y - x$, $y(0) = 2$ COM $\Delta x = 0{,}1$

| $n$ | $x_n$ | $y_n$ | $f(x_n, y_n)\Delta x$ | $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2,00000 | 0,20000 | 2,20000 |
| 1 | 0,1 | 2,20000 | 0,21000 | 2,41000 |
| 2 | 0,2 | 2,41000 | 0,22100 | 2,63100 |
| 3 | 0,3 | 2,63100 | 0,23310 | 2,86410 |
| 4 | 0,4 | 2,86410 | 0,24641 | 3,11051 |
| 5 | 0,5 | 3,11051 | 0,26105 | 3,37156 |
| 6 | 0,6 | 3,37156 | 0,27716 | 3,64872 |
| 7 | 0,7 | 3,64872 | 0,29487 | 3,94359 |
| 8 | 0,8 | 3,94359 | 0,31436 | 4,25795 |
| 9 | 0,9 | 4,25795 | 0,33579 | 4,59374 |
| 10 | 1,0 | 4,59374 | — | — |

Observe que cada entrada na última coluna torna-se a próxima entrada na terceira coluna. Isso é semelhante ao método de Newton, no qual cada aproximação sucessiva é usada para encontrar a seguinte. ◄

## PRECISÃO DO MÉTODO DE EULER

Como procedimento prático, o erro absoluto em uma aproximação produzida pelo método de Euler é aproximadamente proporcional ao tamanho de passo. Assim, reduzindo o tamanho de passo pela metade reduzem-se aproximadamente os erros absolutos e percentual pela metade. Porém, reduzindo-se o tamanho de passo também se aumenta a quantidade de computação, aumentando, desse modo, o potencial para mais erros de arrendondamento. Deixaremos os detalhes do estudo da questão de erros para cursos de Equações Diferenciais ou de Análise Numérica.

Tem-se a partir de (3) e da condição inicial $y(0) = 2$ que a solução exata do problema de valor inicial no Exemplo 1 é

$$y = x + 1 + e^x$$

Assim, nesse caso, podemos comparar o valor aproximado de $y(x)$ produzido pelo método de Euler com a aproximação decimal dos valores exatos (Tabela 8.3.1). Na Tabela 8.3.1, o ***erro absoluto*** é calculado como

$$|\text{valor exato} - \text{aproximação}|$$

e o ***erro percentual*** como

$$\frac{|\text{valor exato} - \text{aproximação}|}{|\text{valor exato}|} \times 100\%$$

Observe que o erro absoluto tende a crescer quando $x$ se afasta de $x_0$.

**Tabela 8.3.1**

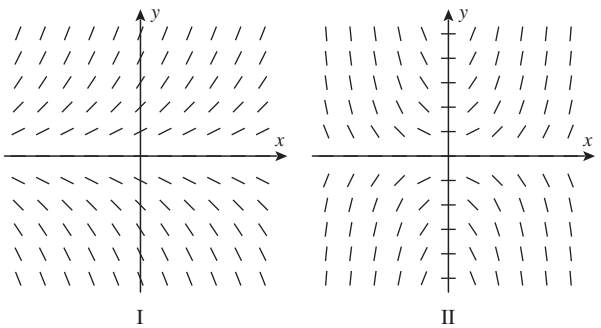
| $x$ | SOLUÇÃO EXATA | APROXIMAÇÃO DE EULER | ERRO ABSOLUTO | ERRO PERCENTUAL |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2,00000 | 2,00000 | 0,00000 | 0,00 |
| 0,1 | 2,20517 | 2,20000 | 0,00517 | 0,23 |
| 0,2 | 2,42140 | 2,41000 | 0,01140 | 0,47 |
| 0,3 | 2,64986 | 2,63100 | 0,01886 | 0,71 |
| 0,4 | 2,89182 | 2,86410 | 0,02772 | 0,96 |
| 0,5 | 3,14872 | 3,11051 | 0,03821 | 1,21 |
| 0,6 | 3,42212 | 3,37156 | 0,05056 | 1,48 |
| 0,7 | 3,71375 | 3,64872 | 0,06503 | 1,75 |
| 0,8 | 4,02554 | 3,94359 | 0,08195 | 2,04 |
| 0,9 | 4,35960 | 4,25795 | 0,10165 | 2,33 |
| 1,0 | 4,71828 | 4,59374 | 0,12454 | 2,64 |

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.3 (Ver página 586 para respostas.)

**1.** Associe cada equação diferencial com seu campo de direções.

(a) $y' = 2xy^2$ _____ (b) $y' = e^{-y}$ _____

(c) $y' = y$ _____ (d) $y' = 2xy$ _____



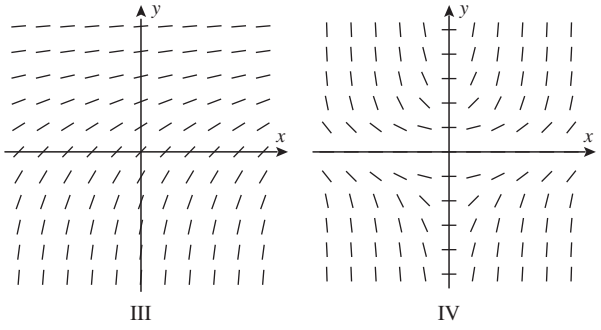




**Figura Ex-1**

**2.** Na figura a seguir é dado o campo de direções de $y' = y/x$ nos 16 pontos de malha $(x, y)$, em que $x = -2, -1, 1, 2$ e

$y = -2, -1, 1, 2$. Use esse campo de direções e um raciocínio geométrico para encontrar a curva integral que passa pelo ponto $(1, 2)$.

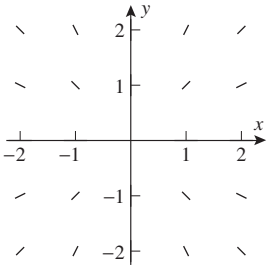



**Figura Ex-2**

**3.** Quando utilizamos o método de Euler no problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, obtemos $y_{n+1}$ a partir de $y_n$, $x_n$ e $\Delta x$ por meio da fórmula $y_{n+1} =$ _____.

**4.** Considere o problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$.
(a) Use o método de Euler com cinco passos para aproximar $y(1)$.
(b) Qual é o valor exato de $y(1)$?

## EXERCÍCIOS 8.3 Recurso Gráfico

**1.** Esboce o campo de direções para $y' = xy/4$ nos 25 pontos de malha $(x, y)$, dados por $x = -2, -1,..., 2$ e $y = -2, -1,..., 2$.

**2.** Esboce o campo de direções para $y' + y = 2$ nos 25 pontos de malha $(x, y)$, dados por $x = 0, 1,..., 4$ e $y = 0, 1,..., 4$.

**3.** Um campo de direções para a equação diferencial $y' = 1 - y$ está mostrado na figura em anexo. Em cada parte, esboce o gráfico da solução que satisfaz a condição inicial.
(a) $y(0) = -1$ (b) $y(0) = 1$ (c) $y(0) = 2$

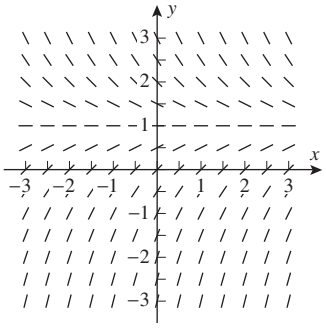



**Figura Ex-3**

**4.** Resolva o problema de valor inicial no Exercício 3 e use um recurso gráfico computacional para confirmar que as curvas integrais dessas soluções estão de acordo com os esboços obtidos a partir do campo de direções.

### ENFOCANDO CONCEITOS

**5.** Use o campo de direções no Exercício 3 para fazer uma conjectura sobre o comportamento das soluções de $y' = 1 - y$ quando $x \to +\infty$ e confirme sua conjectura examinando a solução geral da equação.

**6.** Em cada parte, associe a equação diferencial com o campo de direções e explique o seu raciocínio.
(a) $y' = 1/x$ (b) $y' = 1/y$
(c) $y' = e^{-x^2}$ (d) $y' = y^2 - 1$

(e) $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$ (f) $y' = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y)$

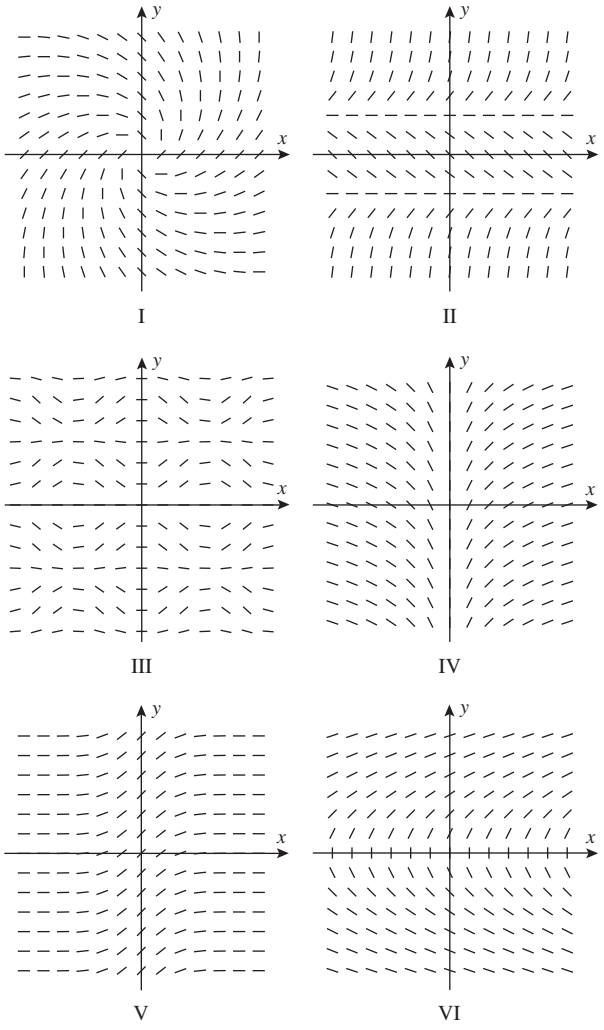



**Figura Ex-6**

**7-10** Use o método de Euler com tamanho de passo $\Delta x$ ou $\Delta t$ para aproximar a solução do problema de valor inicial no intervalo dado. Apresente sua resposta como uma tabela e um gráfico. ■

**7.** $dy/dx = \sqrt[3]{y},\ y(0) = 1,\ 0 \le x \le 4,\ \Delta x = 0{,}5$

**8.** $dy/dx = x - y^2,\quad y(0) = 1,\quad 0 \le x \le 2,\quad \Delta x = 0{,}25$

**9.** $dy/dt = \cos y,\quad y(0) = 1,\quad 0 \le t \le 2,\quad \Delta t = 0{,}5$

**10.** $dy/dt = e^{-y},\quad y(0) = 0,\quad 0 \le t \le 1,\quad \Delta t = 0{,}1$

**11.** Considere o problema de valor inicial

$$y' = \operatorname{sen} \pi t,\quad y(0) = 0$$

Use o método de Euler com 5 passos para aproximar $y(1)$.

**12-15 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**12.** Se o gráfico de $y = f(x)$ for uma curva integral de um campo de direções, então qualquer translação vertical desse gráfico também será uma curva integral.

**13.** Qualquer curva integral do campo de direções $dy/dx = e^{xy}$ é o gráfico de uma função crescente de $x$.

**14.** Qualquer curva integral do campo de direções $dy/dx = e^{y}$ é côncava para cima.

**15.** Se $p(y)$ for um polinômio cúbico em $y$, então o campo de direções $dy/dx = p(y)$ terá uma curva integral que será uma reta horizontal.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**16.** (a) Mostre que a solução do problema de valor inicial $y' = e^{-x^2}, y(0) = 0$ é

$$y(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

(b) Use o método de Euler com $\Delta x = 0{,}05$ para aproximar o valor de

$$y(1) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$$

e compare a resposta com aquela produzida por um recurso computacional com capacidade de integração numérica.

**17.** A figura abaixo mostra um campo de direções para a equação diferencial $y' = -x/y$.

(a) Use o campo de direções para estimar $y\left(\frac{1}{2}\right)$ para a solução que satisfaça a condição incial $y(0) = 1$.

(b) Compare a sua estimativa ao valor exato de $y\left(\frac{1}{2}\right)$.

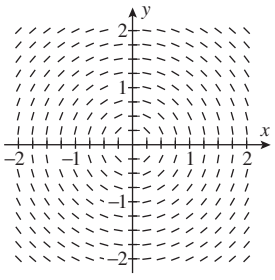



**Figura Ex-17**

**18.** Considere o campo de direções II no Exercício de Compreensão 1.

(a) É visível que o campo de direções aparenta ter uma reta horizontal como curva integral?

(b) Use a equação diferencial do campo de direções para confirmar sua resposta na parte (a).

**19.** Considere o campo de direções no Exercício 3 e a curva integral pelo ponto $(0, -1)$.

(a) Use o campo de direções para obter uma estimativa de onde a curva integral cruza o eixo $x$.

(b) Compare sua estimativa na parte (a) com o valor exato do ponto em que a curva integral corta o eixo $x$.

**20.** Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{2},\quad y(0) = 1$$

(a) Use o método de Euler com tamanho de passo $\Delta x = 0{,}2$; 0,1 e 0,05 para obter três aproximações de $y(1)$.

(b) Encontre $y(1)$ exatamente.

**21.** Dizemos que um campo de direções da forma $y' = f(y)$ é ***autônomo***.

(a) Explique por quê, para campos de direções autônomos, os segmentos de retas tangentes ao longo de qualquer reta horizontal são paralelos.

(b) A palavra *autônomo* significa "independente". Em que sentido um campo de direções autônomo é independente?

(c) Sejam $G(y)$ uma antiderivada de $1/[f(y)]$ e $C$ uma constante. Explique por que qualquer função derivável definida implicitamente por $G(y) - x = C$ é uma solução da equação $y' = f(y)$.

**22.** (a) Resolva a equação $y' = \sqrt{y}$ e mostre que qualquer solução que não seja constante tem um gráfico que é côncavo para cima em toda parte.

(b) Explique como a conclusão da parte (a) poderia ser obtida diretamente a partir da equação $y' = \sqrt{y}$, sem resolvê-la.

**23.** (a) Use derivação implícita para encontrar um campo de direções cuja curva integral que passa pelo ponto (1, 1) seja definida implicitamente pela equação $xy^3 - x^2y = 0$.

(b) Prove que se $y(x)$ é uma curva integral qualquer do campo de direções da parte (a), então $x[y(x)]^3 - x^2y(x)$ é uma função constante.

(c) Encontre uma equação que defina implicitamente a curva integral que passa pelo ponto $(-1, -1)$ do campo de direções da parte (a).

**24.** (a) Use derivação implícita para encontrar um campo de direções cuja curva integral que passa pelo ponto (0, 0) seja definida implicitamente pela equação $xe^y + ye^x = 0$.

(b) Prove que se $y(x)$ é uma curva integral qualquer do campo de direções da parte (a), então $xe^{y(x)} + y(x)e^x$ é uma função constante.

(c) Encontre uma equação que defina implicitamente a curva integral que passa pelo ponto (1, 1) do campo de direções da parte (a).

**25.** Considere o problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$, e seja $y_n$ a aproximação de $y(1)$ usando o método de Euler com $n$ passos.
(a) Faça uma conjectura sobre o valor exato de $\lim_{n \to +\infty} y_n$? Explique seu raciocínio.
(b) Encontre uma fórmula explícita para $y_n$ e use-a para conferir sua conjectura na parte (a).

**26.** **Texto** Explique a conexão entre o método de Euler e a aproximação linear local discutida na Seção 3.5 (ver Volume 1).

**27.** **Texto** Dado um campo de direções, quais características de uma curva integral poderiam ser discutidas a partir do campo de direções? Aplique suas ideias ao campo de direções do Exercício 3.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.3

**1.** (a) IV (b) III (c) I (d) II **2.** $y = 2x, x > 0$ **3.** $y_n + f(x_n, y_n)\Delta x$ **4.** (a) 2,25 (b) $e$

## 8.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM E APLICAÇÕES

*Nesta seção, discutiremos um método geral que pode ser usado para resolver uma grande classe de equações diferenciais de primeira ordem. Esse método será utilizado para resolver equações diferenciais relacionadas a problemas de mistura e de queda livre retardada pela resistência do ar.*

### EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

As equações de primeira ordem mais simples são as que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dx} = q(x) \tag{1}$$

Tais equações podem ser frequentemente resolvidas por integração. Por exemplo, se

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \tag{2}$$

então

$$y = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

é a solução geral de (2) no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Mais geralmente, uma equação diferencial de primeira ordem é denominada ***linear*** se puder ser expressa no formato

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

A Equação (1) é o caso especial de (3) que resulta quando a função $p(x)$ é identicamente nula. Alguns outros exemplos de equações diferenciais lineares de primeira ordem são

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = e^x, \quad p(x) = x^2, q(x) = e^x \qquad \frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y + x^3 = 0, \quad p(x) = \operatorname{sen} x, q(x) = -x^3 \qquad \frac{dy}{dx} + 5y = 2, \quad p(x) = 5, q(x) = 2$$

Vamos supor que as funções $p(x)$ e $q(x)$ em (3) sejam contínuas em um mesmo intervalo e tentaremos encontrar soluções gerais que sejam válidas nesse intervalo. Um método para fazer isso é baseado na observação seguinte: se definirmos $\mu = \mu(x)$ por

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} \tag{4}$$

então

$$\frac{d\mu}{dx} = e^{\int p(x)\,dx} \cdot \frac{d}{dx}\int p(x)\,dx = \mu p(x)$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y = \mu\frac{dy}{dx} + \mu p(x)y \tag{5}$$

Multiplicando ambos os membros de (3) por $\mu$, obtemos

$$\mu\frac{dy}{dx} + \mu p(x)y = \mu q(x)$$

Combinando com (5), temos

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q(x) \tag{6}$$

Essa equação pode ser resolvida em $y$ integrando ambos os lados em relação a $x$ e, então, dividindo tudo por $\mu$ para obter

$$y = \frac{1}{\mu}\int \mu q(x)\,dx \tag{7}$$

que é a solução geral de (3) no intervalo. A função $\mu$ em (4) é chamada de ***fator de integração*** de (3), e esse método de encontrar uma solução geral de (3) é denominado ***método dos fatores integrantes***. Embora seja possível simplesmente memorizar a Fórmula (7), é recomendável resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem seguindo os passos utilizados na derivação da fórmula, como segue.

***O Método dos Fatores Integrantes***

**Passo1** Calcule o fator integrante

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx}$$

Como qualquer $\mu$ será suficiente, podemos tomar a constante de integração como sendo zero neste passo.

**Passo 2** Multiplique ambos os lados de (3) por $\mu$ e expresse o resultado como

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q(x)$$

**Passo 3** Integre ambos os lados da equação obtida no Passo 2 e, então, resolva em $y$. Assegure-se de incluir uma constante de integração neste passo.

► **Exemplo 1** Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$$

***Solução*** Comparando a equação dada com (3), vemos que se trata de uma equação linear de primeira ordem com $p(x) = -1$ e $q(x) = e^{2x}$. Esses coeficientes são contínuos no intervalo $(-\infty, +\infty)$, de modo que o método dos fatores integrantes produzirá uma solução geral nesse intervalo. O primeiro passo consiste em calcular o fator integrante. Isso dá

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int(-1)\,dx} = e^{-x}$$

Em seguida, multiplicamos ambos lados da equação dada por $\mu$ para obter

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = e^{-x}e^{2x}$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}y] = e^{x}$$

Confirme que a solução obtida no Exemplo 1 está de acordo com a obtida substituindo o fator integrante na Fórmula (7).

Integrando ambos os lados dessa equação em relação a $x$, obtemos

$$e^{-x}y = e^{x} + C$$

Finalmente, resolvendo em $y$ obtemos a solução geral

$$y = e^{2x} + Ce^{x} \quad \blacktriangleleft$$

Uma equação diferencial da forma

$$P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

pode ser resolvida dividindo tudo por $P(x)$ para colocar a equação no formato (3) e, então, aplicar o método dos fatores integrantes. No entanto, a solução resultante somente será válida nos intervalos em que ambos, $p(x) = Q(x)/P(x)$ e $q(x) = R(x)/P(x)$, sejam contínuos.

**► Exemplo 2** Resolva o problema de valor inicial

$$x\frac{dy}{dx} - y = x, \quad y(1) = 2$$

***Solução*** A equação diferencial pode ser reescrita na forma (3) dividindo-se ambos os membros por $x$. Assim obtemos

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 1 \tag{8}$$

em que $q(x) = 1$ é contínua em $(-\infty, +\infty)$ e $p(x) = -1/x$ é contínua em $(-\infty, 0)$ e em $(0, +\infty)$. Como devemos ter $p(x)$ e $q(x)$ contínuas em um mesmo intervalo e como nossa condição inicial requer uma solução com $x = 1$, vamos encontrar uma solução geral de (8) no intervalo $(0, +\infty)$. Nesse intervalo, temos $|x| = x$, de modo que

$$\int p(x)\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| = -\ln x$$

Tomando a constante de integração igual a 0

Assim, um fator de integração para produzir uma solução no intervalo $(0, +\infty)$ é

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln(1/x)} = \frac{1}{x}$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (8) por esse fator de integração obtemos

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}y\right] = \frac{1}{x}$$

Não é acidental que o problema de valor inicial no Exemplo 2 tenha uma solução única. Em geral, se $x_0$ é um ponto qualquer de um intervalo aberto no qual os coeficientes de (3) sejam contínuos, então dado qualquer número real $y_0$ existirá sempre uma única solução de (3) que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$ [Exercício 29(b)].

Assim, no intervalo $(0, +\infty)$,

$$\frac{1}{x}y = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

da qual segue que

$$y = x \ln x + Cx \tag{9}$$

A condição inicial $y(1) = 2$ requer que $y = 2$ para $x = 1$. Substituindo esses valores em (9) e resolvendo em $C$, obtemos $C = 2$ (verifique), de modo que a solução do problema de valor inicial é

$$y = x \ln x + 2x \quad \blacktriangleleft$$

Concluimos esta seção com algumas aplicações de equações diferenciais de primeira ordem.

## PROBLEMAS DE MISTURA

Em um problema típico de mistura, um tanque está cheio até um nível especificado com uma solução que contém uma quantidade conhecida de alguma substância solúvel (digamos, sal). À solução completamente misturada é permitido fluir do tanque a uma taxa conhecida e, ao mesmo tempo, uma solução com uma concentração conhecida da substância solúvel é acrescentada ao tanque a uma taxa conhecida, que pode ou não diferir da taxa de vazão. À medida que o tempo passa, a quantidade de substância solúvel no tanque irá, em geral, variar, e o problema de mistura usual procura determinar a quantidade de substância no tanque em um instante especificado. Esse tipo de problema serve como modelo para muitos outros: descarga e filtragem de poluentes em um rio, injeção e absorção de medicamentos na corrente sanguínea e migração de espécies para dentro e para fora de um sistema ecológico, por exemplo.

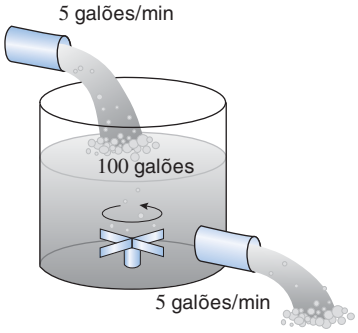



**Figura 8.4.1**

**▶ Exemplo 3** No instante $t = 0$, um tanque contém 4 libras de sal dissolvido em 100 galões de água. Suponha que água salgada contendo duas libras de sal por galão seja acrescentada ao tanque a uma taxa de 5 galões por minuto e que a solução misturada seja drenada do tanque à mesma taxa (Figura 8.4.1). Encontre a quantidade de sal no tanque após 10 minutos.

***Solução*** Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em libras) após $t$ minutos. É dado que $y(0) = 4$, e queremos encontrar $y(10)$. Começaremos por encontrar uma equação diferencial que seja satisfeita por $y(t)$. Para fazer isso, observamos que $dy/dt$, que é a taxa segundo a qual a quantidade de sal no tanque está variando com o tempo, pode ser expressa como

$$\frac{dy}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída} \tag{10}$$

onde a *taxa de entrada* é aquela segundo a qual o sal entra no tanque e a *taxa de saída* é aquela segundo a qual o sal deixa o tanque. No entanto, a taxa segundo a qual o sal entra no tanque é

$$\text{taxa de entrada} = (2\ \text{lb/galões}) \cdot (5\ \text{galões/min}) = 10\ \text{lb/min}$$

Uma vez que a água salgada entra e sai do tanque a uma mesma taxa, o volume dela no tanque permanece constante em 100 galões. Assim, decorridos $t$ minutos, o tanque contém $y(t)$ libras de sal por 100 galões de água salgada e, portanto, a taxa segundo a qual o sal deixa o tanque naquele instante é

$$\text{taxa de saída} = \left(\frac{y(t)}{100}\ \text{lb/galões}\right) \cdot (5\ \text{galões/min}) = \frac{y(t)}{20}\ \text{lb/min}$$

Portanto, (10) pode ser escrito como

$$\frac{dy}{dt} = 10 - \frac{y}{20} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dt} + \frac{y}{20} = 10$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem satisfeita por $y(t)$. Como é dado que $y(0) = 4$, a função $y(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{20} = 10, \quad y(0) = 4$$

O fator integrante para essa equação diferencial é

$$\mu = e^{\int (1/20)\,dt} = e^{t/20}$$

Se multiplicarmos ambos os membros da equação por $\mu$, obteremos

$$\frac{d}{dt}(e^{t/20}y) = 10e^{t/20}$$

$$e^{t/20}y = \int 10e^{t/20}\,dt = 200e^{t/20} + C$$

$$y(t) = 200 + Ce^{-t/20} \tag{11}$$

A condição inicial afirma que $y = 4$ quando $t = 0$. Substituir esses valores em (11) e resolvendo para $C$, resulta que $C = -196$ (verifique), portanto

$$y(t) = 200 - 196e^{-t/20} \tag{12}$$

O gráfico de (12) é mostrado na Figura 8.4.2. No instante $t = 10$, a quantidade de sal no tanque é

$$y(10) = 200 - 196e^{-0,5} \approx 81,1 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

Observe que, de (11), segue que

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 200$$

para todos os valores de $C$, portanto, não importando a quantidade de sal presente inicialmente no tanque, a quantidade de sal no tanque vai acabar estabilizando-se em 200 libras. Isso pode ser visto também geometricamente a partir do campo de direções da equação diferencial, mostrado na Figura 8.4.3. Esse campo de direções sugere que se a quantidade de sal presente inicialmente no tanque for maior do que 200 libras, então ela irá decrescer regularmente no tempo em direção ao valor limite de 200 libras; e se, inicialmente for menor do que 200 libras, então ela irá crescer regularmente em direção ao valor limite de 200 libras. O campo de direções também sugere que se a quantidade presente inicialmente for de exatamente 200 libras, então a quantidade de sal no tanque permanecerá constante nas 200 libras. Isso também pode ser visto a partir de (11), uma vez que $C = 0$ neste caso (verifique).

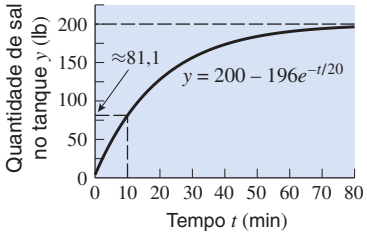



**Figura 8.4.2**

O gráfico mostrado na Figura 8.4.2 sugere que $y(t) \to 200$ quando $t \to +\infty$. Isso significa que, em um período estendido de tempo, a quantidade de sal no tanque tende para 200 libras. Dê um argumento físico informal para explicar por que este resultado é esperado.

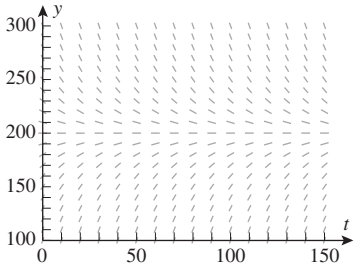



**Figura 8.4.3**

## UM MODELO DE QUEDA LIVRE RETARDADA PELA RESISTÊNCIA DO AR

Na Seção 5.7, consideramos o modelo de queda livre de um objeto movendo-se ao longo de um eixo vertical próximo da superfície da Terra. Supôs-se, naquele modelo, que não há resistência do ar e, assim, a única força agindo sobre o objeto é a gravidade da Terra. O nosso objetivo aqui é encontrar o modelo que leve em conta a resistência do ar. Com essa finalidade, vamos fazer as seguintes hipóteses:

- O objeto move-se ao longo de um eixo vertical $s$ cuja origem está na superfície da Terra e cujo sentido positivo é para cima (Figura 5.7.7, no Volume 1).
- No instante $t = 0$, a altura do objeto é $s_0$ e a sua velocidade, $v_0$.
- As únicas forças sobre o objeto são a força da gravidade da Terra $F_G = -mg$ agindo para baixo e a força $F_R$ da resistência do ar agindo no sentido oposto ao do movimento. A força $F_R$ é chamada de ***força de retardamento.***

No caso do movimento de queda livre retardada pela resistência do ar, a força líquida agindo sobre o objeto é

$$F_G + F_R = -mg + F_R$$

e a aceleração é $d^2s/dt^2$, de modo que a segunda lei de Newton [Equação (5) na Seção 6.6, no Volume 1] implica que

$$-mg + F_R = m\frac{d^2s}{dt^2} \tag{13}$$

A experimentação mostra que a força $F_R$ da resistência do ar depende do formato do objeto e de sua velocidade – quanto maior for a velocidade, maior será a força de retardamento. Há muitos modelos possíveis para resistência do ar, mas um dos mais básicos supõe que a força de retardamento $F_R$ seja proporcional à velocidade do objeto, isto é, que

$$F_R = -cv$$

onde $c$ é uma constante positiva que depende do formato do objeto e de propriedades do ar* (O sinal de menos garante que a força de retardamento seja oposta ao sentido do movimento.) Substituindo-se isso em (13) e escrevendo $d^2s/dt^2$ como $dv/dt$, obtemos

$$-mg - cv = m\frac{dv}{dt}$$

Dividindo-se por $m$ e rearranjando

$$\frac{dv}{dt} + \frac{c}{m}v = -g$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem na função desconhecida $v = v(t)$ com $p(t) = c/m$ e $q(t) = -g$ [ver (3)]. Para um objeto específico, o coeficiente $c$ pode ser determinado experimentalmente, portanto podemos supor que $m$, $g$ e $c$ sejam constantes conhecidas. Assim, a função velocidade $v = v(t)$ pode ser obtida resolvendo-se o problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} + \frac{c}{m}v = -g, \quad v(0) = v_0 \tag{14}$$

Uma vez encontrada a função velocidade, a função posição $s = s(t)$ pode ser obtida resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{ds}{dt} = v(t), \quad s(0) = s_0 \tag{15}$$

No Exercício 25, pedimos ao leitor que resolva (14) e mostre que

$$v(t) = e^{-ct/m}\left(v_0 + \frac{mg}{c}\right) - \frac{mg}{c} \tag{16}$$

Note que

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = -\frac{mg}{c} \tag{17}$$

(verifique). Assim, a velocidade escalar $|v(t)|$ não cresce indefinidamente, como na queda livre; em vez disso, devido à resistência do ar, ela tende a uma velocidade limite finita $v_\tau$ dada por

$$v_\tau = \left|-\frac{mg}{c}\right| = \frac{mg}{c} \tag{18}$$

Essa é a ***velocidade escalar terminal*** do objeto, e (17) é chamada de ***velocidade terminal***.

**OBSERVAÇÃO** A intuição sugere que próximo da velocidade limite, a velocidade $v(t)$ varia muito lentamente; isto é, $dv/dt \approx 0$. Assim, não deve causar surpresa que a velocidade limite possa ser obtida informalmente de (14) fazendo $dv/dt = 0$ na equação diferencial e resolvendo para $v$. Dessa forma, obtemos

$$v = -\frac{mg}{c}$$

o que está de acordo com (17).

* Outros modelos comuns supõem que $F_R = -cv^2$ ou, mais geralmente, $F_R = -cv^p$ com algum valor de $p$.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.4 (Ver página 594 para respostas.)

**1.** Resolva a equação diferencial separável de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

completando os passos a seguir.

**Passo 1** Calcule o fator de integração $\mu =$ _____.

**Passo 2** Multiplique ambos os lados da equação pelo fator de integração e expresse o resultado como

$$\frac{d}{dx}[_____] = _____$$

**Passo 3** Integre ambos os lados da equação obtida no Passo 2 e resolva em $y =$ _____.

**2.** Um fator integrante de

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = q(x)$$

é _____.

**3.** No instante $t = 0$, um tanque contém 30 g de sal dissolvidos em 60 litros de água. Suponha que água salgada contendo 5 g de sal por litro de água é acrescentada ao tanque a uma taxa de 3 litros por minuto e que a solução misturada é drenada do tanque à mesma taxa. Elabore um problema de valor inicial que seja satisfeito pela quantidade $y(t)$ de sal no tanque no instante $t$. Não encontre a solução do problema.

## EXERCÍCIOS 8.4 Recurso Gráfico

**1-6** Resolva a equação diferencial pelo método dos fatores integrantes. ■

**1.** $\dfrac{dy}{dx} + 4y = e^{-3x}$

**2.** $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x$

**3.** $y' + y = \cos(e^x)$

**4.** $2\dfrac{dy}{dx} + 4y = 1$

**5.** $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

**6.** $\dfrac{dy}{dx} + y + \dfrac{1}{1 - e^x} = 0$

**7-10** Resolva o problema de valor inicial. ■

**7.** $x\dfrac{dy}{dx} + y = x, \quad y(1) = 2$

**8.** $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2, \quad y(1) = -1$

**9.** $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 2x, \quad y(0) = 3$

**10.** $\dfrac{dy}{dt} + y = 2, \quad y(0) = 1$

**11-14 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**11.** Se $y_1$ e $y_2$ forem duas soluções de uma equação diferencial de primeira ordem, então $y = y_1 + y_2$ também será uma solução.

**12.** Se a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

tiver uma solução que é uma função constante, então $q(x)$ será um múltiplo constante de $p(x)$.

**13.** Em um problema de mistura, é de se esperar que a concentração da substância dissolvida no tanque tenda a um limite finito ao longo do tempo.

**14.** Em nosso modelo de queda livre retardado pela resistência do ar, a velocidade terminal é proporcional ao peso do objeto em queda livre.

**15.** Um campo de direções para a equação diferencial $y' = 2y - x$ está na figura abaixo. Em cada parte, esboce o gráfico da solução que satisfaz a condição inicial.

(a) $y(1) = 1$ (b) $y(0) = -1$ (c) $y(-1) = 0$

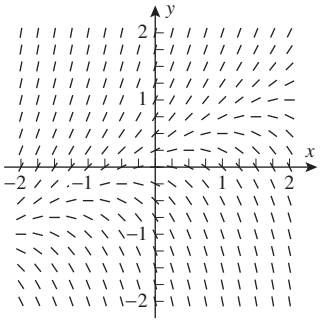



**Figura Ex-15**

**16.** Resolva o problema de valor inicial no Exercício 15 e use um recurso gráfico computacional para confirmar que as curvas integrais dessas soluções estão de acordo com os esboços obtidos a partir do campo de direções.

### ENFOCANDO CONCEITOS

**17.** Use o campo de direções no Exercício 15 para fazer uma conjectura sobre o efeito de $y_0$ no comportamento da solução do problema de valor inicial $y' = 2y - x$, $y(0) = y_0$ quando $x \to +\infty$ e confira sua conjectura examinando a solução do problema de valor inicial.

**18.** Considere o campo de direções no Exercício 15.

(a) Use o método de Euler com $\Delta x = 0{,}1$ para estimar $y\left(\frac{1}{2}\right)$ da solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

(b) Você estima que sua resposta na parte (a) é maior ou menor do que o valor exato de $y\left(\frac{1}{2}\right)$? Explique.
(c) Confira sua conjectura na parte (b) encontrando o valor exato de $y\left(\frac{1}{2}\right)$.

**19.** (a) Use o método de Euler com um tamanho de passo $\Delta x = 0{,}2$ para aproximar a solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

no intervalo $0 \le x \le 1$.
(b) Resolva exatamente o problema de valor inicial e calcule o erro e o erro percentual em cada aproximação da parte (a).
(c) Esboce a solução exata e a solução aproximada no mesmo sistema de coordenadas.

**20.** Afirmou-se no final da Seção 8.3 que, reduzindo o tamanho do passo no método de Euler pela metade, reduz-se aproximadamente pela metade, também, o erro em cada aproximação. Confirme que o erro em $y(1)$ fica reduzido aproximadamente à metade se o tamanho de passo usado no Exercício 19 for de $\Delta x = 0{,}1$.

**21.** No instante $t = 0$, um tanque contém 25 g de sal dissolvidos em 50 litros de água. Então, água salgada contendo 4 g de sal por litro é acrescentada ao tanque a uma taxa de 2 litros/min, e a solução misturada é drenada do tanque à mesma taxa.
(a) Quanto sal haverá no tanque num instante de tempo arbitrário $t$?
(b) Quanto sal haverá no tanque após 25 minutos?

**22.** Um tanque contém inicialmente 200 galões de água pura. Em um instante $t = 0$, água salgada contendo 5 libras de sal por galão é acrescentada ao tanque a uma taxa de 20 galões por minuto, e a solução misturada é drenada do tanque à mesma taxa.
(a) Quanto sal haverá no tanque em um instante de tempo arbitrário $t$?
(b) Quanto sal haverá no tanque após 30 minutos?

**23.** Um tanque com uma capacidade de 1.000 galões contém, inicialmente, 500 galões de água poluída com 50 libras de poluente. No instante $t = 0$, água pura é acrescentada a uma taxa de 20 galões por minuto, e a solução misturada é drenada a uma taxa de 10 galões por minuto. Quanto poluente haverá no tanque quando ele chegar no ponto de transbordar?

**24.** A água em um lago poluído contém inicialmente 1 libra de sais de mercúrio por 100.000 galões de água. O lago é circular com um diâmetro de 30 metros e uma profundidade uniforme de 3 metros. A água poluída é bombeada do lago a uma taxa de 1.000 galões por hora e substituída por água fresca na mesma taxa. Construa uma tabela que mostre a quantidade de mercúrio no lago (em libras) no final de cada hora, por um período de 12 horas. Discuta qualquer hipótese feita. [*Nota*: Use $1\text{m}^3 = 264$ galões.]

**25.** (a) Use o método dos fatores integrantes para deduzir a solução (16) do problema de valor inicial (14). [*Nota*: Lembre que $c$, $m$ e $g$ são constantes.]
(b) Mostre que (16) pode ser expressa em termos da velocidade terminal (18) como

$$v(t) = e^{-gt/v_\tau}(v_0 + v_\tau) - v_\tau$$

(c) Mostre que se $s(0) = s_0$, então a função posição do objeto pode ser expressa como

$$s(t) = s_0 - v_\tau t + \frac{v_\tau}{g}(v_0 + v_\tau)(1 - e^{-gt/v_\tau})$$

**26.** Suponha que um paraquedista totalmente equipado pesando 240 libras tenha uma velocidade terminal de 120 pés por segundo com o paraquedas fechado e de 24 pés por segundo com o paraquedas aberto. Suponha também que esse paraquedista salte de um avião a uma altura de 10.000 pés, caia durante 25 segundos com o paraquedas fechado e então caia o trajeto restante com o paraquedas aberto.
(a) Supondo que a velocidade inicial do paraquedista seja zero, use o Exercício 25 para encontrar a velocidade vertical do paraquedista e sua altura no instante em que abrir o paraquedas. [*Nota*: Use $g = 32$ pés/s$^2$.]
(b) Use uma calculadora para encontrar uma solução numérica para o tempo total em que o paraquedista permanece no ar.

**27.** A figura abaixo é um diagrama esquemático de um circuito elétrico em série $RL$ básico, que contém uma fonte de energia com uma voltagem dependente do tempo de $V(t)$ volts (V), um resistor com uma resistência constante de $R$ ohms ($\Omega$) e um indutor com uma indutância constante de $L$ henrys (H). O leitor que não conhecer circuitos elétricos não precisa se preocupar; tudo que precisa saber é que a teoria da eletricidade afirma que uma corrente de $I(t)$ amperes (A) flui através do circuito onde $I(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V(t)$$

(a) Determine $I(t)$ se $R = 10\ \Omega$, $L = 5$ H, se $V$ for a constante 20 V e $I(0) = 0$ A.
(b) O que acontece com a corrente em um longo período de tempo?

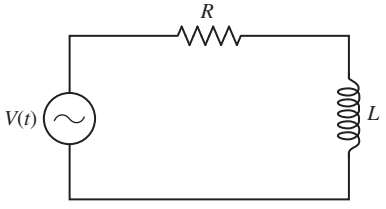



**Figura Ex-27**

**28.** Determine $I(t)$ para o circuito elétrico do Exercício 27 se $R = 6\ \Omega$, $L = 3$ H, $V(t) = 3 \operatorname{sen} t$ V e $I(0) = 15$A.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**29.** (a) Prove que qualquer função $y = y(x)$ definida pela Equação (7) é uma solução de (3).
(b) Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

em que as funções $p(x)$ e $q(x)$ são ambas contínuas em um intervalo aberto. Usando a solução geral de uma equação linear de primeira ordem, prove que este problema de valor inicial tem uma solução única no intervalo.

**30.** (a) Prove que as soluções não precisam ser únicas para problemas de valor inicial não lineares, encontrando duas soluções para

$$y\frac{dy}{dx} = x, \quad y(0) = 0$$

(b) Prove que as soluções não precisam existir para problemas de valor inicial não lineares, mostrando que não existe solução para

$$y\frac{dy}{dx} = -x, \quad y(0) = 0$$

**31.** **Texto** Explique por que a quantidade $\mu$ no *Método dos Fatores Integrantes* é denominada "fator integrante" e explique o papel dessa quantidade nesse método.

**32.** **Texto** Suponha que uma dada equação diferencial de primeira ordem possa ser resolvida pelo método dos fatores integrantes e também pela separação das variáveis. Discuta as vantagens e desvantagens de cada método.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 8.4

**1.** Passo 1: $e^{\int p(x)\,dx}$; Passo 2: $\mu y$, $\mu q(x)$; Passo 3: $\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int \mu q(x)\,dx$ **2.** $x$ **3.** $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{y}{20} = 15$, $y(0) = 30$

## EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 8 C CAS

**1.** Classifique as seguintes equações diferenciais de primeira ordem como separáveis, lineares, ambas ou nenhuma deles.

(a) $\dfrac{dy}{dx} - 3y = \operatorname{sen} x$ (b) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x$

(c) $y\dfrac{dy}{dx} - x = 1$ (d) $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = \operatorname{sen}(xy)$

**2.** Quais das seguintes equações diferenciais são separáveis?

(a) $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = f(x) + g(y)$ (d) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{f(x)g(y)}$

**3-5** Resolva a equação diferencial pelo método de separação de variáveis. ■

**3.** $\dfrac{dy}{dx} = (1 + y^2)x^2$ **4.** $3 \operatorname{tg} y - \dfrac{dy}{dx}\sec x = 0$

**5.** $(1 + y^2)y' = e^x y$

**6-8** Resolva o problema de valor inicial pelo método de separação de variáveis. ■

**6.** $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 1$ **7.** $y' = \dfrac{y^5}{x(1 + y^4)}$, $y(1) = 1$

**8.** $y' = 4y^2 \sec^2 2x$, $y(\pi/8) = 1$

**9.** Esboce a curva integral de $y' = -2xy^2$ que passa pelo ponto $(0, 1)$.

**10.** Esboce a curva integral de $2yy' = 1$ que passa pelo ponto $(0, 1)$ e a curva integral que passa pelo ponto $(0, -1)$.

**11.** Esboce o campo de direções de $y' = xy/8$ nos 25 pontos de malha $(x, y)$, dados por $x = 0, 1, \ldots, 4$ e $y = 0, 1, \ldots, 4$.

**12.** Resolva a equação diferencial $y' = xy/8$ e encontre uma família de curvas integrais para o campo de direções do Exercício 11.

**13-14** Use o método de Euler com o tamanho de passo $\Delta x$ dado para aproximar a solução do problema de valor inicial no intervalo dado. Apresente a resposta em forma de tabela e também como gráfico. ■

**13.** $dy/dx = \sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $0 \le x \le 4$, $\Delta x = 0{,}5$

**14.** $dy/dx = \operatorname{sen} y$, $y(0) = 1$, $0 \le x \le 2$, $\Delta x = 0{,}5$

**15.** Considere o problema de valor inicial

$$y' = \cos 2\pi t, \quad y(0) = 1$$

Use o método de Euler com cinco passos para aproximar $y(1)$.

**16.** Um tecido encontrado em uma pirâmide egípcia contém 78,5% de seu carbono-14 original. Estime a idade do tecido.

**17.** Em cada parte, determine um modelo de crescimento exponencial $y = y_0 e^{kt}$ que satisfaça as condições dadas.

(a) $y_0 = 2$; tempo de duplicação $T = 5$.
(b) $y(0) = 5$; taxa de crescimento 1,5%.
(c) $y(1) = 1$; $y(10) = 100$.
(d) $y(1) = 1$; tempo de duplicação $T = 5$.

**18.** Suponha que uma população inicial de 5.000 bactérias cresça exponencialmente a uma taxa de 1% por hora e que $y(t)$ denote o número de bactérias presentes depois de $t$ horas.

(a) Encontre um problema de valor inicial cuja solução seja $y(t)$.
(b) Encontre uma fórmula para $y(t)$.
(c) Qual é o tempo de duplicação dessa população?
(d) Quanto tempo leva para essa população de bactérias atingir os 30.000?

**19-20** Resolva a equação diferencial pelo método dos fatores integrantes. ■

**19.** $\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$ **20.** $\dfrac{dy}{dx} + y - \dfrac{1}{1 + e^x} = 0$

**21-23** Resolva o problema de valor inicial pelo método de fatores integrantes. ■

**21.** $y' - xy = x,\ y(0) = 3$

**22.** $xy' + 2y = 4x^2,\ y(1) = 2$

**23.** $y' \cosh x + y \operatorname{senh} x = \cosh^2 x,\ y(0) = 2$

C **24.** (a) Resolva o problema de valor inicial

$$y' - y = x \operatorname{sen} 3x, \quad y(0) = 1$$

pelo método dos fatores integrantes, usando um CAS para efetuar as integrações difíceis.

(b) Use um CAS para resolver diretamente o problema de valor inicial e confirme que a sua resposta está de acordo com aquela obtida na parte (a).

(c) Faça o gráfico da solução.

**25.** Um tanque contém 1.000 galões de água fresca. No instante $t = 0$, água salgada contendo 5 gramas de sal por galão é despejada no tanque a uma taxa de 10 galões por minuto, e a mistura é drenada do tanque à mesma taxa. Após 15 minutos, o processo é interrompido e água fresca é despejada no tanque à uma taxa de 5 galões por minuto, e a solução é drenada do tanque à mesma taxa. Determine a quantidade de sal no tanque no instante $t = 30$ min.

**26.** Suponha que uma sala contendo 1.200 pés$^3$ de ar esteja livre de monóxido de carbono. No instante $t = 0$, fumaça de cigarro contendo 4% de monóxido de carbono é introduzida a uma taxa de 0,1 pés$^3$/min, e a mistura bem circulada é ventilada para fora da sala à mesma taxa.

(a) Encontre uma fórmula para a porcentagem de monóxido de carbono na sala no instante $t$.

(b) A exposição continuada ao ar contendo 0,012% de monóxido de carbono é considerada perigosa. Quanto tempo levará para atingir esse nível?

***Fonte:*** Baseado em um problema de William E. Boyce e Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, 7th Ed., John Wiley & Sons, New York, 2001.

## CAPÍTULO 8 ESTABELECENDO CONEXÕES

**1.** Considere a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + py = q$$

em que $p$ e $q$ são constantes. Se $y = y(x)$ for uma solução dessa equação, defina $u = u(x) = q - py(x)$.

(a) Sem resolver a equação diferencial, mostre que $u$ cresce exponencialmente como uma função de $x$ se $p < 0$ e decresce exponencialmente como uma função de $x$ se $0 < p$.

(b) Use o resultado da parte (a) e as Equações (13 e 14) da Seção 8.2 para resolver o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 4, \quad y(0) = -1$$

**2.** Considere a equação diferencial do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

em que $f$ é uma função de uma variável. Se $y = y(x)$ for uma solução dessa equação diferencial, defina $u = u(x) = ax + by(x) + c$.

(a) Encontre uma equação diferencial separável que seja satisfeita pela função $u$.

(b) Use sua resposta da parte (a) para resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y}$$

**3.** Dizemos que uma equação diferencial é ***homogênea*** se puder ser escrita da forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{com } x \neq 0$$

em que $f$ é uma função de uma variável. Se $y = y(x)$ for uma solução de uma equação diferencial homogênea de primeira ordem, defina $u = u(x) = y(x)/x$.

(a) Encontre uma equação diferencial separável que seja satisfeita pela função $u$.

(b) Use sua resposta da parte (a) para resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}$$

**4.** Dizemos que uma equação diferencial de primeira ordem é uma ***equação de Bernoulli*** se puder ser escrita da forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad \text{com } n \neq 0, 1$$

Se $y = y(x)$ for uma solução de uma equação de Bernoulli, defina $u = u(x) = [y(x)]^{1-n}$.

(a) Encontre uma equação diferencial linear de primeira ordem que seja satisfeita pela função $u$.

(b) Use sua resposta da parte (a) para resolver o problema de valor inicial

$$x\frac{dy}{dx} - y = -2xy^2, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

iStockphoto

*A perspectiva cria a ilusão de que a sequência de dormentes continua indefinidamente, mas converge em direção a um único ponto infinitamente distante.*

# 9 SÉRIES INFINITAS

Neste capítulo, consideraremos séries infinitas, que são somas que envolvem um número infinito de termos. As séries infinitas desempenham um papel fundamental, tanto na Matemática quanto na Ciência: elas são usadas, por exemplo, para aproximar funções trigonométricas e logarítmicas, para resolver equações diferenciais, para calcular integrais difíceis, para criar novas funções e para construir modelos matemáticos de leis físicas. Como é impossível efetuar diretamente a soma de um número infinito de termos, um objetivo será definir exatamente o que entendemos por soma de uma série infinita. Porém, diferentemente das somas finitas, nem todas as séries infinitas têm realmente uma soma, portanto precisamos desenvolver ferramentas que determinem quais séries infinitas têm soma e quais não têm. Uma vez desenvolvidas as ideias básicas, aplicaremos o nosso trabalho; mostraremos como as séries infinitas são utilizadas para calcular quantidades como ln 2, $e$, sen 3° e $\pi$, como elas são usadas para criar funções e, finalmente, como são usadas para modelar leis físicas.

## 9.1 SEQUÊNCIAS

*Na linguagem do dia a dia, o termo "sequência" significa uma sucessão de coisas em uma ordem determinada: ordem cronológica, de tamanho ou lógica, por exemplo. Em Matemática, o termo é usado comumente para denotar uma sucessão de números cuja ordem é determinda por uma lei ou função. Nesta seção, desenvolveremos algumas das ideias básicas referentes a sequências de números.*

### DEFINIÇÃO DE SEQUÊNCIA

Informalmente, uma ***sequência infinita***, ou, mais simplesmente, uma ***sequência***, é uma sucessão sem fim de números, chamados de ***termos***. Entende-se que os termos têm uma ordem definida, isto é, há um primeiro termo $a_1$, um segundo termo $a_2$, um terceiro termo $a_3$, um quarto termos $a_4$ e assim por diante. Tipicamente, uma sequência é escrita como

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

onde os pontos são usados para indicar que a sequência continua indefinidamente. Alguns exemplos específicos são

$$1, 2, 3, 4, \ldots, \qquad 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots,$$
$$2, 4, 6, 8, \ldots, \qquad 1, -1, 1, -1, \ldots$$

Cada uma dessas sequências tem um padrão definido, o que torna fácil gerar termos adicionais se admitirmos que esses termos seguem o mesmo padrão que os termos apresentados. No entanto, tais padrões podem ser ilusórios, portanto é melhor ter uma regra ou fórmula para gerar os termos. Uma maneira de fazer isso é procurar uma função que relacione cada termo da sequência ao número de sua posição. Por exemplo, na sequência

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

cada termo é o dobro do número da sua posição; isto é, o enésimo termo da sequência é dado pela fórmula $2n$. Denotamos isso escrevendo a sequência como

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$$

Dizemos que a função $f(n) = 2n$ é o *termo geral* dessa sequência. Agora, se quisermos saber um termo específico dela, precisamos somente substituir seu número de posição na fórmula do termo geral. Por exemplo, o 37-ésimo termo da sequência é $2 \cdot 37 = 74$.

**▶ Exemplo 1** Em cada parte, determine o termo geral da sequência.

(a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ (b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

(c) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots$ (d) $1, 3, 5, 7, \ldots$

**Tabela 9.1.1**

| NÚMERO DE POSIÇÃO | 1 | 2 | 3 | 4 | ⋯ | $n$ | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TERMO | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | ⋯ | $\frac{n}{n+1}$ | ⋯ |

***Solução (a)*** Na Tabela 9.1.1, os quatro termos conhecidos foram colocados abaixo de seu número de posição, de onde vemos que o numerador é igual ao número de posição e o denominador é o número de posição mais 1. Isso sugere que o enésimo termo tem o numerador $n$ e o denominador $n + 1$, conforme indicado na tabela. Assim, a sequência pode ser expressa como

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

**Tabela 9.1.2**

| NÚMERO DE POSIÇÃO | 1 | 2 | 3 | 4 | ⋯ | $n$ | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TERMO | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{1}{2^4}$ | ⋯ | $\frac{1}{2^n}$ | ⋯ |

***Solução (b)*** Na Tabela 9.1.2, os denominadores dos quatro termos conhecidos foram expressos como potências de 2 e colocados abaixo do seu número de posição, de onde vemos que o expoente no denominador é igual ao número de posição. Isso sugere que o denominador do enésimo termo é $2^n$, conforme indicado na tabela. Assim, a sequência pode ser expressa como

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

***Solução (c)*** Esta sequência é idêntica àquela da parte (a), exceto pelos sinais alternados. Assim, o enésimo termo da sequência pode ser obtido multiplicando-se o enésimo termo da parte (a) por $(-1)^{n+1}$. Esse fator produz corretamente os sinais alternados, uma vez que seus valores sucessivos, começando com $n = 1$, são $1, -1, 1, -1, \ldots$. Assim, a sequência pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \ldots$$

**Tabela 9.1.3**

| NÚMERO DE POSIÇÃO | 1 | 2 | 3 | 4 | ⋯ | $n$ | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TERMO | 1 | 3 | 5 | 7 | ⋯ | $2n-1$ | ⋯ |

***Solução (d)*** Na Tabela 9.1.3, os denominadores dos quatro termos conhecidos foram colocados abaixo de seus números de posição, de onde vemos que cada termo é 1 a menos do que o dobro do seu número de posição. Isso sugere que o enésimo termo da sequência é $2n - 1$, conforme indicado na tabela. Assim, a sequência pode ser expressa como

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1, \ldots \quad \blacktriangleleft$$

Quando o termo geral de uma sequência

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

for conhecido, não há necessidade de escrever os termos iniciais, e é comum escrever somente o termo geral envolvido por chaves. Assim, (1) pode ser escrita como

$$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \quad \text{ou como} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Uma sequência pode não estar bem definida com alguns termos iniciais. Por exemplo, a sequência cujo termo geral é

$$f(n) = \tfrac{1}{3}(3 - 5n + 6n^2 - n^3)$$

tem os três primeiros termos 1, 3 e 5, mas o quarto termo também é 5.

Por exemplo, a seguir estão as quatro sequências do Exemplo 1 expressas em notação com chaves.

| SEQUÊNCIA | NOTAÇÃO COM CHAVES |
|---|---|
| $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ | $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ |
| $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ | $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ |
| $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \ldots$ | $\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ |
| $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots$ | $\{2n-1\}_{n=1}^{+\infty}$ |

A letra $n$ em (1) é chamada de ***índice*** da sequência. Não é essencial usar $n$ como índice; qualquer letra que não estiver reservada para outros propósitos pode ser usada. Por exemplo, podemos considerar o termo genérico da sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ como sendo o $k$-ésimo termo e, neste caso, denotaremos essa sequência como $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Além disso, não é essencial começar o índice em 1; às vezes, é mais conveniente começar em 0 (ou algum outro inteiro). Por exemplo, considere a sequência

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$$

Uma forma de escrevê-la é

$$\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$$

Entretanto, o termo geral será mais simples se tomarmos como termo inicial o 0-ésimo termo; neste caso, podemos escrever a sequência como

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=0}^{+\infty}$$

Começamos esta seção descrevendo uma sequência como uma sucessão sem fim de números. Embora isso transmita a ideia geral, não é uma definição matematicamente satisfatória, pois depende do termo "sucessão", que é um termo não definido. Para motivar uma definição precisa, considere a sequência

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$$

Se denotarmos o termo geral por $f(n) = 2n$, então poderemos escrever essa sequência como

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

que é uma "lista" dos valores da função

$$f(n) = 2n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Isso sugere a seguinte definição.

**9.1.1 DEFINIÇÃO** Uma ***sequência*** é uma função cujo domínio é um conjunto de inteiros.

Tipicamente, o domínio de uma sequência é o conjunto dos inteiros positivos ou o conjunto dos inteiros não negativos. Consideramos a expressão $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ como sendo uma notação alternativa para a função $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e consideramos a expressão $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ como uma notação alternativa para a função $f(n) = a_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Quando o valor inicial do índice de uma sequência não for relevante para a discussão, é comum usar uma notação como $\{a_n\}$ em que não há referência ao valor inicial de $n$. Podemos distinguir entre sequências diferentes usando letras diferentes para os seus termos gerais; assim, $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ denotam três sequências diferentes.

## GRÁFICOS DE SEQUÊNCIAS

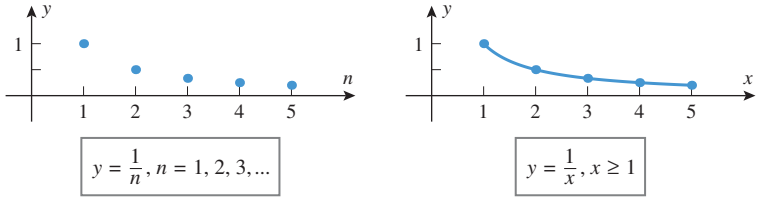
Uma vez que sequências são funções, faz sentido falar sobre o gráfico delas. Por exemplo, o gráfico da sequência $\{1/n\}_{n=1}^{+\infty}$ é o gráfico da equação

$$y = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como o lado direito dessa equação está definido somente para valores inteiros positivos de $n$, o gráfico consiste de uma sucessão de pontos isolados (Figura 9.1.1*a*). Isso é distinto do gráfico de

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$$

que é uma curva contínua (Figura 9.1.1*b*).




(*a*) (*b*)

**Figura 9.1.1**

## LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA

Uma vez que sequências são funções, podemos indagar sobre os seus limites. Porém, como a sequência $\{a_n\}$ está somente definida para valores inteiros de $n$, o único limite que faz sentido é o de $a_n$ quando $n \to +\infty$. Na Figura 9.1.2, mostramos os gráficos de quatro sequências, cada uma comportando-se diferentemente quando $n \to +\infty$:

- Os termos na sequência $\{n + 1\}$ crescem sem cota.
- Os termos na sequência $\{(-1)^{n+1}\}$ oscilam entre $-1$ e 1.
- Os termos na sequência $\{n/(n + 1)\}$ crescem em direção a um "valor limite" de 1.
- Os termos na sequência $\left\{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ também tendem a um "valor limite" de 1, mas o fazem de forma oscilatória.

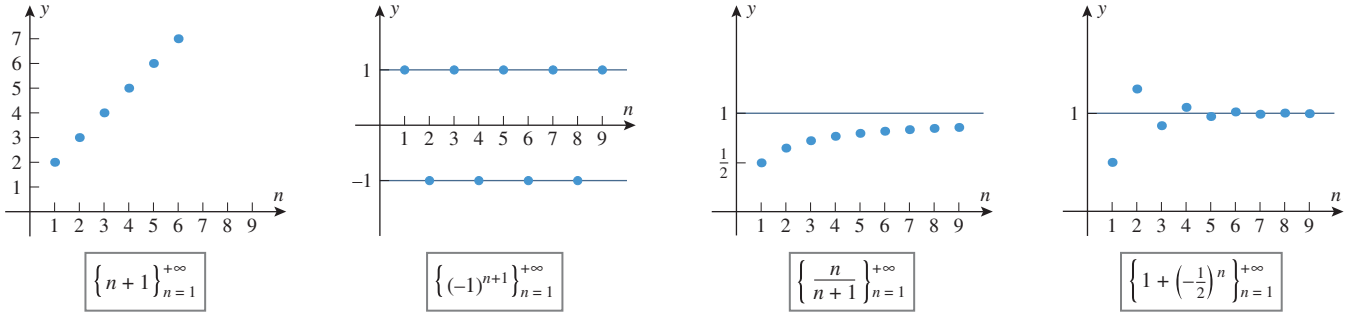



**Figura 9.1.2**

De modo informal, o limite de uma sequência $\{a_n\}$ pretende descrever como $a_n$ comporta-se quando $n \to +\infty$. Para sermos mais específicos, diremos que *uma sequência* $\{a_n\}$ *tende a um limite L se os termos da sequência tornarem-se, finalmente, arbitrariamente*

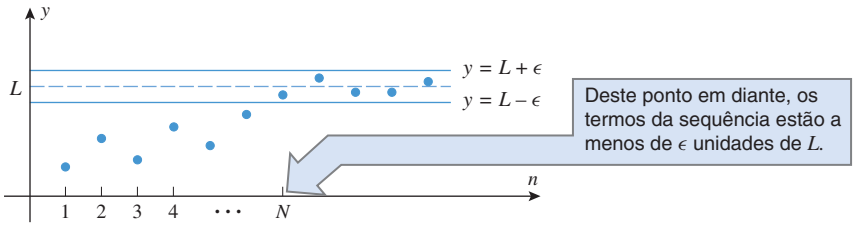



**Figura 9.1.3**

*próximos de L*. Geometricamente, isso significa que para qualquer número $\epsilon$ positivo há um ponto na sequência após o qual todos os termos estão entre as retas $y = L - \epsilon$ e $y = L + \epsilon$ (Figura 9.1.3).

A definição a seguir torna essas ideias mais precisas.

Como poderíamos definir estes limites

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty?$$

**9.1.2 DEFINIÇÃO** Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ ***converge*** para o ***limite*** $L$ se dado qualquer $\epsilon > 0$, existir um número inteiro positivo $N$, tal que $|a_n - L| < \epsilon$ se $n \geq N$. Nesse caso, escrevemos

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

Dizemos que uma sequência ***diverge*** quando não convergir para algum limite finito.

**► Exemplo 2** As duas primeiras sequências na Figura 9.1.2 divergem, enquanto que as duas restantes convergem para 1, isto é,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} \left[1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right] = 1 \ \blacktriangleleft$$

O teorema a seguir, que daremos sem prova, mostra que as propriedades usuais de limites aplicam-se a sequências. O teorema garante, ainda, que as técnicas algébricas usadas no cálculo de limites da forma $\lim_{x \to +\infty}$ também podem ser usadas para limites da forma $\lim_{n \to +\infty}$.

**9.1.3 TEOREMA** *Suponha que as sequências* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *convirjam respectivamente para* $L_1$ *e* $L_2$ *e que* $c$ *seja uma constante. Então,*

(a) $\lim_{n \to +\infty} c = c$

(b) $\lim_{n \to +\infty} ca_n = c \lim_{n \to +\infty} a_n = cL_1$

(c) $\lim_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to +\infty} a_n + \lim_{n \to +\infty} b_n = L_1 + L_2$

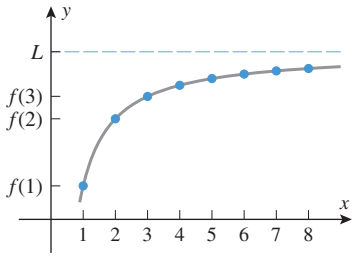
(d) $\lim_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to +\infty} a_n - \lim_{n \to +\infty} b_n = L_1 - L_2$

(e) $\lim_{n \to +\infty} (a_n b_n) = \lim_{n \to +\infty} a_n \cdot \lim_{n \to +\infty} b_n = L_1 L_2$

(f) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \to +\infty} a_n}{\lim_{n \to +\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}$ *(se* $L_2 \neq 0$*)*

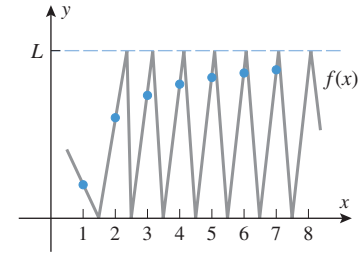
Propriedades adicionais de limites decorrem das propriedades no Teorema 9.1.3. Por exemplo, use a parte *e* para mostrar que se $a_n \to L$ e se $m$ for um inteiro positivo, então

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n)^m = L^m$$




Se $f(x) \to L$ quando $x \to +\infty$, então $f(n) \to L$ quando $n \to +\infty$.

(*a*)




$f(n) \to L$ quando $n \to +\infty$, mas $f(x)$ diverge por oscilações quando $x \to +\infty$.

(*b*)

**Figura 9.1.4**

Se o termo geral de uma sequência for $f(n)$, em que $f(x)$ é uma função definida em todo o intervalo $[1, +\infty)$, então os valores de $f(n)$ podem ser vistos como "valores amostrais" de $f(x)$ tomados nos inteiros positivos. Assim,

$$\text{se } f(x) \to L \text{ quando } x \to +\infty, \quad \text{então} \quad f(n) \to L \text{ quando } n \to +\infty$$

(Figura 9.1.4*a*). Porém, a recíproca não é verdadeira; isto é, não se pode inferir que $f(x) \to L$ quando $x \to +\infty$ a partir do fato de que $f(n) \to L$ quando $n \to +\infty$ (Figura 9.1.4*b*).

**► Exemplo 3** Em cada parte, determine se a sequência converge ou diverge examinando o limite quando $n \to +\infty$.

$$\text{(a)} \left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty} \qquad \text{(b)} \left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$$

$$\text{(c)} \left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty} \qquad \text{(d)} \ \{8-2n\}_{n=1}^{+\infty}$$

***Solução (a)*** Dividindo por $n$ o numerador e o denominador e usando o Teorema 9.1.3, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+1/n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} 1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(2+1/n)} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} 1}{\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \lim\limits_{n\to+\infty} 1/n}$$

$$= \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Assim, a sequência converge para $\frac{1}{2}$.

***Solução (b)*** Essa sequência é a mesma que a da parte (a), exceto pelo fator $(-1)^{n+1}$, que oscila entre $+1$ e $-1$. Assim, os termos nessa sequência oscilam entre valores positivos e negativos, sendo que os termos com número de posição ímpar são idênticos aos da parte (a) e os termos com número de posição par são os negativos dos termos da parte (a). Uma vez que a sequência na parte (a) tem um limite de $\frac{1}{2}$, tem-se que os termos de posição ímpar nessa sequência tendem a $\frac{1}{2}$, enquanto que os termos de posição par tendem a $-\frac{1}{2}$. Logo, essa sequência não tem limite; ela diverge.

***Solução (c)*** Uma vez que $1/n \to 0$, o produto $(-1)^{n+1}(1/n)$ oscila entre valores positivos e negativos, sendo que os termos de posição ímpar tendem a zero através de valores positivos e os termos de posição par tendem a zero através de valores negativos. Desse modo,

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 0$$

de modo que a sequência converge para zero.

***Solução (d)*** $\lim\limits_{n\to+\infty}(8-2n) = -\infty$, portanto a sequência $\{8-2n\}_{n=1}^{+\infty}$ diverge. ◄

**► Exemplo 4** Em cada parte, determine se a sequência converge e, caso positivo, encontre seu limite.

$$\text{(a)} \ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots \qquad \text{(b)} \ 1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$$

***Solução*** Substituindo $n$ por $x$ na primeira sequência, obtemos a função potência $(1/2)^x$, e substituindo $n$ por $x$ na segunda sequência, obtemos a função potência $2^x$. Lembre, ago-

ra, que se $0 < b < 1$, então $b^x \to 0$ quando $x \to +\infty$ e, se $b > 1$, então $b^x \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ (Figura 0.5.1, do Volume 1). Assim,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$$

de modo que a sequência $\{1/2n\}$ converge a 0, mas a sequência $\{2^n\}$ diverge.

**► Exemplo 5** Encontre o limite da sequência $\left\{\frac{n}{e^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$.

***Solução*** A expressão

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n}$$

é uma forma indeterminada do tipo $\infty/\infty$ quando $n \to +\infty$, logo pensamos na regra de L'Hôpital. No entanto, não podemos aplicar diretamente esta regra a $n/e^n$, pois as funções $n$ e $e^n$ estão definidas somente nos inteiros positivos e, portanto, não são funções diferenciáveis. Para contornar esse problema, vamos estender os domínios dessas funções a todos os números reais, o que aqui implica substituir $n$ por $x$ e aplicar a regra de L'Hôpital ao quociente $x/e^x$. Assim, obtemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

de onde concluímos que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \ \blacktriangleleft$$

**► Exemplo 6** Mostre que $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

***Solução***

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \to +\infty} n^{1/n} = \lim_{n \to +\infty} e^{(1/n)\ln n} = e^0 = 1$$

Pela regra de L'Hôpital aplicada a $(1/x)\ln x$ ◄

Às vezes, os termos de posição par e ímpar comportam-se de forma suficientemente diferente, sendo desejável investigar separadamente a sua convergência. O teorema a seguir, cuja prova será omitida, é útil nesse caso.

**9.1.4 TEOREMA** *Uma sequência converge para um limite L se, e somente se, ambas as sequências dos termos de posição par e dos termos de posição ímpar convergem para L.*

**► Exemplo 7** A sequência

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \ldots$$

converge para zero, uma vez que as sequências dos termos de posição par e ímpar convergem ambas para zero, e a sequência

$$1, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{1}{4}, \ldots$$

diverge, uma vez que a sequência dos termos ímpares converge para 1 e a dos pares, para 0. ◄

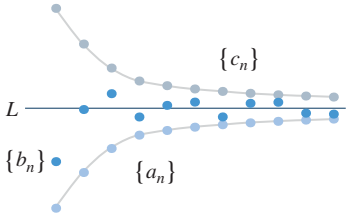



**Figura 9.1.5**

## ■ TEOREMA DO CONFRONTO PARA SEQUÊNCIA

O teorema a seguir, ilustrado na Figura 9.1.5 e que daremos sem prova, é uma adaptação do Teorema do Confronto (1.6.4, no Volume 1) para sequências. Este teorema será útil para encontrar limites de sequências, que não podem ser obtidos diretamente.

**9.1.5 TEOREMA** (***Teorema do Confronto para Sequências***) *Sejam* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *sequências tais que*

$$a_n \le b_n \le c_n \quad \text{(com quaisquer valores de } n \text{ maiores do que algum índice } N\text{)}$$

*Se as sequências* $\{a_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *tiverem um limite comum* $L$ *quando* $n \to +\infty$, *então* $\{b_n\}$ *também terá o limite* $L$ *quando* $n \to +\infty$.

Lembre-se de que, se $n$ for um inteiro positivo, então $n!$ (lê-se "$n$ fatorial") é o produto dos $n$ primeiros inteiros positivos. Além disso, é conveniente definir $0! = 1$.

► **Exemplo 8** Use uma evidência numérica para fazer uma conjectura sobre o limite da sequência

$$\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$$

e, então, confirme que ela está correta.

**Tabela 9.1.4**

| $n$ | $\frac{n!}{n^n}$ |
|---|---|
| 1 | 1,0000000000 |
| 2 | 0,5000000000 |
| 3 | 0,2222222222 |
| 4 | 0,0937500000 |
| 5 | 0,0384000000 |
| 6 | 0,0154320988 |
| 7 | 0,0061198990 |
| 8 | 0,0024032593 |
| 9 | 0,0009366567 |
| 10 | 0,0003628800 |
| 11 | 0,0001399059 |
| 12 | 0,0000537232 |

***Solução*** A Tabela 9.1.4 obtida com um recurso computacional sugere que o limite da sequência possa ser zero. Para confirmar isso, precisamos examinar o limite de

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

quando $n \to +\infty$. Embora isso seja uma forma indeterminada do tipo $\infty/\infty$, a regra de L'Hôpital não ajuda, pois não temos definição de $x!$ com valores não inteiros de $x$. No entanto, vamos escrever alguns termos da sequência:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{9} < \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{32} < \frac{1}{4}, \cdots$$

Se $n = 1$, podemos reescrever o termo geral como

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdots n}\right)$$

do que segue que $a_n \le 1/n$ (por quê?). Agora é evidente que

$$0 \le a_n \le \frac{1}{n}$$

Entretanto, as duas expressões de fora têm o limite 0 quando $n \to +\infty$; assim, o Teorema do Confronto para Sequências implica que $a_n \to 0$ quando $n \to +\infty$, o que confirma a nossa conjectura. ◄

O teorema a seguir é frequentemente útil para encontrar o limite de uma sequência com termos positivos e negativos – ele afirma que se a sequência $\{|a_n|\}$ que é obtida tomando-se o valor absoluto de cada termo de uma sequência $\{a_n\}$ converge para 0, então $\{a_n\}$ também converge para 0.

**9.1.6 TEOREMA** Se $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

**DEMONSTRAÇÃO** Dependendo do sinal de $a_n$, ou $a_n = |a_n|$ ou $a_n = -|a_n|$. Assim, em todos os casos temos

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|$$

Contudo, o limite dos dois termos externos é 0 e, portanto, o limite de $a_n$ é 0 pelo Teorema do Confronto para Sequências. ■

► **Exemplo 9** Considere a sequência

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{2^n}, \ldots$$

Se tomarmos o valor absoluto de cada termo, obteremos a sequência

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

que, conforme mostrado no Exemplo 4, converge para 0. Assim, pelo Teorema 9.1.6, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \left[ (-1)^n \frac{1}{2^n} \right] = 0 \quad \blacktriangleleft$$

## SEQUÊNCIAS DEFINIDAS RECURSIVAMENTE

Algumas sequências não surgem de uma fórmula para o termo geral, mas em vez disso de uma fórmula ou conjunto de fórmulas que especificam como gerar cada termo da sequência a partir dos termos que o precedem; dizemos que tais sequências são definidas ***recursivamente***, e chamamos as fórmulas que as definem de ***fórmulas de recursão***. Um bom exemplo disso é a regra mecânica para aproximar raízes quadradas. No Exercício 25 da Seção 4.7 (ver Volume 1), pedimos ao leitor que mostre que

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{2}$$

descreve a sequência produzida pelo Método de Newton para aproximar $\sqrt{a}$ como um zero da função $f(x) = x^2 - a$. A Tabela 9.1.5 mostra os cinco primeiros termos na aplicação da regra mecânica para aproximar $\sqrt{2}$.

**Tabela 9.1.5**

| $n$ | $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ | APROXIMAÇÃO DECIMAL |
|---|---|---|
| | $x_1 = 1$ (Valor inicial) | 1,00000000000 |
| 1 | $x_2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{1}\right] = \frac{3}{2}$ | 1,50000000000 |
| 2 | $x_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}\right] = \frac{17}{12}$ | 1,41666666667 |
| 3 | $x_4 = \frac{1}{2}\left[\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12}\right] = \frac{577}{408}$ | 1,41421568627 |
| 4 | $x_5 = \frac{1}{2}\left[\frac{577}{408} + \frac{2}{577/408}\right] = \frac{665.857}{470.832}$ | 1,41421356237 |
| 5 | $x_6 = \frac{1}{2}\left[\frac{665.857}{470.832} + \frac{2}{665.857/470.832}\right] = \frac{886.731.088.897}{627.013.566.048}$ | 1,41421356237 |

Sairíamos muito do contexto se examinássemos a convergência de sequências definidas recursivamente, porém concluiremos esta seção com uma técnica útil que pode, algumas vezes, ser usada para calcular os limites de tais sequências.

► **Exemplo 10** Supondo que a sequência na Tabela 9.1.5 convirja, mostre que o limite é $\sqrt{2}$.

***Solução*** Supondo que $x_n \to L$, queremos determinar $L$. Como $n+1 \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, é também verdade que $x_{n+1} \to L$ quando $n \to +\infty$. Assim, se tomarmos o limite da expressão

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

quando $n \to +\infty$, obteremos

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right)$$

que pode ser reescrita como $L^2 = 2$. A solução negativa dessa equação é impossível pois $x_n > 0$ com qualquer $n$, logo $L = \sqrt{2}$. ◀

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.1 (*Ver página 607 para respostas.*)

**1.** Considere a sequência 4, 6, 8, 10, 12,....

(a) Se $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ denotar essa sequência, então $a_1 =$ _____, $a_4 =$ _____ e $a_7 =$ _____. O termo geral é $a_n =$ _____.

(b) Se $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$ denota essa sequência, então $b_0 =$ _____, $b_4 =$ _____ e $b_8 =$ _____. O termo geral é $b_n =$ _____.

**2.** O que significa dizer que uma sequência $\{a_n\}$ *converge*?

**3.** Considere as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, tais que $a_n \to 2$ quando $n \to +\infty$ e $b_n = (-1)^n$. Determine quais das seguintes sequências convergem e quais divergem. Se uma sequência converge, indique seu limite.

(a) $\{b_n\}$ (b) $\{3a_n - 1\}$ (c) $\{b_n^2\}$

(d) $\{a_n + b_n\}$ (e) $\left\{\dfrac{1}{a_n^2 + 3}\right\}$ (f) $\left\{\dfrac{b_n}{1.000}\right\}$

**4.** Suponha que $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sejam sequências tais que $a_n \le b_n \le c_n$, com $n \ge 10$, e que $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ convirjam para 12. Então o Teorema _____ para Sequências implica que $\{b_n\}$ converge para _____.

## EXERCÍCIOS 9.1 Recurso Gráfico

**1.** Em cada parte, encontre a fórmula para o termo geral da sequência, começando com $n = 1$.

(a) $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \ldots$ (b) $1, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}, \ldots$

(c) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{8}, \ldots$ (d) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}, \dfrac{9}{\sqrt[4]{\pi}}, \dfrac{16}{\sqrt[5]{\pi}}, \ldots$

**2.** Em cada parte, encontre duas fórmulas para o termo geral da sequência, uma começando com $n = 1$ e a outra com $n = 0$.

(a) $1, -r, r^2, -r^3, \ldots$ (b) $r, -r^2, r^3, -r^4, \ldots$

**3.** (a) Escreva os quatro primeiros termos da sequência $\{1+(-1)^n\}$, começando com $n = 0$.

(b) Escreva os quatro primeiros termos da sequência $\{\cos n\pi\}$, começando com $n = 0$.

(c) Use os resultados nas partes (a) e (b) para expressar o termo geral da sequência 4, 0, 4, 0,... de duas formas diferentes, começando com $n = 0$.

**4.** Em cada parte, encontre a fórmula para o termo geral usando fatoriais e começando com $n = 1$.

(a) $1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8, \ldots$

(b) $1, 1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7, \ldots$

**5-6** Seja $f$ a função $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ e defina as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ por $a_n = f(2n)$ e $b_n = f(2n+1)$. ■

**5.** (a) Existe $\lim_{x \to +\infty} f(x)$? Explique.

(b) Calcule $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ e $a_5$.

(c) $\{a_n\}$ converge? Se convergir, encontre o limite.

**6.** (a) Calcule $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ e $b_5$.

(b) $\{b_n\}$ converge? Se convergir, encontre o limite.

(c) $\{f(n)\}$ converge? Se convergir, encontre o limite.

**7-22** Escreva os cinco primeiros termos da sequência, determine se ela converge e, se isso acontecer, encontre o limite. ■

**7.** $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **8.** $\left\{\dfrac{n^2}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **9.** $\{2\}_{n=1}^{+\infty}$

**10.** $\left\{\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **11.** $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **12.** $\left\{n \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**13.** $\{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$ **14.** $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**15.** $\left\{(-1)^n \dfrac{2n^3}{n^3+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **16.** $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**17.** $\left\{\dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **18.** $\left\{\dfrac{\pi^n}{4^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**19.** $\{n^2 e^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$ **20.** $\{\sqrt{n^2+3n} - n\}_{n=1}^{+\infty}$

**21.** $\left\{\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **22.** $\left\{\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**23-30** Encontre o termo geral da sequência, começando com $n = 1$, determine se a sequência converge e, se isso acontecer, encontre o limite. ■

**23.** $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{8}, \ldots$ **24.** $0, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{2}{3^2}, \dfrac{3}{4^2}, \ldots$

**25.** $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, -\dfrac{1}{81}, \ldots$ **26.** $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

**27.** $\left(1-\dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right), \left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{4}\right), \ldots$

**28.** $3, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2^2}, \dfrac{3}{2^3}, \ldots$

**29.** $(\sqrt{2}-\sqrt{3}), (\sqrt{3}-\sqrt{4}), (\sqrt{4}-\sqrt{5}), \ldots$

**30.** $\dfrac{1}{3^5}, -\dfrac{1}{3^6}, \dfrac{1}{3^7}, -\dfrac{1}{3^8}, \ldots$

**31-34 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**31.** Sequências são funções.

**32.** Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências tais que $\{a_n + b_n\}$ converge, então $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ também convergirão.

**33.** Se $\{a_n\}$ divergir, então $a_n \to +\infty$ ou $a_n \to -\infty$.

**34.** Se o gráfico de $y = f(x)$ tiver uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$, então a sequência $\{f(n)\}$ convergirá.

**35-36** Use evidência numérica para fazer uma conjectura sobre o limite da sequência e, então, use o Teorema do Confronto para Sequências (Teorema 9.1.5) para confirmar se sua conjectura está correta. ■

**35.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{n}$ **36.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1+n}{2n}\right)^n$

## ENFOCANDO CONCEITOS

**37.** Dê dois exemplos de sequências cujos termos estejam entre $-10$ e 10 e que não convirjam. Use os gráficos dessas sequências para explicar suas propriedades.

**38.** (a) Suponha que $f$ satisfaça $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. É possível que a sequência $\{f(1/n)\}$ convirja? Explique.
(b) Encontre uma função $f$ tal que $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ não exista, mas a sequência $\{f(1/n)\}$ convirja.

**39.** (a) Começando com $n = 1$, escreva os seis primeiros termos da sequência $\{a_n\}$, onde

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ n, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

(b) Começando com $n = 1$, e considerando separadamente os termos pares e ímpares, encontre uma fórmula para o termo geral da sequência

$$1, \frac{1}{2^2}, 3, \frac{1}{2^4}, 5, \frac{1}{2^6}, \ldots$$

(c) Começando com $n = 1$, e considerando separadamente os termos pares e ímpares, encontre uma fórmula para o termo geral da sequência

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \ldots$$

(d) Determine se as sequências nas partes (a), (b) e (c) convergem. Em caso afirmativo, encontre o limite.

**40.** Com quais valores positivos de $b$ a sequência $b, 0, b^2, 0, b^3, 0, b^4, \ldots$ converge? Justifique sua resposta.

**41.** Supondo que a sequência dada pela Fórmula (2) desta seção convirja, use o método do Exemplo 10 para mostrar que o limite dessa sequência é $\sqrt{a}$.

**42.** Considere a sequência

$$a_1 = \sqrt{6}$$
$$a_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}}$$
$$a_3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$$
$$a_4 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$$
$$\vdots$$

(a) Encontre uma fórmula de recursão para $a_{n+1}$.
(b) Supondo que a sequência convirja, use o método do Exemplo 10 para encontrar o limite.

**43.** (a) Um estudante entediado entra com o número 0,5 em uma calculadora e calcula repetidamente o quadrado do número no visor. Tomando-se $a_0 = 0{,}5$, encontre uma fórmula para o termo geral da sequência $\{a_n\}$ de números que aparecem no visor.
(b) Tente isso com uma calculadora e faça uma conjectura sobre o limite de $a_n$.
(c) Confirme sua conjectura calculando o limite de $a_n$.
(d) Com quais valores de $a_0$ esse procedimento produz uma sequência convergente?

**44.** Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 0{,}5 \\ 2x-1, & 0{,}5 \le x < 1 \end{cases}$$

A sequência $f(0{,}2), f(f(0{,}2)), f(f(f(0{,}2))),\ldots$ converge? Justifique sua resposta.

**45.** (a) Use um recurso computacional para gerar o gráfico da equação $y = (2^x + 3^x)^{1/x}$ e, então, use-o para fazer uma conjectura sobre o limite da sequência

$$\{(2^n + 3^n)^{1/n}\}_{n=1}^{+\infty}$$

(b) Confirme sua conjectura calculando o limite.

**46.** Considere a sequência $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, cujo enésimo termo é

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)}$$

Mostre que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ln 2$ interpretando $a_n$ como a soma de Riemann de uma integral definida.

**47.** A sequência cujos termos são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... é chamada de ***sequência de Fibonacci*** em homenagem a Leonardo ("Fibonacci") da Pisa (1170-1250). Essa sequência tem a propriedade de, começando com dois "1", cada termo ser a soma dos dois precedentes.

(a) Denotando a sequência por $\{a_n\}$ e começando por $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$, mostre que

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \text{se } n \geq 1$$

(b) Dê um argumento razoável para mostrar que se a sequência $\{a_{n+1}/a_n\}$ converge para algum limite $L$, então a sequência $\{a_{n+2}/a_{n+1}\}$ deve convergir para o mesmo limite $L$.

(c) Supondo que a sequência $\{a_{n+1}/a_n\}$ convirja, mostre que o seu limite é $(1 + \sqrt{5})/2$.

**48.** Se aceitarmos o fato de que a sequência $\{1/n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge para o limite $L = 0$, então, de acordo com a Definição 9.1.2, para todo $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo $N$ tal que $|a_n - L| = |(1/n) - 0| < \epsilon$ quando $n \geq N$. Em cada parte, encontre o menor valor de $N$ possível para o valor de $\epsilon$ dado

(a) $\epsilon = 0{,}5$ (b) $\epsilon = 0{,}1$ (c) $\epsilon = 0{,}001$

**49.** Se aceitarmos o fato de que a sequência

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$$

converge para o limite $L = 1$, então, de acordo com a Definição 9.1.2, para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro $N$ tal que

$$|a_n - L| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon$$

quando $n \geq N$. Em cada parte, encontre o menor valor de $N$ para o valor dado de $\epsilon$.

(a) $\epsilon = 0{,}25$ (b) $\epsilon = 0{,}1$ (c) $\epsilon = 0{,}001$

**50.** Use a Definição 9.1.2 para provar que

(a) a sequência $\{1/n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge para 0.

(b) a sequência $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ converge para 1.

**51.** **Texto** Discuta, apresentando exemplos, várias maneiras pelas quais uma sequência pode divergir.

**52.** **Texto** Discuta a convergência da sequência $\{r^n\}$ considerando separadamente os casos $|r| < 1$, $|r| > 1$, $r = 1$ e $r = -1$.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.1

**1.** (a) 4; 10; 16; $2n + 2$ (b) 4; 12; 20; $2n + 4$ **2.** $\lim_{n \to +\infty} a_n$ existe **3.** (a) diverge (b) converge para 5 (c) converge para 1 (d) diverge (e) converge para $\frac{1}{7}$ (f) diverge **4.** do Confronto; 12

# 9.2 SEQUÊNCIAS MONÓTONAS

*Há muitas situações nas quais é importante saber se uma sequência converge, sendo, todavia, irrelevante para o problema o valor do limite. Nesta seção, vamos estudar várias técnicas que podem ser usadas para determinar se uma sequência converge.*

## TERMINOLOGIA

Começamos com alguma terminologia.

**9.2.1** **DEFINIÇÃO** Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ é denominada

| | |
|---|---|
| ***estritamente crescente*** se | $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ |
| ***crescente*** se | $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ |
| ***estritamente decrescente*** se | $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$ |
| ***decrescente*** se | $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$ |

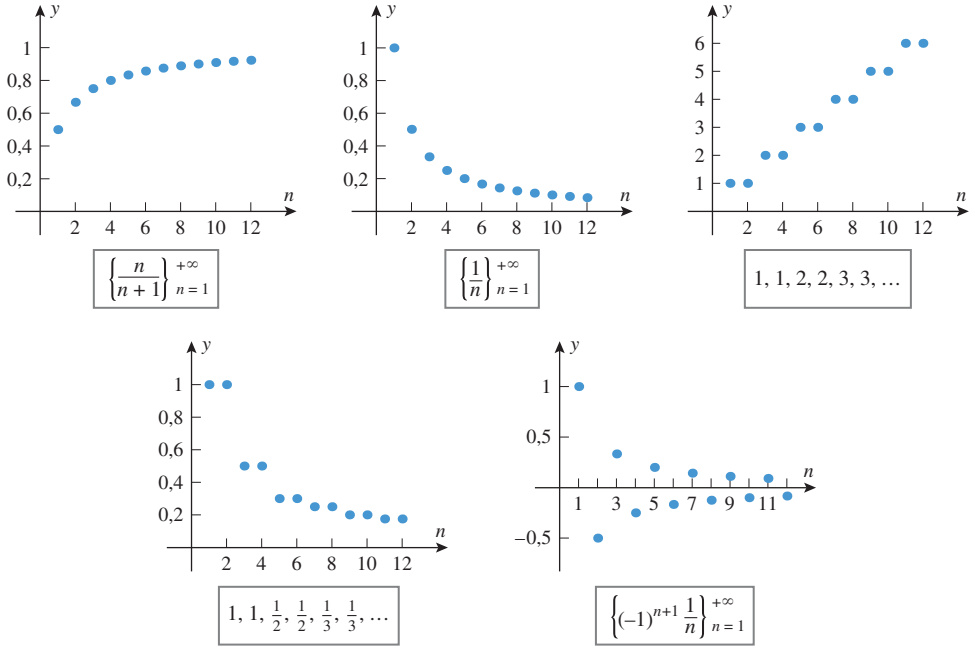
Uma sequência que é ou crescente ou decrescente é denominada ***monótona***, e uma sequência que é ou estritamente crescente ou estritamente decrescente é denominada ***estritamente monótona***.

Observe que uma sequência crescente não precisa ser estritamente crescente e que uma sequência decrescente não precisa ser estritamente decrescente.

Alguns exemplos são dados na Tabela 9.2.1, com os gráficos correspondentes na Figura 9.2.1. A primeira e a segunda sequências da Tabela 9.2.1 são estritamente monótonas; a terceira e a quarta sequências são monótonas, mas não estritamente monótonas; e a quinta sequência não é estritamente monótona nem monótona.

**Tabela 9.2.1**

| SEQUÊNCIA | DESCRIÇÃO |
|---|---|
| $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ | Estritamente crescente |
| $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ | Estritamente decrescente |
| $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ | Crescente, mas não estritamente crescente |
| $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$ | Decrescente, mas não estritamente decrescente |
| $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots$ | Nem crescente, nem decrescente |




Pode uma sequência ser tanto crescente quanto decrescente? Explique.

**Figura 9.2.1**

## TESTE DE MONOTONICIDADE

Frequentemente, é possível *adivinhar* se uma sequência dada é monótona ou estritamente monótona escrevendo alguns de seus primeiros termos. Contudo, para termos certeza de que nosso palpite está correto, devemos fornecer um argumento matemático preciso. A Tabela 9.2.2 fornece duas maneiras de fazer isso, uma baseada na diferença de dois termos sucessivos e a outra, na razão de termos sucessivos. Nesse último caso, está implícito que os termos são positivos. Devemos mostrar que as condições especificadas valem para *todos* os pares de termos sucessivos.

**Tabela 9.2.2**

| DIFERENÇA ENTRE TERMOS SUCESSIVOS | RAZÃO DE TERMOS SUCESSIVOS | CONCLUSÃO |
|---|---|---|
| $a_{n+1} - a_n > 0$ | $a_{n+1}/a_n > 1$ | Estritamente crescente |
| $a_{n+1} - a_n < 0$ | $a_{n+1}/a_n < 1$ | Estritamente decrescente |
| $a_{n+1} - a_n \geq 0$ | $a_{n+1}/a_n \geq 1$ | Crescente |
| $a_{n+1} - a_n \leq 0$ | $a_{n+1}/a_n \leq 1$ | Decrescente |

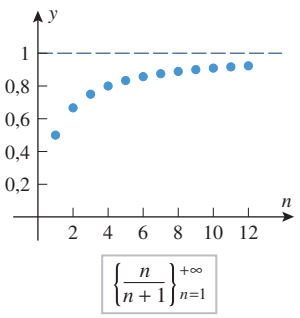



**Figura 9.2.2**

**► Exemplo 1** Use diferenças de termos sucessivos para mostrar que

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

(Figura 9.2.2) é uma sequência estritamente crescente.

***Solução*** O padrão dos termos iniciais sugere que a sequência é estritamente crescente. Para provar isso, seja

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

Podemos obter $a_{n+1}$ substituindo $n$ por $n+1$ na fórmula. Segue que

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Assim, com $n \geq 1$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

o que prova que a sequência é estritamente crescente. ◄

**► Exemplo 2** Mostre que a sequência no Exemplo 1 é estritamente crescente usando razões de termos sucessivos.

***Solução*** Conforme foi mostrado na resolução do Exemplo 1,

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Formando a região de termos sucessivos, obtemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/(n+2)}{n/(n+1)} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \tag{1}$$

do que vemos que $a_{n+1}/a_n > 1$ se $n \geq 1$. Isso prova que a sequência é estritamente crescente. ◄

O exemplo a seguir ilustra uma terceira técnica para determinar se uma sequência é estritamente monótona.

**► Exemplo 3** Nos Exemplos 1 e 2, provamos que a sequência

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

é estritamente crescente considerando a diferença e a razão de termos sucessivos. Alternativamente, podemos proceder da seguinte forma. Seja

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

de modo que o enésimo termo da sequência é $a_n = f(n)$. A função $f$ é crescente com $x \geq 1$, pois

$$f'(x) = \frac{(x+1)(1) - x(1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Assim,

$$a_n = f(n) < f(n+1) = a_{n+1}$$

o que prova que a sequência dada é estritamente crescente. ◄

**Tabela 9.2.3**

| DERIVADA DE $f$ COM $x \geq 1$ | CONCLUSÃO PARA A SEQUÊNCIA COM $a_n = f(n)$ |
|---|---|
| $f'(x) > 0$ | Estritamente crescente |
| $f'(x) < 0$ | Estritamente decrescente |
| $f'(x) \geq 0$ | Crescente |
| $f'(x) \leq 0$ | Decrescente |

Em geral, se $f(n) = a_n$ for o enésimo termo de uma sequência, e se $f$ for diferenciável com $x \geq 1$, então os resultados na Tabela 9.2.3 podem ser usados para investigar a monotonicidade da sequência.

## PROPRIEDADES VÁLIDAS A PARTIR DE UM CERTO TERMO

Às vezes, uma sequência comporta-se erraticamente a princípio e depois se estabiliza em um certo padrão. Por exemplo, a sequência

$$9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{2}$$

é estritamente crescente a partir do quinto termo, mas como um todo não pode ser classificada como estritamente crescente, devido ao comportamento errático dos seus quatro primeiros termos. Para descrever tais sequências, vamos introduzir a seguinte terminologia.

**9.2.2 DEFINIÇÃO** Se ao descartar um número finito de termos do começo de uma sequência for produzida uma sequência com uma certa propriedade, então dizemos que a sequência original tem essa propriedade ***a partir de um certo termo***.

Por exemplo, embora não possamos dizer que a sequência (2) seja estritamente crescente, podemos afirmar que ela é estritamente crescente a partir de um certo termo.

**► Exemplo 4** Mostre que a sequência $\left\{\dfrac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ é estritamente decrescente a partir de um certo termo.

***Solução*** Temos

$$a_n = \frac{10^n}{n!} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$$

portanto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}/(n+1)!}{10^n/n!} = \frac{10^{n+1}n!}{10^n(n+1)!} = 10\frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{10}{n+1} \tag{3}$$

A partir de (3), $a_{n+1}/a_n < 1$ se $n \geq 10$, logo a sequência é estritamente decrescente a partir de um certo termo, como é confirmado pelo gráfico na Figura 9.2.3. ◄

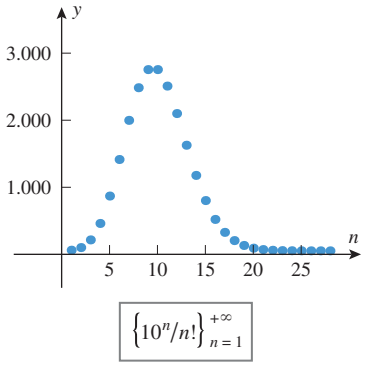



**Figura 9.2.3**

## UMA VISÃO INTUITIVA DA CONVERGÊNCIA

De um modo informal, a convergência ou a divergência de uma sequência não depende do comportamento de seus termos iniciais, mas sim de como os termos se comportam a partir de um certo termo. Por exemplo, a sequência

$$3, -9, -13, 17, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

a partir de um certo termo comporta-se como a sequência

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

e logo tem um limite igual a 0.

## CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS MONÓTONAS

Os dois teoremas a seguir, cujas provas serão discutidas ao final desta seção, mostram que uma sequência monótona ou converge ou torna-se infinita, não podendo ocorrer divergência por oscilação.

**9.2.3 TEOREMA** *Se uma sequência $\{a_n\}$ for crescente a partir de um certo termo, então haverá duas possibilidades*:

(*a*) *Existirá uma constante $M$, chamada de* ***cota superior*** *para a sequência, tal que $a_n \le M$ com qualquer $n$ a partir de um certo termo e, nesse caso, a sequência convergirá para um limite $L$ satisfazendo $L \le M$.*

(*b*) *Não existirá cota superior e, nesse caso,* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

**9.2.4 TEOREMA** *Se uma sequência $\{a_n\}$ for decrescente a partir de um certo termo, então haverá duas possibilidades*:

(*a*) *Existirá uma constante $M$, chamada de* ***cota inferior*** *para a sequência, tal que $a_n \ge M$ com qualquer $n$ a partir de um certo termo e, nesse caso, a sequência convergirá para um limite $L$ satisfazendo $L \ge M$.*

(*b*) *Não existirá cota inferior e, nesse caso,* $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Os Teoremas 9.2.3 e 9.2.4 são exemplos de ***teoremas de existência***; eles nos dizem se um limite existe, mas não dão um método para encontrá-lo.

**► Exemplo 5** Mostre que a sequência $\left\{\dfrac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ converge e encontre o limite.

***Solução*** Mostramos, no Exemplo 4, que a sequência é estritamente decrescente a partir de um certo termo. Uma vez que todos os termos da sequência são positivos, ela está limitada abaixo por $M = 0$, e, portanto, o Teorema 9.2.4 garante que ela converge para um limite não negativo $L$. Porém, o limite não é diretamente evidente da fórmula $10^n/n!$ do enésimo termo, logo precisamos de certa engenhosidade para obtê-lo.

Lembre-se de que na Fórmula (3) do Exemplo 4 vimos que termos sucessivos na sequência dada estão relacionados pela fórmula de recursão

$$a_{n+1} = \frac{10}{n+1}a_n \tag{4}$$

onde $a_n = 10^n/n!$. Vamos tomar o limite quando $n \to +\infty$ em ambos os lados de (4) e usar o fato de que

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

Obtemos

$$L = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{10}{n+1}a_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{10}{n+1}\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \cdot L = 0$$

e, portanto,

$$L = \lim_{n\to+\infty}\frac{10^n}{n!} = 0 \quad \blacktriangleleft$$

Nos exercícios, mostraremos que a técnica ilustrada no último exemplo pode ser adaptada para obter

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!} = 0 \tag{5}$$

com qualquer valor real de $x$ (Exercício 31). Esse resultado será útil posteriormente.

## ■ AXIOMA DA COMPLETUDE

Neste livro, aceitamos sem prova as propriedades usuais dos números reais e, de fato, nem mesmo tentamos definir o termo *número real*. Embora isso seja suficiente para muitos pro-

pósitos, constatou-se, no final do século XIX, que o estudo de limites e funções no Cálculo requer uma formulação axiomática precisa dos números reais, análoga ao desenvolvimento axiomático da Geometria Euclidiana. Embora sem tentar seguir esse desenvolvimento, necessitaremos da discussão de um dos axiomas sobre números reais a fim de provar os Teoremas 9.2.3 e 9.2.4. Vamos, primeiro, introduzir alguma terminologia.

Se $S$ for um conjunto não vazio de números reais, então dizemos que $u$ é uma ***cota superior*** para $S$ se $u$ for maior do que ou igual a todo número de $S$; dizemos que $l$ é uma ***cota inferior*** para $S$ se $l$ for menor do que ou igual a todo número de $S$. Por exemplo, se $S$ for o conjunto dos números no intervalo $(1, 3)$, então $u = 4$, 10 e 100 são cotas superiores para $S$ e $l = -10$, 0 e 0,5 são cotas inferiores para $S$. Observe também que $u = 3$ é a menor de todas as cotas superiores e $l = 1$ é a maior de todas as inferiores. A existência de uma menor cota superior e de uma maior cota inferior de $S$ não é acidental; é uma consequência do axioma seguinte.

**9.2.5** AXIOMA **(*Axioma da Completude*)** *Se um conjunto não vazio $S$ de números reais tiver uma cota superior, então ele terá uma cota superior mínima (chamada de **supremo**), e se um conjunto não vazio $S$ de números reais tiver uma cota inferior, então ele terá uma cota inferior máxima (chamado de **ínfimo**).*

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 9.2.3**

($a$) Demonstraremos o resultado para sequências crescentes e deixaremos a cargo do leitor adaptar o argumento para sequências que são crescentes a partir de um certo termo. Suponha que exista um número $M$ tal que $a_n \le M$ para $n = 1, 2, \ldots$. Então $M$ é uma cota superior para o conjunto de termos da sequência. Pelo axioma da completitude, existe um supremo para os termos; vamos chamá-lo de $L$. Seja agora $\epsilon$ um número positivo. Uma vez que $L$ é o supremo para os termos, $L - \epsilon$ não é uma cota superior para os termos, o que significa que existe pelo menos um termo $a_N$ tal que

$$a_N > L - \epsilon$$

Além disso, como $\{a_n\}$ é uma sequência crescente, devemos ter

$$a_n \ge a_N > L - \epsilon \tag{6}$$

quando $n \ge N$. No entanto, $a_n$ não pode exceder $L$, uma vez que $L$ é uma cota superior para os termos. Essa observação junto com (6) nos diz que $L \ge a_n > L - \epsilon$ com $n \ge N$, logo todos os termos do $N$-ésimo em diante estão a menos de $\epsilon$ unidades de $L$. Isso é exatamente a exigência para ter

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

Finalmente, $L \le M$, pois $M$ é uma cota superior para os termos enquanto que $L$ é o supremo. Isso demonstra a parte ($a$).

($b$) Se não existir um número $M$ tal que $a_n \le M$ com $n = 1, 2, \ldots$, então, não importando quão grande $M$ seja escolhido, haverá um termo $a_N$ tal que

$$a_N > M$$

e, uma vez que a sequência é crescente,

$$a_n \ge a_N > M$$

quando $n \ge N$. Assim, os termos da sequência tornam-se arbitrariamente grandes à medida que $n$ cresce. Ou seja,

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad \blacksquare$$

A demonstração do Teorema 9.2.4 será omitida, uma vez que é similar à do Teorema 9.2.3.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.2 (Ver página 614 para respostas.)

**1.** Classifique cada sequência como (C) crescente, (D) decrescente ou (N) nem crescente nem decrescente.

_____ $\{2n\}$ _____ $\{2^{-n}\}$

_____ $\left\{\dfrac{5-n}{n^2}\right\}$ _____ $\left\{\dfrac{-1}{n^2}\right\}$

_____ $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}$

**2.** Classifique cada sequência como (M) monótona, (E) estritamente monótona ou (N) não monótona.

_____ $\{n+(-1)^n\}$ _____ $\{2n+(-1)^n\}$

_____ $\{3n+(-1)^n\}$

**3.** Como

$$\frac{n/[2(n+1)]}{(n-1)/(2n)} = \frac{n^2}{n^2-1} > _____$$

a sequência $\{(n-1)/(2n)\}$ é estritamente _____.

**4.** Como

$$\frac{d}{dx}[(x-8)^2] > 0 \text{ com } x > _____$$

a sequência $\{(n-8)^2\}$ é _____ crescente _____.

## EXERCÍCIOS 9.2

**1-6** Use a diferença $a_{n+1} - a_n$ para mostrar que a sequência $\{a_n\}$ dada é estritamente crescente ou estritamente decrescente. ■

**1.** $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **2.** $\left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **3.** $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**4.** $\left\{\dfrac{n}{4n-1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **5.** $\{n-2^n\}_{n=1}^{+\infty}$ **6.** $\{n-n^2\}_{n=1}^{+\infty}$

**7-12** Use a razão $a_{n+1}/a_n$ para mostrar que a sequência $\{a_n\}$ dada é estritamente crescente ou estritamente decrescente. ■

**7.** $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **8.** $\left\{\dfrac{2^n}{1+2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **9.** $\{ne^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

**10.** $\left\{\dfrac{10^n}{(2n)!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **11.** $\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **12.** $\left\{\dfrac{5^n}{2^{(n^2)}}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**13-16 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**13.** Se $a_{n+1} - a_n > 0$ com qualquer $n \geq 1$, então a sequência $\{a_n\}$ será estritamente crescente.

**14.** A sequência $\{a_n\}$ será monótona se $a_{n+1} - a_n \neq 0$ com qualquer $n \geq 1$.

**15.** Qualquer sequência limitada converge.

**16.** Se $\{a_n\}$ for crescente a partir de um certo termo, então $a_{100} < a_{200}$.

**17-20** Use diferenciação para mostrar que a sequência dada é estritamente crescente ou estritamente decrescente. ■

**17.** $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **18.** $\left\{\dfrac{\ln(n+2)}{n+2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**19.** $\{\text{arc tg } n\}_{n=1}^{+\infty}$ **20.** $\{ne^{-2n}\}_{n=1}^{+\infty}$

**21-24** Mostre que a sequência dada é, a partir de um certo termo, estritamente crescente ou estritamente decrescente. ■

**21.** $\{2n^2-7n\}_{n=1}^{+\infty}$ **22.** $\left\{\dfrac{n}{n^2+10}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**23.** $\left\{\dfrac{n!}{3^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ **24.** $\{n^5e^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

### ENFOCANDO CONCEITOS

**25.** Suponha que $\{a_n\}$ seja uma sequência monótona tal que $1 \leq a_n \leq 2$ com qualquer $n$. A sequência deve necessariamente convergir? Caso afirmativo, o que pode ser dito sobre o limite?

**26.** Suponha que $\{a_n\}$ seja uma sequência monótona tal que $a_n \leq 2$ com qualquer $n$. A sequência deve necessariamente convergir? Caso afirmativo, o que pode ser dito sobre o limite?

**27.** Seja $\{a_n\}$ a sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ com $n \geq 1$.

(a) Dê os três primeiros termos da sequência.

(b) Mostre que $a_n < 2$ com $n \geq 1$.

(c) Mostre que $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2-a_n)(1+a_n)$ com $n \geq 1$.

(d) Use os resultados nas partes (b) e (c) para mostrar que $\{a_n\}$ é uma sequência estritamente crescente. [*Sugestão*: Se $x$ e $y$ forem números reais positivos tais que $x^2 - y^2 > 0$, então segue por fatoração que $x - y > 0$.]

(e) Mostre que $\{a_n\}$ converge e encontre o seu limite $L$.

**28.** Seja $\{a_n\}$ a sequência definida recursivamente por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2}[a_n + (3/a_n)]$ com $n \geq 1$.

(a) Mostre que $a_n \geq \sqrt{3}$ com $n \geq 2$. [*Sugestão*: Qual é o valor mínimo de $\frac{1}{2}[x + (3/x)]$ com $x > 0$?]

(b) Mostre que $\{a_n\}$ é decrescente a partir de um certo termo [*Sugestão*: Examine $a_{n+1} - a_n$ ou $a_{n+1}/a_n$ e use o resultado da parte (a).]

(c) Mostre que $\{a_n\}$ converge e encontre seu limite $L$.

**29-30** O modelo de Beverton-Holt é utilizado para descrever as variações em uma população de uma geração para a seguinte sob certas condições. Se a população na enésima geração for dada por $x_n$, o modelo de Beverton-Holt prevê que a população na geração seguinte satisfará

$$x_{n+1} = \frac{RKx_n}{K + (R-1)x_n}$$

em que $R$ e $K$ são constantes positivas, com $R > 1$. Nestes exercícios, exploramos propriedades desse modelo populacional. ■

**29.** Seja $\{x_n\}$ a sequência de valores populacionais definidos recursivamente por $x_1 = 60$ e, se $n \geq 1$, então $x_{n+1}$ é dado pelo modelo de Beverton-Holt com $R = 10$ e $K = 300$.
(a) Apresente os quatro primeiros termos da sequência $\{x_n\}$.
(b) Se $0 < x_n < 300$, mostre que $0 < x_{n+1} < 300$. Conclua que $0 < x_n < 300$ com $n \geq 1$.
(c) Mostre que $\{x_n\}$ é crescente.
(d) Mostre que $\{x_n\}$ converge e encontre o limite $L$.

**30.** Seja $\{x_n\}$ a sequência de valores populacionais definidos recursivamente pelo modelo de Beverton-Holt com $x_1 > K$. Suponha que as constantes $R$ e $K$ satisfaçam $R > 1$ e $K > 0$.
(a) Se $x_n > K$, mostre que $x_{n+1} > K$. Conclua que $x_n > K$ com quaisquer $n \geq 1$.
(b) Mostre que $\{x_n\}$ é decrescente.
(c) Mostre que $\{x_n\}$ converge e encontre o limite $L$.

**31.** O objetivo deste exercício é estabelecer a Fórmula (5), a saber, que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Seja $a_n = |x|^n/n!$ e observe que o caso em que $x = 0$ é obvio, de modo que podemos considerar $x \neq 0$.
(a) Mostre que

$$a_{n+1} = \frac{|x|}{n+1} a_n$$

(b) Mostre que a sequência $\{a_n\}$ é estritamente decrescente a partir de um certo termo.
(c) Mostre que a sequência $\{a_n\}$ converge.

**32.** (a) Compare as áreas apropriadas na figura abaixo para deduzir a seguinte desigualdade com $n \geq 2$:

$$\int_1^n \ln x \, dx < \ln n! < \int_1^{n+1} \ln x \, dx$$

(b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}, \quad n > 1$$

(c) Use o Teorema do Confronto para Sequências (Teorema 9.1.5) e o resultado da parte (b) para mostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

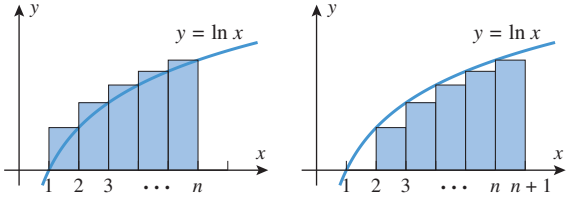



**Figura Ex-32**

**33.** Use a desigualdade à esquerda no Exercício 32(b) para mostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

**34.** **Texto** Dê um exemplo de uma sequência monótona que não seja estritamente monótona a partir de um certo termo. O que deve ser verdade sobre uma tal sequência? Explique.

**35.** **Texto** Discuta o uso apropriado de "a partir de um certo termo" em várias propriedades de sequências. Por exemplo, qual é uma expressão útil, "limitada a partir de um certo termo" ou "monótona a partir de um certo termo"?

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.2

**1.** C; D; N; C; N **2.** N; M; E **3.** 1; crescente **4.** 8; estritamente; a partir de um certo ponto

# 9.3 SÉRIES INFINITAS

*O propósito desta seção é discutir somas com um número infinito de termos. O exemplo mais conhecido de tais somas ocorre na representação decimal de números reais. Por exemplo, quando escrevemos $\frac{1}{3}$ na forma decimal $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$, queremos dizer*

$$\frac{1}{3} = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \cdots$$

*o que sugere que a representação decimal de $\frac{1}{3}$ pode ser encarada como uma soma infinita de números reais.*

## SOMAS DE SÉRIES INFINITAS

Nosso primeiro objetivo é definir o que entendemos pela "soma" de um número infinito de números reais. Comecemos por alguma terminologia.

**9.3.1 DEFINIÇÃO** Uma ***série infinita*** é uma expressão que pode ser escrita na forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

Os números $u_1$, $u_2$, $u_3$,... são chamados de ***termos*** da série.

Como é impossível somar diretamente uma quantidade infinita de números, as somas de séries infinitas são definidas e calculadas por um processo indireto de limite. Para motivar a ideia básica, considere a decimal

$$0{,}3333\ldots \tag{1}$$

Isso pode ser visto como a série infinita

$$0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \cdots$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots \tag{2}$$

Como (1) é a expansão decimal de $\frac{1}{3}$, qualquer definição razoável para a soma de uma série infinita deve fornecer $\frac{1}{3}$ para a soma em (2). Para obter tal definição, considere a seguinte sequência de somas (finitas):

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{3}{10} = 0{,}3 \\ s_2 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} = 0{,}33 \\ s_3 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0{,}333 \\ s_4 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} = 0{,}3333 \\ &\vdots \end{aligned}$$

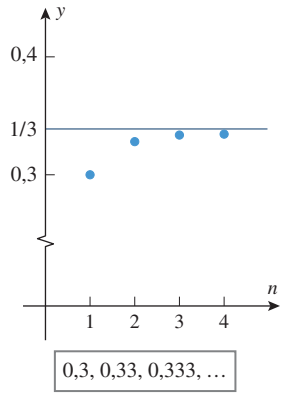



**Figura 9.3.1**

A sequência de números $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$, . . . (Figura 9.3.1) pode ser vista como uma sucessão de aproximações da "soma" da série infinita, que queremos que seja $\frac{1}{3}$. À medida que avançarmos na sequência, cada vez mais termos da série infinita serão usados, e a aproximação ficará cada vez melhor, sugerindo que a soma desejada de $\frac{1}{3}$ deva ser o *limite* desta sequência de aproximações. Para ver que é isso o que ocorre, devemos calcular o limite do termo geral da sequência de aproximações, isto é, de

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} \tag{3}$$

O problema de calcular

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left( \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} \right)$$

é complicado pelo fato de que o último termo e o número de termos na soma variam com $n$. É melhor reescrever tais limites em uma forma fechada na qual o número de termos não varie, se possível. (Veja a discussão sobre formas fechadas e formas abertas que segue o Exemplo 2 na Seção 5.4 do Volume 1). Para isso, multiplicamos ambos os lados de (3) por $\frac{1}{10}$ para obter

$$\frac{1}{10} s_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \frac{3}{10^{n+1}} \tag{4}$$

e, então, subtraímos (4) de (3) para obter

$$s_n - \frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}}$$

$$\frac{9}{10}s_n = \frac{3}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$s_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

Como $1/10^n \to 0$ quando $n \to +\infty$, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{3}$$

o que denotamos escrevendo

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$$

Motivados pelo exemplo precedente, estamos agora prontos para definir o conceito geral de "soma" de uma série infinita

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

Vamos começar por alguma terminologia: denotemos por $s_n$ a soma dos primeiros termos da série, até o termo de índice $n$, inclusive. Assim,

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \end{aligned}$$

O número $s_n$ é chamado de ***enésima soma parcial*** da série, e a sequência $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ é chamada de ***sequência das somas parciais.***

Quando $n$ cresce, a soma parcial $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ inclui mais e mais termos da série. Assim, se $s_n$ tende a um limite quando $n \to +\infty$, é razoável que esse limite seja a soma de *todos* os termos da série. Isso sugere a seguinte definição.

**ADVERTÊNCIA**

Na linguagem do dia a dia, as palavras "sequência" e "série" são consideradas sinônimas. Contudo, em Matemática, há uma diferença entre esses dois termos: uma sequência é uma *sucessão*, e uma série é uma *soma*. É essencial que você tenha em mente essa distinção.

**9.3.2 DEFINIÇÃO** Seja $\{s_n\}$ a sequência das somas parciais da série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

Se a sequência $\{s_n\}$ convergir para um limite $S$, então diremos que a série ***converge*** para $S$ e que $S$ é a ***soma*** da série. Denotamos isso escrevendo

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Se a sequência das somas parciais divergir, diremos que a série ***diverge***. Uma série divergente não tem soma.

**► Exemplo 1** Determine se a série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

converge ou diverge. Se convergir, encontre a soma.

***Solução*** É tentador concluir que a soma da série é zero, argumentando que os termos positivos e negativos se cancelam uns aos outros. Entretanto, isso *não é correto*; o problema é que as operações algébricas que são válidas para somas finitas não podem ser usadas nas séries infinitas. Posteriormente, discutiremos condições sobre operações algébricas comuns que podem ser aplicadas a séries infinitas, porém para este exemplo usaremos diretamente a Definição 9.3.2. As somas parciais são

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 - 1 = 0$$
$$s_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$
$$s_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

e assim por diante. Logo, a sequência das somas parciais é

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

(Figura 9.3.2). Como essa sequência é divergente, a série dada diverge e, consequentemente, não há soma. ◀

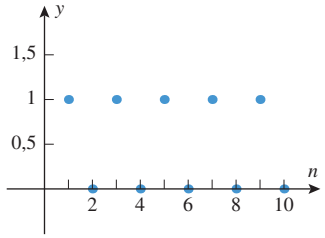



**Figura 9.3.2**

## SÉRIES GEOMÉTRICAS

Em muitas séries importantes, cada termo é obtido multiplicando-se o termo precedente por alguma constante fixada. Assim, se o termo inicial da série for $a$ e cada termo for obtido multiplicando-se o termo precedente por $r$, então a série terá a forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^k + \cdots \quad (a \neq 0) \tag{5}$$

Tais séries são chamadas de ***séries geométricas***, e o número $r$ é chamado de ***razão*** da série. Aqui estão alguns exemplos:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k + \cdots \qquad a = 1, r = 2$$

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^k} + \cdots \qquad a = \tfrac{3}{10}, r = \tfrac{1}{10}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{2^k} + \cdots \qquad a = \tfrac{1}{2}, r = -\tfrac{1}{2}$$

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \qquad a = 1, r = 1$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{k+1} + \cdots \qquad a = 1, r = -1$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots \qquad a = 1, r = x$$

O seguinte teorema é o resultado fundamental na convergência das séries geométricas.

**9.3.3 TEOREMA** *Uma série geométrica*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^k + \cdots \quad (a \neq 0)$$

*converge se* $|r| < 1$ *e diverge se* $|r| \geq 1$. *Se a série convergir, então a soma da série é*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}$$

**DEMONSTRAÇÃO** Tratemos primeiro do caso $|r| = 1$. Se $r = 1$, então a série é

$$a + a + a + a + \cdots$$

Algumas vezes, será desejável começar o índice do somatório de uma série infinita em $k = 0$, em vez de $k = 1$, caso em que consideraríamos $u_0$ como o *zero-ésimo termo* e $s_0 = u_0$ como o *zero-ésimo termo da soma parcial*. Pode-se provar que mudar o valor inicial do índice do somatório de uma série não tem efeito na convergência, na divergência ou na soma da série infinita. Se tivéssemos começado o índice em $k = 1$ na série (5), então essa série seria dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

Como essa expressão é mais complicada que (5), começamos o índice em $k = 0$.

portanto, a enésima soma parcial é $s_n = (n+1)a$ e

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1)a = \pm\infty$$

(o sinal dependendo de $a$ ser postivo ou negativo). Isso prova a divergência. Se $r = -1$, a série é

$$a - a + a - a + \cdots$$

logo, a sequência das somas parciais é

$$a, 0, a, 0, a, 0, \ldots$$

que diverge.

Agora, consideremos o caso $|r| \neq 1$. A enésima soma parcial da série é

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \tag{6}$$

Multiplicando ambos os lados de (6) por $r$, obtemos

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} \tag{7}$$

e subtraindo (7) de (6) obtemos

$$s_n - rs_n = a - ar^{n+1}$$

ou

$$(1-r)s_n = a - ar^{n+1} \tag{8}$$

Uma vez que estamos considerando $r \neq 1$, isso pode ser reescrito como

$$s_n = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r}(1 - r^{n+1}) \tag{9}$$

Note que (6) é uma forma aberta de $s_n$, enquanto (9) é uma forma fechada. Em geral, precisamos de uma forma fechada para calcular o limite.

Se $|r| < 1$, então $r^{n+1}$ tende a 0 quando $n\to+\infty$ (por quê?), de modo que $\{s_n\}$ converge. A partir de (9)

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$$

Se $|r| > 1$, então ou $r > 1$ ou $r < -1$. No caso $r > 1$, $r^{n+1}$ cresce sem cota quando $n\to+\infty$ e, no caso $r < -1$, $r^{n+1}$ oscila entre valores positivos e negativos de magnitude crescente, portanto $\{s_n\}$ diverge em ambos os casos. ■

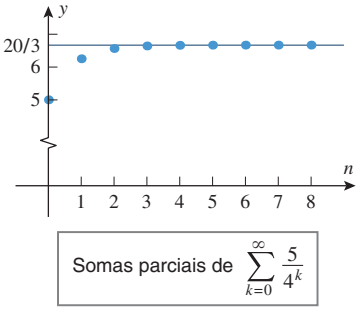



**Figura 9.3.3**

► **Exemplo 2** Em cada parte, determine se a série converge e, nesse caso, encontre sua soma.

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k} \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{2k}5^{1-k}$$

***Solução (a)*** Essa série é geométrica com $a = 5$ e $r = \frac{1}{4}$. Como $|r| = \frac{1}{4} < 1$, a série converge e a soma é

$$\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$$

(Figura 9.3.3).

***Solução (b)*** Essa é uma série geométrica em uma forma disfarçada, uma vez que podemos escrevê-la como

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{2k}5^{1-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9^k}{5^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} 9\left(\frac{9}{5}\right)^{k-1}$$

Como $r = \frac{9}{5} > 1$, a série diverge. ◄

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Os sistemas algébricos de computação têm comandos para obter a soma de séries convergentes. Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para calcular as somas nos Exemplos 2 e 3.

**► Exemplo 3** Encontre o número racional representado pela dízima periódica

$$0{,}784784784\ldots$$

***Solução*** Podemos escrever

$$0{,}784784784\ldots = 0{,}784 + 0{,}000784 + 0{,}000000784 + \cdots$$

portanto a dízima dada é a soma de uma série geométrica com $a = 0{,}784$ e $r = 0{,}001$. Assim,

$$0{,}784784784\ldots = \frac{a}{1-r} = \frac{0{,}784}{1-0{,}001} = \frac{0{,}784}{0{,}999} = \frac{784}{999} \quad \blacktriangleleft$$

**► Exemplo 4** Em cada parte, encontre todos os valores de $x$ com os quais a série converge e encontre a soma da série com esses valores de $x$.

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{(b)} \quad 3 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^3}{8} + \cdots + \frac{3(-1)^k}{2^k}x^k + \cdots$$

***Solução (a)*** A forma expandida da série é

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots$$

A série é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$, logo converge se $|x| < 1$ e, caso contrário, diverge. Quando a série converge, sua soma é

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

***Solução (b)*** Essa série é geométrica com $a = 3$ e $r = -x/2$. A série converge se $|-x/2| < 1$, ou, equivalentemente, se $|x| < 2$. Quando convergir, sua soma é

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(-\frac{x}{2}\right)^k = \frac{3}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{6}{2+x} \quad \blacktriangleleft$$

## ■ SÉRIES TELESCÓPICAS

**► Exemplo 5** Determine se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$$

converge ou diverge. Se convergir, encontre sua soma.

***Solução*** A enésima soma parcial da série é

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Para calcular $\lim_{n\to+\infty} s_n$, reescreveremos $s_n$ em uma forma fechada. Isso pode ser alcançado usando o método das frações parciais para obter (verifique)

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

A soma em (10) é um exemplo de uma ***soma telescópica***. O nome vem do fato de que, na simplificação da soma, uma parcela de cada expressão entre parênteses cancela uma parcela na próxima expressão entre parênteses, até que a soma toda colapse como um telescópio retrátil, restando apenas duas parcelas.

a partir do que obtemos a soma

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1} \\ &= 1-\frac{1}{n+1} \end{aligned} \tag{10}$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1 \blacktriangleleft$$

## SÉRIE HARMÔNICA

Uma das mais importantes de todas as séries divergentes é a ***série harmônica***

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

que surge em conexão com os sons harmônicos produzidos pela vibração de uma corda musical. Não é imediatamente evidente que essa série diverge. Entretanto, a divergência se tornará aparente quando examinarmos as somas parciais em detalhe. Como os termos na série são todos positivos, as somas parciais

$$s_1 = 1,\quad s_2 = 1+\frac{1}{2},\quad s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\quad s_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ldots$$

formam uma sequência estritamente crescente

$$s_1 < s_2 < s_3 < \cdots < s_n < \cdots$$

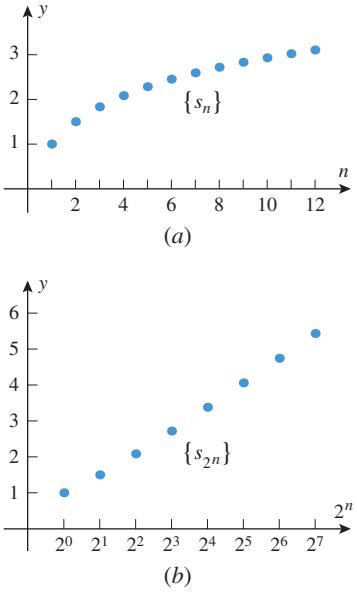
(Figura 9.3.4*a*). Assim, pelo Teorema 9.2.3, podemos provar a divergência demonstrando que não há nenhuma constante $M$ que seja maior do que ou igual a *cada* soma parcial. Para isso, consideraremos algumas somas parciais selecionadas, a saber, $s_2$, $s_4$, $s_8$, $s_{16}$, $s_{32}$, . . . . Note que os índices são potências sucessivas de 2, de modo que essas são as somas parciais da forma $s_{2^n}$ (Figura 9.3.4*b*). Essas somas parciais satisfazem as desigualdades

$$\begin{aligned} s_2 &= 1+\tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{2} \\ s_4 &= s_2+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4} > s_2+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right) = s_2+\tfrac{1}{2} > \tfrac{3}{2} \\ s_8 &= s_4+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8} > s_4+\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}\right) = s_4+\tfrac{1}{2} > \tfrac{4}{2} \\ s_{16} &= s_8+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{14}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{16} \\ &> s_8+\left(\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}\right) = s_8+\tfrac{1}{2} > \tfrac{5}{2} \\ &\vdots \\ s_{2^n} &> \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Se $M$ for uma constante qualquer, podemos encontrar um inteiro positivo $n$ que satisfaça $(n+1)/2 > M$. No entanto, para esse $n$

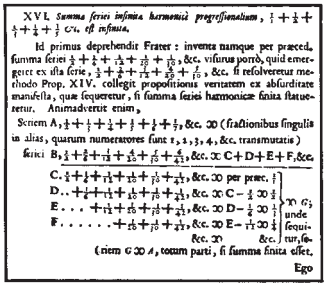
$$s_{2^n} > \frac{n+1}{2} > M$$

de modo que nenhuma constante $M$ é maior do que ou igual a *cada* soma parcial da série harmônica. Isso prova a divergência.




Somas parciais da série harmônica.

**Figura 9.3.4**



XVI. *Summa ſeriei infinitæ harmonicè progreſſionalium*, $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. *eſt infinita.*

Id primus deprehendit Frater: inventa namque per præced. ſumma ſeriei $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$, &c. viſurus porrò, quid emergeret ex illa ſerie, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$, &c. ſi reſolveretur methodo Prop. XIV. collegit propoſitionis veritatem ex abſurditate manifeſta, quæ ſequeretur, ſi ſumma ſeriei harmonicæ finita ſtatueretur. Animadvertit enim,

Scriem A, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$, &c. 20 (fractionibus ſingulis in alias, quarum numeratores ſunt 1, 2, 3, 4, &c. transmutatis) ſerici B, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$, &c. æ C+D+E+F, &c.

C. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$, &c. 20 per prec. $\frac{1}{2}$
D. . $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$, &c. æ C − $\frac{1}{2}$ 20 $\frac{1}{2}$
E . . . $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$, &c. 20 D − $\frac{1}{2}$ 20 $\frac{1}{3}$
F . . . . . $\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$, &c. 20 E − $\frac{1}{12}$ 20 $\frac{1}{4}$
&c. 20 &c.

} æ G; unde ſequitur, ſummam (nem æ 20 A, totam parti, ſi ſumma finita eſſet, Ego

Courtesy Lilly Library, Indiana University

*Esta é uma prova da divergência da série harmônica, como aparece em um apêndice da publicação póstuma de Jacob Bernoulli, Ars Conjectandi, que apareceu em 1713.*

Deve-se essa prova de divergência, que antedata a descoberta do Cálculo, ao bispo e professor francês Nicole Oresme (1323–1382). Essa série acabou atraindo o interesse de Johann e Jakob Bernoulli (p. 700) e levou-os a pensar sobre o conceito geral de convergência, uma ideia nova para a época.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.3 (Ver página 623 para respostas.)

**1.** Em Matemática, os termos "sequência" e "série" não têm o mesmo significado: uma _____ é uma sucessão, enquanto que uma _____ é uma soma.

**2.** Considere a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Se $\{s_n\}$ for a sequência das somas parciais dessa série, então $s_1 =$ _____, $s_2 =$ _____, $s_3 =$ _____, $s_4 =$ _____ e $s_5 =$ _____.

**3.** O que significa dizer que uma série $\sum u_k$ *converge*?

**4.** Uma série geométrica é uma série da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} _____$$

Essa série converge para _____ se _____. Essa série diverge se _____.

**5.** A série harmônica é dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} _____$$

A série harmônica converge ou diverge?

## EXERCÍCIOS 9.3 C CAS

**1-2** Em cada parte, encontre os valores exatos das quatro primeiras somas parciais, encontre a forma fechada para a enésima soma parcial e determine se a série converge calculando o limite da enésima soma parcial. Se a série convergir, obtenha sua soma. ■

**1.** (a) $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \cdots + \frac{2}{5^{k-1}} + \cdots$

(b) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2^2}{4} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{4} + \cdots$

(c) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \cdots$

**2.** (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} 4^{k-1}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right)$

**3-14** Determine se a série converge e, se convergir, encontre sua soma. ■

**3.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

**4.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}$

**5.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{7}{6^{k-1}}$

**6.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^{k+1}$

**7.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

**8.** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$

**9.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 + 3k - 2}$

**10.** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$

**11.** $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k-2}$

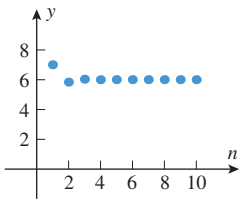
**12.** $\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$

**13.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k+2}}{7^{k-1}}$

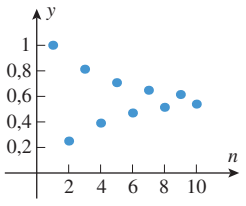
**14.** $\sum_{k=1}^{\infty} 5^{3k} 7^{1-k}$

**15.** Associe uma série de um dos Exercícios 3, 5, 7 ou 9 com o gráfico da sequência de suas somas parciais.

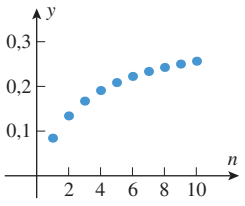
(a)



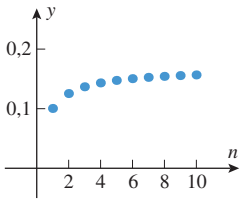

(b)




(c)

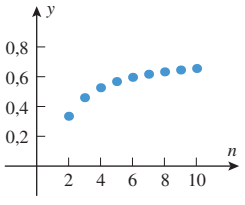



(d)

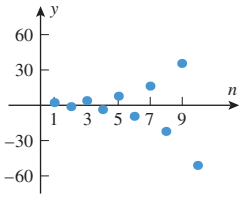



**16.** Associe uma série de um dos Exercícios 4, 6, 8 ou 10 com o gráfico da sequência de suas somas parciais.

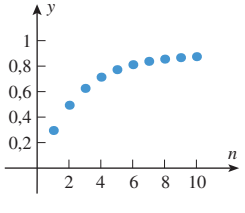
(a)



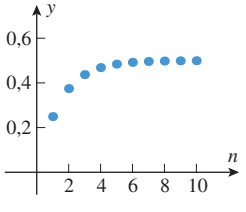

(b)




(c)




(d)



**17-20 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**17.** Uma série infinita converge se a sequência de seus termos convergir.

**18.** A série geométrica $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$ converge desde que $|r| < 1$.

**19.** A série harmônica diverge.

**20.** Uma série infinita converge se a sequência das suas somas parciais for limitada e monótona.

**21-24** Expresse a dízima periódica como uma fração. ■

**21.** 0,9999 …

**22.** 0,4444 …

**23.** 5,373737 …

**24.** 0,451141414 …

**25.** Lembre que *decimal exata* é uma decimal cujos dígitos são todos 0 a partir de algum ponto em diante (0,5 = 0,50000…, por exemplo). Mostre que uma decimal da forma $0{,}a_1a_2 \ldots a_n9999 \ldots$, onde $a_n \neq 9$, pode ser expressa como uma decimal exata.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**26.** O grande matemático suíço Leonhard Euler (biografia na p. 3 do Volume 1) chegou, algumas vezes, a conclusões erradas em seu pioneiro trabalho sobre séries infintas. Por exemplo, Euler deduziu que.

$$\tfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

e

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

substituindo $x = -1$ e $x = 2$ na fórmula

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Qual é o problema com esse raciocínio?

**27.** Uma bola é largada de uma altura de 10 m. Cada vez que bate no chão, ela retorna verticalmente até uma altura que é $\frac{3}{4}$ da altura precedente. Encontre a distância total que a bola percorre, supondo que retorne indeterminadamente.

**28.** A figura abaixo mostra uma "escadaria infinita" construída de cubos. Encontre o volume total da escadaria, dado que o maior dos cubos tem um lado de comprimento 1 e que cada cubo sucessivo tem um lado de comprimento igual à metade do lado do cubo precedente.

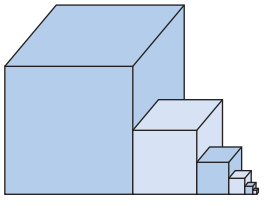


**Figura Ex-28**

**29.** Em cada parte, encontre uma forma fechada para a enésima soma parcial de série e determine se a série converge. Se convergir, encontre sua soma.

(a) $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \cdots + \ln\frac{k}{k+1} + \cdots$

(b) $\ln\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{9}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{16}\right) + \cdots + \ln\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) + \cdots$

**30.** Use séries geométricas para mostrar que

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ se $-1 < x < 1$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k = \frac{1}{4-x}$ se $2 < x < 4$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}$ se $-1 < x < 1$.

**31.** Em cada parte, encontre todos os valores de $x$ com os quais a série converge e encontre a soma da série com aqueles valores de $x$.

(a) $x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \cdots$

(b) $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \frac{8}{x^5} + \frac{16}{x^6} + \cdots$

(c) $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + e^{-5x} + \cdots$

**32.** Mostre que, dado qualquer valor real de $x$,

$$\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^4 x + \cdots = \frac{2\operatorname{sen} x}{2 + \operatorname{sen} x}$$

**33.** Seja $a_1$ um número real qualquer e seja $\{a_n\}$ a sequência definida recursivamente por

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 1)$$

Faça uma conjectura sobre o limite da sequência e confirme sua conjectura expressando $a_n$ em termos de $a_1$ e tomando o limite.

**34.** Mostre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$.

**35.** Mostre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{3}{2}$.

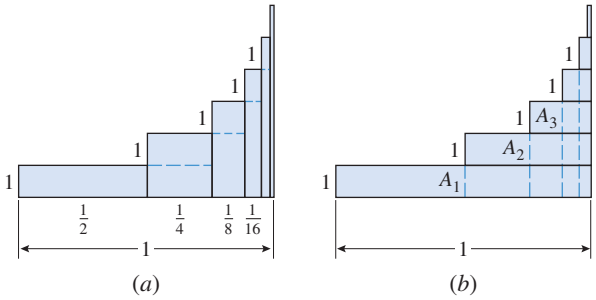
**36.** Mostre que $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots = \frac{3}{4}$.

**37.** Mostre que $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots = \frac{1}{2}$.

**38.** No seu *Tratado sobre a Configuração dos Atributos e Movimentos* (escrito no ano de 1350), o bispo de Lisieux, o francês Nicole Oresme, usou um método geométrico para obter a soma da série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots$$

Na parte (*a*) da figura abaixo, cada termo da série é representado pela área de um retângulo, e na parte (*b*) a configuração na parte (*a*) foi dividida em retângulos com áreas $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Obtenha a soma $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$.




*Fora de escala*

**Figura Ex-38**

**39.** Conforme mostra a figura a seguir, suponha que um ângulo $\theta$ seja bissectado usando régua e compasso para produzir um raio $R_1$, então o ângulo entre $R_1$ e o lado inicial é bissectado para produzir o raio $R_2$. Daí por diante, os raios $R_3$, $R_4$, $R_5$,... são construídos em sucessão bissectando o ângulo entre os dois raios precedentes. Mostre que a sequência dos ângulos que esses raios fazem com o lado inicial dado tem um limite de $\theta/3$.

***Fonte:*** Este problema é baseado no artigo *Trissecção de um Ângulo em um Número Infinito de Passos*, por Eric Kincannon, que apareceu (em inglês) no *The College Mathematics Journal*, Vol. 21, N°5, novembro de 1990.

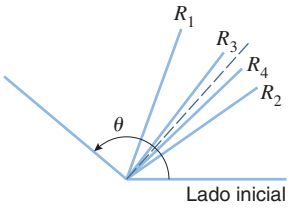



**Figura Ex-39**

C **40.** Em cada parte, use um CAS para encontrar a soma da série, se convergir, e então confirme o resultado calculando a soma manualmente.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}2^k3^{2-k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{3k}}{5^{k-1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$

**41.** **Texto** Discuta as semelhanças e diferenças entre o que significa uma sequência convergir e o que significa uma série convergir.

**42.** **Texto** Leia sobre a dicotomia do paradoxo de Zenon em alguma obra de referência apropriada e relate o paradoxo em algum contexto que lhe seja familiar. Discuta uma conexão entre o paradoxo e a série geométrica.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.3

**1.** sequência; série **2.** $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \frac{15}{16}; 1 - \frac{1}{2^n}$ **3.** A sequência das somas parciais converge.

**4.** $ar^k$ $(a \neq 0)$; $\dfrac{a}{1-r}$; $|r| < 1$; $|r| \geq 1$ **5.** $\dfrac{1}{k}$; diverge

# 9.4 TESTES DE CONVERGÊNCIA

*Na última seção, mostramos como encontrar a soma de uma série encontrando uma forma fechada para a enésima soma parcial e tomando seu limite. Entretanto, é relativamente raro que possamos encontrar uma forma fechada para a enésima soma parcial de uma série, de modo que são necessários métodos alternativos para encontrar a soma de uma série. Uma possibilidade é provar que a série converge e, então, aproximar a soma por uma soma parcial com suficientes termos para atingir o grau de precisão desejado. Nesta seção, desenvolveremos vários testes que podem ser usados para determinar se uma dada série converge ou diverge.*

## O TESTE DA DIVERGÊNCIA

No enunciado de resultados gerais sobre a convergência e a divergência de séries, é conveniente usar a notação $\sum u_k$ como modelo genérico de uma série, evitando, desse modo, o problema de discutir se a soma começa em $k = 0$ ou em $k = 1$, ou ainda em algum outro valor. Na verdade, veremos logo que o valor do índice inicial é irrelevante para a questão da convergência. O $k$-ésimo termo de uma série infinita $\sum u_k$ é chamado de ***termo geral*** da série.

O teorema seguinte estabelece uma relação entre o limite do termo geral e as propriedades de convergência de uma série.

**9.4.1 TEOREMA** (***Teste da Divergência***)

(*a*) *Se* $\lim_{k\to+\infty} u_k \neq 0$, *então a série* $\sum u_k$ *diverge.*

(*b*) *Se* $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$, *então a série* $\sum u_k$ *pode convergir ou divergir.*

**DEMONSTRAÇÃO (*a*)** Para demonstrar esse resultado, é suficiente mostrar que, se a série convergir, então $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$ (por quê?). Vamos demonstrar a parte (*a*) dessa maneira alternativa.

Suponhamos que a série convirja. O termo geral $u_k$ pode ser escrito como

$$u_k = s_k - s_{k-1} \tag{1}$$

onde $s_k$ é a soma dos termos até $u_k$ e $s_{k-1}$ é a soma dos termos até $u_{k-1}$. Se $S$ denotar a soma da série, então $\lim_{k\to+\infty} s_k = S$ e, uma vez que $(k-1) \to +\infty$ quando $k \to +\infty$, temos também $\lim_{k\to+\infty} s_{k-1} = S$. Assim, a partir de (1)

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} (s_k - s_{k-1}) = S - S = 0$$

**DEMONSTRAÇÃO (*b*)** Para demonstrar esse resultado, é suficiente produzir tanto uma série convergente quanto uma divergente para as quais $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$. Ambas as seguintes séries têm essa propriedade:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots \quad \text{e} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots$$

A primeira é uma série geométrica convergente e a segunda é a série harmônica divergente. ■

**ADVERTÊNCIA**

A recíproca do Teorema 9.4.2 é falsa. Mostrar que

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$$

não prova que $\sum u_k$ convirja, pois essa propriedade pode valer tanto para séries divergentes quanto para convergentes. Isso está exemplificado na prova da parte (*b*) do Teorema 9.4.1.

A forma alternativa da parte (*a*) dada na prova precedente é suficientemente importante para ser destacada para referência futura.

**9.4.2 TEOREMA** *Se a série* $\sum u_k$ *convergir, então* $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.

**▶ Exemplo 1** A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{k}{k+1} + \cdots$$

diverge, visto que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{1+1/k} = 1 \neq 0 \quad \blacktriangleleft$$

## ■ PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DAS SÉRIES INFINITAS

Para não estender demais o texto, omitimos a prova do resultado a seguir.

Veja os Exercícios 27 e 28 para explorar o que ocorre quando $\sum u_k$ ou $\sum v_k$ diverge.

**9.4.3 TEOREMA**

(*a*) *Se* $\sum u_k$ *e* $\sum v_k$ *forem séries convergentes, então* $\sum(u_k + v_k)$ *e* $\sum(u_k - v_k)$ *serão séries convergentes, e as somas dessas séries estarão relacionadas por*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k - v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

(*b*) *Se a for uma constante não nula, então ambas as séries,* $\sum u_k$ *e* $\sum au_k$*, convergirão ou divergirão. No caso de convergência, as somas estarão relacionadas por*

$$\sum_{k=1}^{\infty} au_k = a\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

(*c*) *A convergência ou a divergência não é afetada pela retirada de um número finito de termos de uma série; em particular, dado qualquer número inteiro positivo K, as séries*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

$$\sum_{k=K}^{\infty} u_k = u_K + u_{K+1} + u_{K+2} + \cdots$$

*ambas convergem ou ambas divergem.*

**ADVERTÊNCIA**

Entenda bem o item (*c*) do Teorema 9.4.3. Embora a convergência não seja afetada quando um número finito de termos é deletado no começo de uma série convergente, a *soma* da série é alterada pela remoção desses termos.

► **Exemplo 2** Obtenha a soma da série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}}\right)$$

***Solução*** A série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{4^k} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots$$

é uma série geométrica convergente $\left(a = \frac{3}{4}, r = \frac{1}{4}\right)$, e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{5^{k-1}} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \cdots$$

também é uma série geométrica convergente $\left(a = 2, r = \frac{1}{5}\right)$. Assim, pelos Teoremas 9.4.3(*a*) e 9.3.3, a série dada converge e

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{4^k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{5^{k-1}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{3}{2}$$ ◄

► **Exemplo 3** Determine se as seguintes séries convergem ou divergem.

$$\text{(a)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{k}=5+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\cdots+\frac{5}{k}+\cdots \qquad \text{(b)}\ \sum_{k=10}^{\infty}\frac{1}{k}=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots$$

***Solução*** A primeira série é uma constante vezes a série harmônica divergente e, portanto, diverge pela parte (*b*) do Teorema 9.4.3. A segunda série é o resultado de omitir os primeiros termos da série harmônica divergente e, portanto, diverge pela parte (*c*) do Teorema 9.4.3. ◄

## ■ O TESTE DA INTEGRAL

A relação entre as expressões

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$

é que o integrando da integral imprópria resulta quando o índice $k$ do termo geral da série for substituído por $x$ e os limites do somatório da série forem substituídos pelos limites de integração correspondentes. O seguinte teorema mostra que há uma relação entre a convergência da série e a integral.

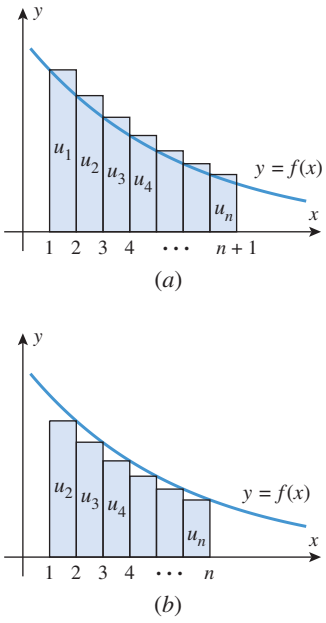



**Figura 9.4.1**

**9.4.4 TEOREMA** ***(Teste da Integral)*** *Seja $\sum u_k$ uma série com termos positivos. Se $f$ for uma função decrescente e contínua no intervalo $[a, +\infty)$ e tal que $u_k = f(k)$ com $k \geq a$, então*

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k \quad e \quad \int_a^{+\infty}f(x)\,dx$$

*ambas convergirão ou ambas divergirão.*

A prova do teste da integral é adiada para o final desta seção. Contudo, o argumento central da prova é capturado na Figura 9.4.1: se a integral divergir, então a série também divergirá (Figura 9.4.1*a*) e se a integral convergir, então a série também convergirá (Figura 9.4.1*b*).

► **Exemplo 4** Mostre que o Teste da Integral é aplicável e use esse teste para determinar se as seguintes séries convergem ou divergem.

$$\text{(a)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \qquad \text{(b)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

***Solução (a)*** Já sabemos que essa é a série harmônica divergente, assim o teste da integral providenciará somente uma outra maneira simples de estabelecer a divergência.

Observe, inicialmente, que a série tem termos positivos, de modo que o teste é aplicável. Se substituirmos $k$ por $x$ no termo geral $1/k$, obteremos a função $f(x) = 1/x$, que é decrescente e contínua com $x \geq 1$ (como exigido para aplicar o teste da integral com $a = 1$). Como

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}[\ln b-\ln 1]=+\infty$$

a integral diverge e, consequentemente, a série também.

**ADVERTÊNCIA**

Na parte (b) do Exemplo 4, *não concluamos* erroneamente que a soma da série é 1, porque o valor da integral correspondente é 1. Podemos ver que isso não ocorre, pois a soma só dos dois primeiros termos já excede 1. Adiante veremos que a soma da série é exatamente $\pi^2/6$.

***Solução (b)*** Observe, inicialmente, que a série tem termos positivos, de modo que o teste é aplicável. Se substituirmos $k$ por $x$ no termo geral $1/k^2$, obtemos a função $f(x) = 1/x^2$, que é decrescente e contínua com $x \geq 1$. Como

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[1-\frac{1}{b}\right] = 1$$

a integral converge e, consequentemente, a série converge pelo teste da integral com $a = 1$. ◀

## ■ SÉRIES *p*

As séries no Exemplo 4 são casos especiais de uma classe de séries chamadas de ***séries p*** ou ***séries hiper-harmônicas***. Uma série $p$ é uma série infinita da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{k^p} + \cdots$$

onde $p > 0$. Exemplos de séries $p$ são

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots \qquad \boxed{p = 1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots \qquad \boxed{p = 2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \cdots \qquad \boxed{p = \tfrac{1}{2}}$$

O seguinte teorema nos mostra quando uma série $p$ converge.

**9.4.5 TEOREMA** **(*Convergência de séries p*)**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{k^p} + \cdots$$

*converge se* $p > 1$ *e diverge se* $0 < p \leq 1$.

**DEMONSTRAÇÃO** Para estabelecer esse resultado quando $p \neq 1$, usaremos o teste da integral.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right]$$

Suponha, inicialmente, que $p > 1$. Então $1 - p < 0$ e, portanto, $b^{1-p} \to 0$ quando $b \to +\infty$. Assim, a integral converge [o valor é $-1/(1-p)$] e, consequentemente, a série também converge.

Suponha, agora, que $0 < p < 1$. Segue que $1 - p > 0$, portanto $b^{1-p} \to +\infty$ quando $b \to +\infty$, logo a integral e a série divergem. O caso $p = 1$ é a série harmônica, que já mostramos que é divergente. ■

### ► Exemplo 5

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{k}} + \cdots$$

diverge uma vez que é uma série $p$ com $p = \frac{1}{3} < 1$. ◀

## PROVA DO TESTE DA INTEGRAL

Antes de podermos provar o teste da integral, necessitamos de um resultado básico sobre a convergência de séries com termos *não negativos*. Se $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$ é uma tal série, então sua sequência de somas parcias é crescente, isto é,

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$$

Assim, pelo Teorema 9.2.3, a sequência das somas parciais converge para um limite $S$ se, e somente se, tiver alguma cota superior $M$, caso em que $S \leq M$. Se não houver cota superior, então a sequência das somas parciais diverge. Como a convergência da sequência das somas parciais corresponde à convergência da série, temos o teorema seguinte.

**9.4.6 TEOREMA** *Se $\sum u_k$ for uma série com termos não negativos, e se existir uma constante $M$ tal que*

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq M$$

*com qualquer $n$, então a série convergirá e a soma $S$ satisfará $S \leq M$. Se não existir nenhum tal $M$, então a série divergirá.*

Em palavras, esse teorema implica que *uma série com termos não negativos converge se, e somente se, a sequência de suas somas parciais for limitada superiormente.*

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 9.4.4** Precisaremos apenas mostrar que a série converge quando a integral converge e que a série diverge quando a integral diverge. Por simplicidade, limitaremos a prova ao caso $a = 1$. Suponha que $f(x)$ satisfaça as hipóteses do teorema com $x \geq 1$. Como

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, \ldots, f(n) = u_n, \ldots$$

os valores de $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ podem ser interpretados como as áreas dos retângulos mostrados na Figura 9.4.2.

As seguintes desigualdades resultam da comparação das áreas sob a curva $y = f(x)$ com as áreas dos retângulos na Figura 9.4.2 com $n > 1$:

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < u_1 + u_2 + \cdots + u_n = s_n \qquad \text{Figura 9.4.2}a$$

$$s_n - u_1 = u_2 + u_3 + \cdots + u_n < \int_1^n f(x)\,dx \qquad \text{Figura 9.4.2}b$$

Essas desigualdades podem ser combinadas como

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < s_n < u_1 + \int_1^n f(x)\,dx \tag{2}$$

Se a integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ convergir para um valor finito $L$, então a partir da desigualdade do lado direito em (2), obtemos

$$s_n < u_1 + \int_1^n f(x)\,dx < u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = u_1 + L$$

Assim, cada soma parcial é menor do que a constante finita $u_1 + L$, e a série converge pelo Teorema 9.4.6. Por outro lado, se a integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ divergir, então

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = +\infty$$

e, portanto, pelo lado esquerdo da desigualdade em (2), decorre que $s_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Isso implica que a série também diverge. ■

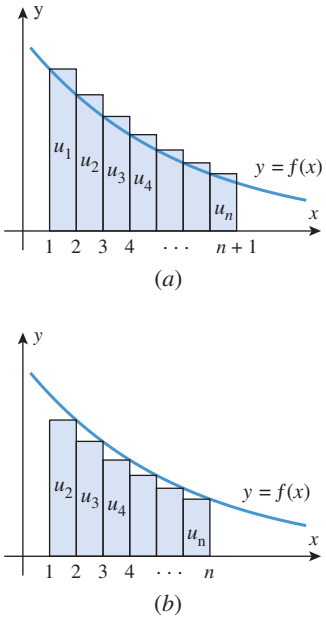



**Figura 9.4.2**

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.4 (Ver página 631 para respostas.)

1. O teste da divergência afirma que se _____ $\neq 0$, então a série $\sum u_k$ diverge.

2. Sabendo que

$$a_1 = 3, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = 5$$

segue que

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k = _____ \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (2a_k + b_k) = _____$$

3. Como $\int_1^{+\infty} (1/\sqrt{x})\,dx = +\infty$, o teste _____ aplicado à série $\sum_{k=1}^{\infty}$ _____ mostra que essa série _____.

4. Uma série $p$ é uma série da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} _____$$

Essa série converge se _____. Essa série diverge se _____.

## EXERCÍCIOS 9.4 Recurso Gráfico C CAS

1. Use o Teorema 9.4.3 para encontrar a soma da série.

(a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{4^k}\right) + \cdots$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} - \frac{1}{k(k+1)}\right)$

2. Use o Teorema 9.4.3 para encontrar a soma da série.

(a) $\sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2 - 1} - \frac{7}{10^{k-1}}\right]$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[7^{-k} 3^{k+1} - \frac{2^{k+1}}{5^k}\right]$

**3-4** Em cada série $p$ dada, identifique $p$ e determine se a série converge. ■

3. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/3}$

4. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{k}}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^5}}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\pi}}$

**5-6** Aplique o teste da divergência e escreva a conclusão obtida sobre a série. ■

5. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k + 3}{2k^2 + 1}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

6. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln k$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + 3}$

**7-8** Confirme ser aplicável o teste da integral e use-o para determinar se a série converge. ■

7. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k + 2}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 9k^2}$

8. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1 + k^2}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4 + 2k)^{3/2}}$

**9-24** Determine se a série converge. ■

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + 6}$ 10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{5k}$ 11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k + 5}}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{e}}$ 13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2k - 1}}$ 14. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\ln(k + 1)}$ 16. $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2}$ 17. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 1}{k^2 + 3}$ 19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{arc tg } k}{1 + k^2}$ 20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{k}\right)$ 22. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k^3}$

23. $\sum_{k=5}^{\infty} 7k^{-1,01}$ 24. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 k$

**25-26** Use o teste da integral para investigar a relação entre o valor de $p$ e a convergência da série. ■

25. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ 26. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)[\ln(\ln k)]^p}$

### ENFOCANDO CONCEITOS

27. Suponha que a série $\sum u_k$ convirja, e a série $\sum v_k$ divirja. Mostre que as séries $\sum(u_k + v_k)$ e $\sum(u_k - v_k)$ ambas divirjam. [*Sugestão:* Suponha que $\sum(u_k + v_k)$ convirja e use o Teorema 9.4.3 para obter uma contradição.]

**28.** Obtenha exemplos para mostrar que se as séries $\sum u_k$ e $\sum v_k$ divergem, então as séries $\sum(u_k + v_k)$ e $\sum(u_k - v_k)$ podem convergir ou divergir.

**29-30** Use os resultados dos Exercícios 27 e 28, se necessário, para determinar se as séries convergem ou divergem. ■

**29.** (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+\frac{1}{k}\right]$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3k+2}-\frac{1}{k^{3/2}}\right]$

**30.** (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{k(\ln k)^2}-\frac{1}{k^2}\right]$ (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left[ke^{-k^2}+\frac{1}{k\ln k}\right]$

**31-34 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**31.** Se $\sum u_k$ convergir a $L$, então $\sum(1/u_k)$ convergirá a $1/L$.

**32.** Se $\sum au_k$ convergir com alguma constante $a$, então $\sum u_k$ divergirá.

**33.** O teste da integral pode ser usado para provar que uma série diverge.

**34.** A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^k}$ é uma série $p$.

C **35.** Use um CAS para confirmar que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

e, então, use esses resultados em cada parte para encontrar a soma das séries.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k^2-1}{k^4}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)^4}$

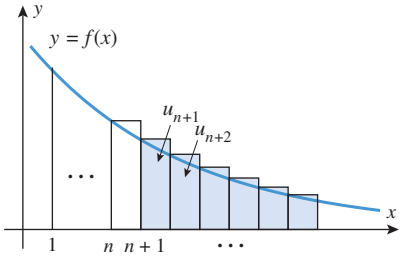
**36-40** O Exercício 36 irá mostrar como uma soma parcial pode ser usada para obter cotas superiores e inferiores da soma da série quando as hipóteses do teste da integral estiverem satisfeitas. Este resultado será necessário nos Exercícios 37 a 40. ■

**36.** (a) Seja $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ uma série convergente de termos positivos, e seja $f(x)$ uma função que é decrescente e contínua em $[n, +\infty)$ e tal que $u_k = f(k)$ para $k \geq n$. Use um argumento envolvendo área e a figura a seguir para mostrar que

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx < \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k < \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx$$

(b) Mostre que se $S$ for a soma da série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ e $s_n$ for a enésima soma parcial, então

$$s_n + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx < S < s_n + \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx$$



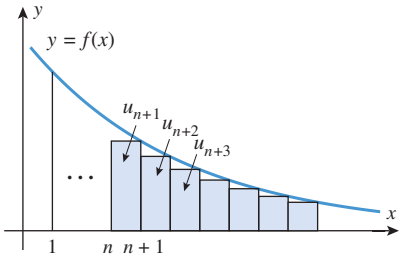




**Figura Ex-36**

**37.** (a) Afirmou-se no Exercício 35 que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Mostre que se $s_n$ for a enésima soma parcial dessa série, então

$$s_n + \frac{1}{n+1} < \frac{\pi^2}{6} < s_n + \frac{1}{n}$$

(b) Calcule exatamente $s_3$ e, então, use o resultado da parte (a) para mostrar que

$$\frac{29}{18} < \frac{\pi^2}{6} < \frac{61}{36}$$

(c) Use um recurso computacional para confirmar que as desigualdades da parte (b) estão corretas.

(d) Obtenha cotas superiores e inferiores para o erro que resulta se a soma da série for aproximada pela décima soma parcial.

**38.** Em cada parte, obtenha cotas superiores e inferiores do erro que resulta se a soma da série for aproximada pela décima soma parcial.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{e^k}$

**39.** Foi afirmado no Exercício 35 que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

(a) Seja $s_n$ a enésima soma parcial da série dada acima. Mostre que

$$s_n + \frac{1}{3(n+1)^3} < \frac{\pi^4}{90} < s_n + \frac{1}{3n^3}$$

(b) Podemos usar uma soma parcial da série para aproximar $\pi^4/90$ com precisão de três casas decimais delimitando a soma dessa série em um intervalo de comprimento 0,001 (ou menor). Encontre o menor valor de $n$ tal que o intervalo contendo $\pi^4/90$ na parte (a) tenha comprimento 0,001 ou menos.

(c) Aproxime $\pi^4/90$ com três casas decimais de precisão usando o ponto médio de um intervalo de comprimento de no máximo 0,001 que contenha a soma da série. Use um recurso computacional para confirmar que sua resposta está a menos de 0,0005 de $\pi^4/90$.

**40.** Mostramos na Seção 9.3 que a série harmônica $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge. Nosso objetivo neste problema é demonstrar que, embora a soma parcial desta série tenda a $+\infty$, ela o faz muito lentamente.

(a) Use a desigualdade (2) para mostrar que para $n \geq 2$

$$\ln(n+1) < s_n < 1 + \ln n$$

(b) Use a desigualdade da parte (a) para encontrar cotas superiores e inferiores para a soma do primeiro milhão de termos da série.

(c) Mostre que a soma do primeiro bilhão de termos da série é menor do que 22.

(d) Obtenha um valor de $n$ tal que a soma dos $n$ primeiros termos seja maior do que 100.

**41.** Use um recurso gráfico computacional para confirmar que o teste da integral é aplicável à série $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$ e, então, determine se a série converge.

**C 42.** (a) Mostre que as hipóteses do teste da integral estão satisfeitas pela série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k^3+1)$.

(b) Use um CAS e o teste da integral para confirmar que a série converge.

(c) Construa uma tabela de somas parciais com $n = 10, 20, 30, \ldots, 100$, mostrando pelo menos seis casas decimais.

(d) Baseado em sua tabela, faça uma conjectura sobre a soma da série com uma precisão de três casas decimais.

(e) Use a parte (b) do Exercício 36 para verificar a sua conjectura.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.4

**1.** $\lim_{k \to +\infty} u_k$ **2.** $-2; 7$ **3.** da integral; $\frac{1}{\sqrt{k}}$; diverge **4.** $\frac{1}{k^p}$; $p > 1$; $0 < p \leq 1$

# 9.5 TESTES DE COMPARAÇÃO, DA RAZÃO E DA RAIZ

*Nesta seção, desenvolveremos mais alguns testes básicos de convergência para séries com termos não negativos. Posteriormente, vamos usar alguns destes testes para estudar a convergência de séries de Taylor.*

## TESTE DA COMPARAÇÃO

Vamos começar com um teste que é útil por si mesmo e também serve na construção de outros testes de convergência importantes. A ideia subjacente a tal teste é usar o conhecimento da convergência ou da divergência de uma série para deduzir a convergência ou a divergência de outra série.

Não é essencial no Teorema 9.5.1 que a condição $a_k \leq b_k$ seja válida com qualquer $k$, conforme enunciado; a conclusão do teorema permanece verdadeira mesmo que a condição somente seja válida a partir de um certo termo.

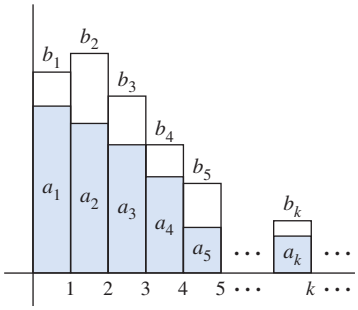
**9.5.1 TEOREMA** ***(Teste da Comparação)*** *Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ séries de termos não negativos e suponha que*

$$a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, a_3 \leq b_3, \ldots, a_k \leq b_k, \ldots$$

*(a) Se a "série maior" $\Sigma b_k$ convergir, então a "série menor" $\Sigma a_k$ também convergirá.*

*(b) Se a "série menor" $\Sigma a_k$ divergir, então a "série maior" $\Sigma b_k$ também divergirá.*

Vamos deixar a prova desse teorema para os exercícios; porém, é fácil visualizar por que o teorema é verdadeiro interpretando-se os termos das séries como áreas de retângulos (Figura 9.5.1). O teste da comparação afirma que se a área total $\sum b_k$ for finita, então a área total $\sum a_k$




Em cada retângulo, $a_k$ denota a área de porção azul e $b_k$ denota a área combinada das porções brancas e azuis.

**Figura 9.5.1**

também deverá ser finita; e se a área total $\sum a_k$ for infinita, então a área total $\sum b_k$ também deverá ser infinita.

## USANDO O TESTE DA COMPARAÇÃO

Há dois passos necessários para usar o teste da comparação na determinação da convergência de uma série $\sum u_k$ com termos positivos:

**Passo 1** Faça uma conjectura sobre a convergência ou divergência da série $\sum u_k$.

**Passo 2** Encontre uma série que prove que a conjectura estará correta. Se a conjectura foi divergência, precisamos encontrar uma série divergente cujos termos sejam "menores" do que os termos correspondentes de $\sum u_k$; se a conjectura foi convergência, precisamos encontrar uma série convergente cujos termos sejam "maiores" do que os termos correspondentes de $\sum u_k$.

Na maioria dos casos, a série $\sum u_k$ em consideração terá seu termo geral $u_k$ dado em forma de uma fração. Para ajudar no processo de conjecturar no primeiro passo, formulamos dois princípios baseados na forma do denominador de $u_k$. Esses princípios, às vezes, *sugerem* se uma série é, provavelmente, convergente ou divergente. Vamos chamá-los de "princípios informais", pois eles não pretendem ser teoremas formais. De fato, não iremos garantir que eles funcionem *sempre*. No entanto, funcionam o suficiente para serem úteis.

**9.5.2 PRINCÍPIO INFORMAL** *Termos constantes no denominador de $u_k$ podem geralmente ser eliminados sem afetar a convergência ou a divergência da série.*

**9.5.3 PRINCÍPIO INFORMAL** *Se um polinômio em $k$ aparecer como um fator no numerador ou denominador de $u_k$, todos os termos do polinômio, exceto o termo dominante, poderão geralmente ser descartados sem afetar a convergência ou a divergência da série.*

**▶ Exemplo 1** Use o teste da comparação para determinar se as séries a seguir convergem ou divergem.

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}} \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + k}$$

***Solução (a)*** De acordo com o Princípio 9.5.2, deve ser possível eliminar a constante no denominador sem afetar a convergência ou a divergência. Assim, a série dada, provavelmente, comporta-se como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \tag{1}$$

que é uma série $p$ ($p = \frac{1}{2}$) divergente. Desse modo, vamos conjecturar que a série dada diverge e tentar provar isso encontrando uma série divergente que seja "menor" do que a série dada. Entretanto, a própria série (1) dá conta do recado, pois

$$\frac{1}{\sqrt{k} - \frac{1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{se } k = 1, 2, \ldots$$

Assim, provamos que a série dada diverge.

***Solução (b)*** De acordo com o Princípio 9.5.3, deve ser possível eliminar todos os termos do polinômio, exceto o dominante, sem afetar a convergência ou a divergência. Assim, a série dada, provavelmente, comporta-se como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{2}$$

que converge, uma vez que é uma constante vezes uma série $p$ convergente ($p = 2$). Desse modo, vamos conjecturar que a série dada converge e tentar provar isso encontrando uma série convergente que seja "maior" do que a série dada. Entretanto, a própria série (2) dá conta do recado, pois

$$\frac{1}{2k^2 + k} < \frac{1}{2k^2} \quad \text{se } k = 1, 2, \ldots$$

Assim, provamos que a série dada converge. ◄

## ■ TESTE DA COMPARAÇÃO NO LIMITE

No último exemplo, os Princípios 9.5.2 e 9.5.3 forneceram a conjectura sobre a convergência e a divergência, bem como as séries necessárias à aplicação do teste da comparação. Infelizmente, encontrar a série exigida para comparação não é sempre tão direto, de modo que vamos considerar uma alternativa ao teste da comparação que é usualmente mais fácil de ser aplicada. A prova está dada no Apêndice D.

**9.5.4 TEOREMA** ***(Teste da Comparação no Limite)*** *Sejam $\sum a_k$ e $\sum b_k$ séries de termos positivos e suponha que*

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

*Se $\rho$ for finito e $\rho > 0$, então ambas as séries convergirão ou ambas as séries divergirão.*

Os casos em que $\rho = 0$ ou $\rho = +\infty$ estão discutidos nos exercícios (Exercício 56).

Para utilizar o teste da comparação no limite devemos novamente conjecturar sobre a convergência ou divergência de $\sum a_k$ para, depois, encontrar uma série $\sum b_k$ que prove a nossa conjectura. O exemplo a seguir ilustra esse princípio.

**► Exemplo 2** Use o teste da comparação no limite para determinar se as séries a seguir convergem ou divergem.

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} + 1} \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + k} \qquad \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3 - 2k^2 + 4}{k^7 - k^3 + 2}$$

***Solução (a)*** Como no Exemplo 1, o Princípio 9.5.2 sugere que a série, provavelmente, se comporte como a série $p$ divergente (1). Para provar que a série dada diverge, vamos aplicar o teste da comparação no limite com

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k} + 1} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Obtemos

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + 1} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{k}}} = 1$$

Como $\rho$ é finito e positivo, tem-se a partir do Teorema 9.5.4 que a série dada diverge.

***Solução (b)*** Como no Exemplo 1, o Princípio 9.5.3 sugere que a série, provavelmente, comporte-se como a série convergente (2). Para provar que a série dada converge, vamos aplicar o teste da comparação no limite com

$$a_k = \frac{1}{2k^2 + k} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{2k^2}$$

Obtemos

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{2k^2}{2k^2 + k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{2}{2 + \dfrac{1}{k}} = 1$$

Como $\rho$ é finito e positivo, tem-se a partir do Teorema 9.5.4 que a série dada converge, o que está de acordo com a conclusão obtida no Exemplo 1 usando o teste da comparação.

***Solução (c)*** A partir do Princípio 9.5.3, é provável que a série se comporte como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3}{k^7} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^4} \tag{3}$$

que converge, tendo em vista que é uma constante vezes uma série $p$ convergente. Assim, é provável que a série dada convirja. Para provar isso, vamos aplicar o teste da comparação no limite à série (3) e à série dada. Obtemos

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{\dfrac{3k^3 - 2k^2 + 4}{k^7 - k^3 + 2}}{\dfrac{3}{k^4}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{3k^7 - 2k^6 + 4k^4}{3k^7 - 3k^3 + 6} = 1$$

Como $\rho$ é finito e positivo, tem-se a partir do Teorema 9.5.4 que a série dada converge, pois (3) converge. ◄

## ■ TESTE DA RAZÃO

Os testes da comparação e da comparação no limite dependem de fazer, primeiro, uma conjectura sobre a convergência e, depois, de encontrar uma série apropriada para a comparação; ambas podem ser tarefas difíceis caso os Princípios 9.5.2 e 9.5.3 não possam ser aplicados. Em tais casos, o próximo teste pode frequentemente ser usado, uma vez que funciona exclusivamente com os termos da série dada – ele não requer uma conjectura inicial sobre convergência nem a descoberta de uma série de comparação. A sua prova está dada no Apêndice D.

**9.5.5 TEOREMA** ***(Teste da Razão)*** *Seja $\sum u_k$ uma série de termos positivos e suponha que*

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

*(a) Se $\rho < 1$, a série convergirá.*

*(b) Se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$, a série divergirá.*

*(c) Se $\rho = 1$, a série poderá convergir ou divergir, de modo que deve ser tentado outro teste.*

**► Exemplo 3** Cada uma das séries a seguir tem termos positivos, portanto, o teste da razão é aplicável. Em cada parte, use esse teste para determinar se as séries a seguir convergem ou divergem.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k}$ (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k - 1}$

***Solução (a)*** A série converge, pois

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

***Solução (b)*** A série converge, pois

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2} \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{2} < 1$$

***Solução (c)*** A série diverge, pois

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \lim_{k\to+\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e > 1$$

Ver Fórmula (7) na Seção 1.3, no Volume 1

***Solução (d)*** A série diverge, pois

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{[2(k+1)]!}{4^{k+1}} \cdot \frac{4^k}{(2k)!} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{(2k+2)!}{(2k)!} \cdot \frac{1}{4}\right)$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(2k)!} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \lim_{k\to+\infty} (2k+2)(2k+1) = +\infty$$

***Solução (e)*** O teste da razão não ajuda, pois

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2(k+1)-1} \cdot \frac{2k-1}{1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2k-1}{2k+1} = 1$$

No entanto, o teste da integral prova que a série diverge, pois

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x-1} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{2x-1} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2} \ln(2x-1)\Big]_1^b = +\infty$$

Ambos os testes de comparação e de comparação no limite também teriam funcionado aqui (verifique). ◄

## ■ TESTE DA RAIZ

Nos casos em que for difícil ou inconveniente encontrar o limite requerido pelo teste da razão, o próximo teste é, às vezes, útil. Como a sua prova é análoga àquela do teste da razão, iremos omiti-la.

**9.5.6** TEOREMA **(*Teste da Raiz*)** *Seja $\sum u_k$ uma série de termos positivos e suponha que*

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k\to+\infty} (u_k)^{1/k}$$

(*a*) *Se $\rho < 1$, a série convergirá.*

(*b*) *Se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$, a série divergirá.*

(*c*) *Se $\rho = 1$, a série poderá convergir ou divergir, de modo que deve ser tentado outro teste.*

► **Exemplo 4** Use o teste da raiz para determinar se as séries convergem ou divergem.

$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{4k-5}{2k+1}\right)^k \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k+1))^k}$$

***Solução (a)*** A série diverge, pois

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} (u_k)^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{4k-5}{2k+1} = 2 > 1$$

***Solução (b)*** A série converge, pois

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} (u_k)^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} = 0 < 1 \blacktriangleleft$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.5 (*Ver página 637 para respostas.*)

**1-4** Na primeira lacuna, escolha entre *converge* ou *diverge*. ■

**1.** A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+1}{2k^{8/3}-1}$$

_____ por comparação com a série $p$ dada por $\sum_{k=1}^{\infty}$ _____.

**2.** Como

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^3/3^{k+1}}{k^3/3^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^3}{3} = \frac{1}{3}$$

a série $\sum_{k=1}^{\infty} k^3/3^k$ _____ pelo teste _____.

**3.** Como

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!/3^{k+1}}{k!/3^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{3} = +\infty$$

a série $\sum_{k=1}^{\infty} k!/3^k$ _____ pelo teste _____.

**4.** Como

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k^{k/2}}\right)^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^{1/2}} = 0$$

a série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{k/2}$ _____ pelo teste _____.

## EXERCÍCIOS 9.5

**1-2** Faça uma conjectura sobre a convergência ou a divergência da série e confirme-a usando o teste da comparação. ■

**1.** (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k^2-k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k-\frac{1}{4}}$

**2.** (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^2-k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^4+k}$

**3.** Em cada parte, use o teste da comparação para mostrar que a série converge.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+5}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5\,\mathrm{sen}^2 k}{k!}$

**4.** Em cada parte, use o teste da comparação para mostrar que a série diverge.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^{3/2}-\frac{1}{2}}$

**5-10** Use o teste da comparação no limite para determinar se a série converge. ■

**5.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2-2k+6}{8k^7+k-8}$ **6.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k+6}$

**7.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^k+1}$ **8.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+5)}$

**9.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8k^2-3k}}$ **10.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)^{17}}$

**11-16** Use o teste da razão para determinar se a série converge. Se o teste for inconclusivo, aponte isso. ■

**11.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$ **12.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^2}$ **13.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k}$

**14.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ **15.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^3}$ **16.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$

**17-20** Use o teste da raiz para determinar se a série converge. Se o teste for inconclusivo, aponte isso. ■

**17.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k$ **18.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{100}\right)^k$

**19.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k}$ **20.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (1-e^{-k})^k$

**21-24 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**21.** O teste da comparação no limite decide sobre a convergência usando um limite do quociente de dois termos consecutivos da série.

**22.** Se $\lim_{k\to+\infty}(u_{k+1}/u_k) = 5$, então $\sum u_k$ divergirá.

**23.** Se $\lim_{k\to+\infty}(k^2u_k) = 5$, então $\sum u_k$ convergirá.

**24.** O teste da raiz decide sobre a convergência usando um limite da raiz $k$-ésima dos termos da sequência de somas parciais da série.

**25-49** Use qualquer método para determinar se a série converge. ■

**25.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{7^k}{k!}$ **26.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}$ **27.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{5^k}$

**28.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!10^k}{3^k}$ **29.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k^{50}e^{-k}$ **30.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^3+1}$

**31.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^3+1}$ **32.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{2+3^k k}$

**33.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ **34.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^k}{5^k}$

**35.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+\sqrt{k}}{(k+1)^3-1}$ **36.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4+|\cos x|}{k^3}$

**37.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{k}}$ **38.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$ **39.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{e^k}$

**40.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{e^{k^2}}$ **41.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+4)!}{4!k!4^k}$ **42.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

**43.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4+2^{-k}}$ **44.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}\ln k}{k^3+1}$ **45.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{arc tg } k}{k^2}$

**46.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k+k}{k!+3}$ **47.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$ **48.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\pi(k+1)]^k}{k^{k+1}}$

**49.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{3^k}$

**50.** Com quais valores positivos de $\alpha$ a série $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha^k/k^\alpha)$ converge?

**51-52** Encontre o termo geral da série e use o teste da razão para mostrar que a série converge. ■

**51.** $1+\dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$

**52.** $1+\dfrac{1\cdot 3}{3!}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{5!}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{7!}+\cdots$

**53.** Mostre que $\ln x < \sqrt{x}$ se $x > 0$ e use este resultado para investigar a convergência de

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^2}$

**ENFOCANDO CONCEITOS**

**54.** (a) Faça uma conjectura sobre a convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty}\text{sen}\,(\pi/k)$ considerando a aproximação linear local de sen $x$ em $x = 0$.

(b) Tente confirmar sua conjectura usando o teste da comparação dos limites.

**55.** (a) Veremos adiante que o polinômio $1 - x^2/2$ é a aproximação "quadrática local" de $\cos x$ em $x = 0$. Faça uma conjectura sobre a convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-\cos\left(\frac{1}{k}\right)\right]$$

considerando essa aproximação.

(b) Tente confirmar a sua conjectura usando o teste da comparação no limite.

**56.** Sejam $\sum a_k$ e $\sum b_k$ séries de termos positivos. Prove:

(a) Se $\lim_{k\to+\infty}(a_k/b_k) = 0$ e $\sum b_k$ convergir, então $\sum a_k$ convergirá.

(b) Se $\lim_{k\to+\infty}(a_k/b_k) = +\infty$ e $\sum b_k$ divergir, então $\sum a_k$ divergirá.

**57.** Use o Teorema 9.4.6 para provar o teste da comparação (Teorema 9.5.1).

**58.** **Texto** O que o teste da razão diz a respeito da convergência de uma série geométrica? Discuta as semelhanças entre uma série geométrica e as séries às quais podemos aplicar o teste da razão.

**59.** **Texto** Dada uma série infinita, discuta uma estratégia para decidir qual teste de convergência deveria ser usado.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.5

**1.** diverge; $1/k^{2/3}$ **2.** converge; da razão **3.** diverge; da razão **4.** converge; da raiz

# 9.6 SÉRIES ALTERNADAS; CONVERGÊNCIA ABSOLUTA E CONDICIONAL

*Até agora, focalizamos exclusivamente séries de termos não negativos. Nesta seção, discutiremos séries que contêm termos tanto positivos quanto negativos.*

## SÉRIES ALTERNADAS

As séries cujos termos se alternam entre positivo e negativo são chamadas de ***séries alternadas*** e são de importância especial. Alguns exemplos são

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$$

Em geral, uma série alternada tem uma das seguintes formas:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots \tag{2}$$

onde todos os $a_k$ são positivos, em ambos casos.

O teorema a seguir é um resultado-chave sobre a convergência de séries alternadas.

**9.6.1 TEOREMA** (***Teste da Série Alternada***) *Uma série alternada da forma* (1) *ou da forma* (2) *converge se as duas condições a seguir estiverem satisfeitas*:

(*a*) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_k \geq \cdots$

(*b*) $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

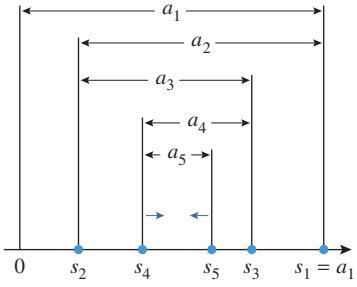



**Figura 9.6.1**

Não é essencial que a condição (*a*) do Teorema 9.6.1 seja válida com todos os termos; uma série alternada irá convergir se a condição (*b*) for verdadeira e se a condição (*a*) for verdadeira apenas a partir de um certo termo.

**DEMONSTRAÇÃO** Vamos considerar somente séries alternadas da forma (1). A ideia da prova é mostrar que se as condições (*a*) e (*b*) forem verificadas, então as sequências das somas parciais de índice par e ímpar convergem para um limite comum $S$. Decorre, então, do Teorema 9.1.4, que a sequência das somas parciais converge para $S$.

A Figura 9.6.1 mostra como sucessivas somas parciais satisfazendo as condições (*a*) e (*b*) aparecem quando plotadas sobre um eixo horizontal. As somas parciais de índice par

$$s_2, s_4, s_6, s_8, \ldots, s_{2n}, \ldots$$

formam uma sequência crescente limitada superiormente por $a_1$, e as somas parciais de índice ímpar

$$s_1, s_3, s_5, \ldots, s_{2n-1}, \ldots$$

formam uma sequência decrescente limitada inferiormente por 0. Assim, pelos Teoremas 9.2.3 e 9.2.4, as somas parciais de índice par convergem para algum limite $S_E$, e as somas parciais de índice ímpar convergem para algum limite $S_O$. Para completar a prova, precisamos

Se uma série alternada violar a condição (b) do teste da série alternada, então a série deve divergir pelo teste da divergência (Teorema 9.4.1)

mostrar que $S_E = S_O$. Contudo, o $(2n)$-ésimo termo da série é $-a_{2n}$, logo $s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n}$, o que pode ser escrito como

$$s_{2n-1} = s_{2n} + a_{2n}$$

Porém, $2n \to +\infty$ e $2n - 1 \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, portanto

$$S_O = \lim_{n \to +\infty} s_{2n-1} = \lim_{n \to +\infty} (s_{2n} + a_{2n}) = S_E + 0 = S_E$$

o que completa a demonstração. ■

**▶ Exemplo 1** Use o teste da série alternada para mostrar a convergência das séries seguintes.

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+3}{k(k+1)}$$

A série na parte (*a*) do Exemplo 1 é chamada de ***série harmônica alternada***. Observe que essa série converge, enquanto que a série harmônica diverge.

***Solução (a)*** As duas condições do teste da série alternada estão satisfeitas, pois

$$a_k = \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} = a_{k+1} \quad \text{e} \quad \lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$$

***Solução (b)*** As duas condições do teste da série alternada estão satisfeitas, pois

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+4}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{k(k+1)}{k+3} = \frac{k^2+4k}{k^2+5k+6} = \frac{k^2+4k}{(k^2+4k)+(k+6)} < 1$$

logo

$$a_k > a_{k+1}$$

e

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{k+3}{k(k+1)} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{1}{k} + \frac{3}{k^2}}{1 + \frac{1}{k}} = 0 \quad ◀$$

## ■ APROXIMANDO AS SOMAS DE SÉRIES ALTERNADAS

O teorema a seguir trata do erro que resulta quando a soma de uma série alternada for aproximada por uma soma parcial.

**9.6.2 TEOREMA** *Se uma série alternada satisfizer as hipóteses do teste da série alternada, e se S for a soma da série, então:*

(*a*) *S está entre duas somas parciais sucessivas; isto é,*

$$s_n \le S \le s_{n+1} \quad \text{ou} \quad s_{n+1} \le S \le s_n \tag{3}$$

*dependendo de qual soma parcial for maior.*

(*b*) *Se S for aproximada por $s_n$, então o erro absoluto $|S - s_n|$ satisfaz*

$$|S - s_n| \le a_{n+1} \tag{4}$$

*Além disso, o sinal do erro $S - s_n$ é igual ao do coeficiente de $a_{n+1}$.*

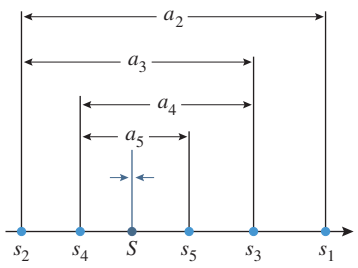



**Figura 9.6.2**

**DEMONSTRAÇÃO** Vamos provar o teorema para séries da forma (1). De acordo com a Figura 9.6.2 e lembrando da nossa observação na prova do Teorema 9.6.1 de que as somas parciais de índice ímpar formam uma sequência decrescente, convergente para $S$, e as somas parciais de índice par formam uma sequência crescente, convergente para $S$, vemos que as somas parciais sucessivas oscilam de um lado para outro de $S$ em passos cada vez menores, sendo que as somas parciais de índice ímpar são maiores do que $S$ e as de índice par, menores do que $S$. Assim, dependendo de $n$ ser par ou ímpar, temos

$$s_n \le S \le s_{n+1} \quad \text{ou} \quad s_{n+1} \le S \le s_n$$

o que prova (3). Além disso, em qualquer caso, temos

$$|S - s_n| \le |s_{n+1} - s_n| \tag{5}$$

No entanto, $s_{n+1} - s_n = \pm\, a_{n+1}$ (o sinal depende de $n$ ser par ou ímpar). Desse modo tem-se, a partir de (5), que $|S - s_n| < a_{n+1}$, o que prova (4). Finalmente, como as somas parciais de índice ímpar são maiores do que $S$ e as de índice par são menores, tem-se que $S - s_n$ tem o mesmo sinal que o coeficiente de $a_{n+1}$ (verifique). ■

**OBSERVAÇÃO** Em palavras, a desigualdade (4) garante que, para uma série que satisfaz as hipóteses do teste da série alternada, a magnitude do erro que resulta ao aproximar $S$ por $s_n$ é menor do que o primeiro termo *não incluído* na soma parcial. Observe também que, se $a_1 > a_2 > \cdots > a_k > \cdots$, então a desigualdade (4) pode ser reforçada para $|S - s_n| < a_{n+1}$.

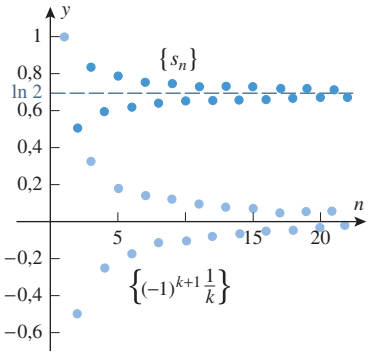



Gráfico da sequência dos termos e das enésimas somas parciais da série harmônica alternada.

**Figura 9.6.3**

**► Exemplo 2** Vamos mostrar, mais adiante neste capítulo, que a soma da série harmônica alternada é:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{k} + \cdots$$

Isso está ilustrado na Figura 9.6.3.

(a) Aceitando isso como verdadeiro, encontre uma cota superior da magnitude do erro que resulta se ln 2 for aproximado pela soma dos oito primeiros termos da série.

(b) Encontre uma soma parcial que aproxime ln 2 com uma casa decimal de precisão (até o décimo mais próximo).

***Solução (a)*** Tem-se a partir da versão reforçada de (4) que

$$|\ln 2 - s_8| < a_9 = \frac{1}{9} < 0{,}12 \tag{6}$$

Como verificação, vamos calcular exatamente $s_8$. Obtemos

$$s_8 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{533}{840}$$

Assim, com a ajuda de uma calculadora

$$|\ln 2 - s_8| = \left|\ln 2 - \frac{533}{840}\right| \approx 0{,}059$$

Isso mostra que o erro está bem abaixo da estimativa fornecida pela cota superior (6).

***Solução (b)*** Para uma precisão de uma casa decimal, precisamos escolher um valor de $n$ tal que $|\ln 2 - s_n| \le 0{,}05$. Porém, tem-se a partir da versão reforçada de (4) que

$$|\ln 2 - s_n| < a_{n+1}$$

logo, basta escolher $n$ tal que $a_{n+1} \le 0{,}05$.

Uma maneira de encontrar $n$ é usar um recurso computacional para obter valores numéricos para $a_1, a_2, a_3, \ldots$ até encontrar o primeiro valor que seja menor do que ou igual a 0,05. Se você fizer isso, irá encontrar que ele é $a_{20} = 0{,}05$; isso nos mostra que a soma parcial $s_{19}$ fornecerá a precisão desejada. Outra maneira para encontrar $n$ é resolver a desigualdade

$$\frac{1}{n+1} \leq 0{,}05$$

algebricamente. Podemos fazer isso tomando os recíprocos, revertendo o sentido da desigualdade e, então, simplificando para obter $n \geq 19$. Assim, $s_{19}$ irá fornecer a precisão desejada, o que está de acordo com o resultado anterior.

Com a ajuda de um recurso computacional, o valor de $s_{19}$ é aproximadamente $s_{19} \approx 0{,}7$, e o valor de ln 2 obtido diretamente é $\ln 2 \approx 0{,}69$, que coincide com $s_{19}$ quando arredondado para uma casa decimal. ◄

Conforme ilustra o Exemplo 2, a série harmônica alternada não fornece uma maneira eficiente de aproximar ln 2, uma vez que é necessário fazer muitas contas para obter uma precisão razoável. Posteriormente, desenvolveremos maneiras melhores para aproximar logaritmos.

## CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

A série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \cdots$$

não se ajusta a nenhuma das categorias estudadas até aqui – há uma mistura de sinais, mas ela não é alternada. Desenvolveremos alguns testes de convergência que podem ser aplicados a tais séries.

**9.6.3 DEFINIÇÃO** Dizemos que uma série

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots$$

***converge absolutamente*** se a série dos valores absolutos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_k| + \cdots$$

convergir, e dizemos que ***diverge absolutamente*** se a série de valores absolutos divergir.

**► Exemplo 3** Determine se as seguintes séries convergem absolutamente.

(a) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \cdots$ (b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$

***Solução (a)*** A série de valores absolutos é a série geométrica convergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$

assim a dada série converge absolutamente.

***Solução (b)*** A série de valores absolutos é a série harmônica divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

assim a dada série diverge absolutamente. ◄

É importante distinguir entre as noções de convergência e de convergência absoluta. Por exemplo, a série da parte (b) do Exemplo 3 converge, uma vez que é a série harmônica alternada; no entanto, demonstramos que ela não converge absolutamente. Contudo, o teorema a seguir mostra que *se uma série convergir absolutamente, então ela convergirá.*

O Teorema 9.6.4 fornece uma maneira de deduzir a convergência de uma série com termos positivos e negativos, a partir da convergência de uma série de termos não negativos (a série dos valores absolutos). Isso é importante, pois a maioria dos testes de convergência que apresentamos aplica-se somente a séries de termos não negativos.

**9.6.4 TEOREMA** *Se a série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_k| + \cdots$$

*convergir, então a série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots$$

*também convergirá.*

**DEMONSTRAÇÃO** Vamos escrever a série $\sum u_k$ como

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} [(u_k + |u_k|) - |u_k|] \tag{7}$$

Estamos supondo que $\sum |u_k|$ converge, logo se pudermos mostrar que $\sum (u_k + |u_k|)$ converge, então irá seguir de (7) e do Teorema 9.4.3(*a*) que $\sum u_k$ converge. Ocorre que o valor de $u_k + |u_k|$ é 0 ou $2|u_k|$, dependendo do sinal de $u_k$. Assim, em todos os casos, é verdadeiro que

$$0 \le u_k + |u_k| \le 2|u_k|$$

Contudo, $\sum 2|u_k|$ converge, uma vez que é uma constante vezes a série convergente $\sum |u_k|$; logo, $\sum (u_k + |u_k|)$ converge pelo teste da comparação. ■

► **Exemplo 4** Mostre que as séries a seguir convergem.

$$\text{(a) } 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \cdots \qquad \text{(b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^2}$$

***Solução (a)*** Observe que isso não é uma série alternada, pois os sinais se alternam aos pares após o primeiro termo. Assim, não temos nenhum teste de convergência que possa ser aplicado diretamente. No entanto, mostramos no Exemplo 3(a) que a série converge absolutamente; logo, o Teorema 9.6.4 implica que ela converge (Figura 9.6.4*a*).

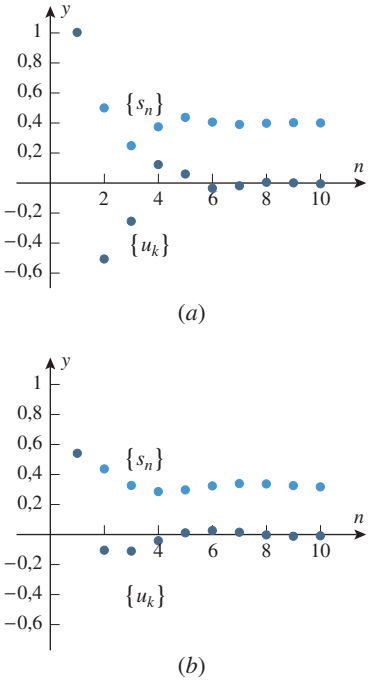
***Solução (b)*** Com a ajuda de um recurso computacional, podemos verificar que o sinal dos termos nesta série varia irregularmente. Assim, vamos testar a convergência absoluta. A série dos valores absolutos é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\cos k}{k^2} \right|$$

Porém,

$$\left| \frac{\cos k}{k^2} \right| \le \frac{1}{k^2}$$

No entanto, $\sum 1/k^2$ é uma série $p$ convergente ($p = 2$), de modo que a série dos valores absolutos converge pelo teste da comparação. Dessa forma, a série dada converge absolutamente e, portanto, converge (Figura 9.6.4*b*). ◄




Gráficos das sequências de termos e das enésimas somas parciais da série do Exemplo 4.

**Figura 9.6.4**

## CONVERGÊNCIA CONDICIONAL

Embora o Teorema 9.6.4 seja uma ferramenta útil para séries que convergem absolutamente, ele não fornece informação sobre a convergência ou a divergência de uma série que diverge absolutamente. Por exemplo, considere as duas séries

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{k} + \cdots \tag{8}$$

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{k} - \cdots \tag{9}$$

Ambas as séries divergem absolutamente, pois em cada caso a série dos valores absolutos é a série harmônica divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots$$

Contudo, a série (8) converge, por ser a série harmônica alternada, e a série (9) diverge, pois é uma constante vezes a série harmônica divergente. Como terminologia, dizemos que uma série que converge, mas diverge absolutamente, é uma série que ***converge condicionalmente*** (ou é ***condicionalmente convergente***). Assim, (8) é uma série condicionalmente convergente.

**► Exemplo 5** No Exemplo 1(b), usamos o teste da série alternada para mostrar que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+3}{k(k+1)}$$

converge. Determine se essa série converge absoluta ou condicionalmente.

***Solução*** Testamos a série para a convergência absoluta examinando a série dos valores absolutos:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\frac{k+3}{k(k+1)}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+3}{k(k+1)}$$

O Princípio 9.5.3 sugere que a série dos valores absolutos deveria se comportar como a série $p$ divergente com $p = 1$. Para provar que a série dos valores absolutos diverge, aplicamos o teste da comparação no limite com

$$a_k = \frac{k+3}{k(k+1)} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{k}$$

Obtemos

$$\rho = \lim_{k\to+\infty}\frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{k(k+3)}{k(k+1)} = \lim_{k\to+\infty}\frac{k+3}{k+1} = 1$$

Como $\rho$ é finito e positivo, segue do teste da comparação no limite que a série dos valores absolutos diverge. Assim, a série original converge e também diverge absolutamente, ou seja, é condicionalmente convergente. ◄

## TESTE DA RAZÃO PARA A CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

Embora geralmente não possa ser inferida a convergência ou a divergência de uma série a partir de sua divergência absoluta, a variante do teste da razão a seguir nos fornece uma maneira de deduzir a divergência a partir da divergência absoluta em certas situações. Omitiremos a prova.

**9.6.5 TEOREMA** ***(Teste da Razão para a Convergência Absoluta)*** *Seja $\sum u_k$ uma série de termos não nulos e suponha que*

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}$$

*(a) Se $\rho < 1$, então a série $\sum u_k$ convergirá absolutamente e, portanto, convergirá.*

*(b) Se $\rho > 1$ ou se $\rho = +\infty$, então a série $\sum u_k$ divergirá.*

*(c) Se $\rho = 1$, nenhuma conclusão sobre a convergência ou a convergência absoluta pode ser tirada desse teste.*

**► Exemplo 6** Use o teste da razão para a convergência absoluta para determinar se a série converge.

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!} \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!}{3^k}$$

***Solução (a)*** Tomando o valor absoluto do termo geral $u_k$, obtemos

$$|u_k| = \left| (-1)^k \frac{2^k}{k!} \right| = \frac{2^k}{k!}$$

Assim,

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k \to +\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{2}{k+1} = 0 < 1$$

o que implica que a série converge absolutamente e, portanto, converge.

***Solução (b)*** Tomando o valor absoluto do termo geral $u_k$, obtemos

$$|u_k| = \left| (-1)^k \frac{(2k-1)!}{3^k} \right| = \frac{(2k-1)!}{3^k}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{k \to +\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k \to +\infty} \frac{[2(k+1)-1]!}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{(2k-1)!} \\ &= \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(2k+1)!}{(2k-1)!} = \frac{1}{3} \lim_{k \to +\infty} (2k)(2k+1) = +\infty \end{aligned}$$

o que implica que a série diverge. ◄

## ■ RESUMO DOS TESTES DE CONVERGÊNCIA

Concluímos esta seção com um resumo dos testes de convergência que pode ser consultado como referência. A habilidade de escolher um teste adequado é desenvolvida com muita prática. Algumas vezes, um teste pode ser inconclusivo, quando então precisamos tentar outro teste.

**Resumo dos Testes de Convergência**

| NOME | AFIRMAÇÃO | COMENTÁRIO |
|---|---|---|
| **Teste da Divergência** (9.4.1) | Se $\lim_{k\to+\infty} u_k \neq 0$, então $\sum u_k$ diverge. | Se $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$, então $\sum u_k$ pode ou não convergir. |
| **Teste da Integral** (9.4.4) | Seja $\sum u_k$ uma série com termos positivos. Se $f$ for uma função decrescente e contínua num intervalo $[a, +\infty)$ e tal que $u_k = f(k)$ em cada $k \geq a$, então $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ambas convergirão ou ambas divergirão. | Este teste aplica-se apenas a séries de termos positivos. Tente este teste quando $f(x)$ for fácil de integrar. |
| **Teste da Comparação** (9.5.1) | Sejam $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ séries de termos não negativos e suponha que $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \ldots, a_k \leq b_k, \ldots$ Se $\sum b_k$ convergir, então $\sum a_k$ convergirá e se $\sum a_k$ divergir, então $\sum b_k$ divergirá. | Este teste aplica-se apenas a séries de termos não negativos. Tente este teste em último caso; outros testes são frequentemente mais fáceis de aplicar. |
| **Teste da Comparação no Limite** (9.5.4) | Sejam $\sum a_k$ e $\sum b_k$ séries de termos positivos e seja $\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k}$ Se $0 < \rho < +\infty$, então ambas as séries convergirão ou ambas divergirão. | Isto é mais fácil de se aplicar do que o teste de comparação, mas ainda requer alguma habilidade na escolha da série $\sum b_k$ para comparação. |
| **Teste da Razão** (9.5.5) | Seja $\sum u_k$ uma série de termos positivos e suponha que $\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$ (a) A série converge se $\rho < 1$. (b) A série diverge se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$. (c) O teste é inconclusivo se $\rho = 1$. | Tente este teste quando $u_k$ envolver fatoriais ou potências $k$-ésimas. |
| **Teste da Raiz** (9.5.6) | Seja $\sum u_k$ uma série de termos positivos e suponha que $\rho = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k}$ (a) A série converge se $\rho < 1$. (b) A série diverge se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$. (c) O teste é inconclusivo se $\rho = 1$. | Tente este teste quando $u_k$ envolver potências $k$-ésimas |
| **Teste da Série Alternada** (9.6.1) | Se $a_k > 0$ com $k = 1, 2, 3, \ldots$, então as séries $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ $-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$ convergirão se as seguintes condições forem satifeitas: (a) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ (b) $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ | Este teste aplica-se apenas a séries alternadas. |
| **Teste da Razão para a Convergência Absoluta** (9.6.5) | Seja $\sum u_k$ uma série com termos não nulos e suponha que $\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{\lvert u_{k+1}\rvert}{\lvert u_k\rvert}$ (a) A série converge absolutamente se $\rho < 1$. (b) A série diverge se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$. (c) O teste é inconclusivo se $\rho = 1$. | A série não necessita ter termos positivos e não precisa ser alternada para usar este teste. |

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.6 (Ver página 648 para respostas.)

**1.** O que caracteriza uma série *alternada*?

**2.** (a) A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

converge pelo teste da série alternada pois _____ e _____.

(b) Se

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \quad \text{e} \quad s_9 = \sum_{k=1}^{9} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

então $|S - s_9| <$ _____.

**3.** Classifique cada sequência como condicionalmente convergente, absolutamente convergente ou divergente.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$: _____

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{3k-1}{9k+15}$: _____

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k(k+2)}$: _____

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt[4]{k^3}}$: _____

**4.** Sabendo que

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^4/4^{k+1}}{k^4/4^k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

classifique a série $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^4/4^k$ como condicionalmente convergente, absolutamente convergente ou divergente.

## EXERCÍCIOS 9.6 C CAS

**1-2** Mostre que a série converge confirmando que satisfaz as hipóteses do teste da série alternada (Teorema 9.6.1). ■

**1.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ **2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{3^k}$

**3-6** Determine se a série alternada converge e justifique sua resposta. ■

**3.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{3k+1}$ **4.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{\sqrt{k}+1}$

**5.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}e^{-k}$ **6.** $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\ln k}{k}$

**7-12** Use o teste da razão para a convergência absoluta (Teorema 9.6.5) para determinar se a série converge ou diverge. Se o teste for inconclusivo, aponte isso. ■

**7.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^k$ **8.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^k}{k!}$

**9.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^k}{k^2}$ **10.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{5^k}$

**11.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k^3}{e^k}$ **12.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^k}{k!}$

**13-28** Classifique a série como absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente. ■

**13.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{3k}$ **14.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{4/3}}$ **15.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4)^k}{k^2}$

**16.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$ **17.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\pi}{k}$ **18.** $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\ln k}{k}$

**19.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+2}{k(k+3)}$ **20.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k^2}{k^3+1}$

**21.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}$ **22.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} k}{k^3}$

**23.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\ln k}$ **24.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}}$

**25.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln k}\right)^k$ **26.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cos k\pi}{k^2+1}$

**27.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k!}{(2k-1)!}$ **28.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^{2k-1}}{k^2+1}$

**29-32 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

**29.** Uma série alternada é uma série cujos termos alternam entre par e ímpar.

**30.** Se uma série satisfizer as hipóteses do teste da série alternada, então a sequência das somas parciais da série oscilará entre estimativas por excesso e por falta da soma da série.

**31.** Se uma série convergir, então ela convergirá absoluta ou condicionalmente.

**32.** Se $\sum(u_k)^2$ convergir, então $\sum u_k$ convergirá absolutamente.

**33-36** Cada série satisfaz as hipóteses do teste da série alternada. Com o valor dado de $n$, determine uma cota superior no erro absoluto que resulta se a soma da série for aproximada pela enésima soma parcial. ■

**33.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k};\ n=7$ **34.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!};\ n=5$

**35.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}};\ n=99$

**36.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\ln(k+1)};\ n=3$

**37-40** Cada série satisfaz as hipóteses do teste da série alternada. Determine um valor de $n$ com o qual a enésima soma parcial garantidamente aproxima a soma da série com a precisão explicitada. ■

**37.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k};\ |\text{erro}|<0{,}0001$

**38.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!};\ |\text{erro}|<0{,}00001$

**39.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}};$ duas casas decimais

**40.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\ln(k+1)};$ uma casa decimal

**41-42** Encontre uma cota superior do erro absoluto que resulta se $s_{10}$ for usada para aproximar a soma da série *geométrica* dada. Calcule $s_{10}$ arredondado em quatro casas decimais e compare esse valor com a soma exata da série. ■

**41.** $\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{16}-\dfrac{3}{32}+\cdots$ **42.** $1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{8}{27}+\cdots$

**43-46** Cada série satisfaz as hipóteses do teste da série alternada. Aproxime a soma da série até duas casas decimais de precisão. ■

**43.** $1-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}-\dfrac{1}{7!}+\cdots$ **44.** $1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{6!}+\cdots$

**45.** $\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}-\dfrac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$

**46.** $\dfrac{1}{1^5+4\cdot 1}-\dfrac{1}{3^5+4\cdot 3}+\dfrac{1}{5^5+4\cdot 5}-\dfrac{1}{7^5+4\cdot 7}+\cdots$

## ENFOCANDO CONCEITOS

C **47.** A proposta deste exercício é mostrar que a estimativa de erro na parte (*b*) do Teorema 9.6.2 pode ser demasiadamente conservadora em certos casos.

(a) Use um CAS para confirmar que

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

(b) Use um CAS para mostrar que $|(\pi/4)-s_{25}|<10^{-2}$.

(c) De acordo com a estimativa de erro na parte (*b*) do Teorema 9.6.2, qual o valor de $n$ que é requerido para assegurar que $|(\pi/4)-s_n|<10^{-2}$?

**48.** Prove que se $\sum a_k$ convergir absolutamente, então a série $\sum a_k^2$ convergirá.

**49.** (a) Obtenha exemplos que mostrem que se $\sum a_k$ convergir, então $\sum a_k^2$ poderá divergir ou convergir.

(b) Obtenha exemplos que mostrem que se $\sum a_k^2$ convergir, então $\sum a_k$ poderá divergir ou convergir.

**50.** Seja $\sum u_k$ uma série e defina as séries $\sum p_k$ e $\sum q_k$ tais que

$$p_k=\begin{cases}u_k, & u_k>0\\ 0, & u_k\le 0\end{cases}\quad\text{e}\quad q_k=\begin{cases}0, & u_k\ge 0\\ -u_k, & u_k<0\end{cases}$$

(a) Mostre que $\sum u_k$ converge absolutamente se, e só se, $\sum p_k$ e $\sum q_k$ convergem.

(b) Mostre que se uma das séries $\sum p_k$ ou $\sum q_k$ convergir e a outra divergir, então $\sum u_k$ divergirá.

(c) Mostre que se $\sum u_k$ convergir condicionalmente, então ambas, $\sum p_k$ e $\sum q_k$, divergem.

**51.** Pode-se provar que os termos de qualquer série condicionalmente convergente podem ser rearranjados para dar ou uma série divergente ou uma série condicionalmente convergente, cuja soma é qualquer número dado $S$. Por exemplo, afirmou-se no Exemplo 2 que

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

Mostre que podemos rearranjar essa série de tal maneira que a soma seja $\frac{1}{2}\ln 2$ reescrevendo-a como

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots$$

[*Sugestão*: Some os dois primeiros termos em cada par de parênteses.]

**52-54** O Exercício 51 ilustra que uma das sutilezas da convergência "condicional" é que a soma de uma série condicionalmente convergente depende da ordem em que os termos são somados. No entanto, séries absolutamente convergentes são mais previsíveis. Pode ser provado que qualquer série que for construída a partir do rearranjo dos termos de uma série absolutamente convergente também será absolutamente convergente e terá a mesma soma que a série original. Use esse fato junto com as partes (*a*) e (*b*) do Teorema 9.4.3 nestes exercícios. ■

**52.** Afirmou-se no Exercício 35 da Seção 9.4 que

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

Use isso para mostrar que

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

**53.** Use a série para $\pi^2/6$ dada no exercício precedente para mostrar que

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$

**54.** Afirmou-se no Exercício 35 da Seção 9.4 que

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

Use isso para mostrar que

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots$$

**55.** **Texto** Considere a série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \cdots$$

Determine se essa série converge e use-a como um exemplo em uma discussão sobre a importância das hipóteses (*a*) e (*b*) do teste da série alternada (Teorema 9.6.1).

**56.** **Texto** Discuta as maneiras pelas quais a convergência condicional é "condicional". Em particular, descreva como poderíamos rearranjar os termos de uma série $\sum u_k$ condicionalmente convergente de tal forma que a série resultante fosse divergente a $+\infty$ ou a $-\infty$. [*Sugestão:* Veja o Exercício 50.]

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.6

**1.** Os termos alternam entre positivo e negativo. **2.** (a) $1 \geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{9} \geq \cdots \geq \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{(k+1)^2} \geq \cdots$; $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k^2} = 0$ (b) $\frac{1}{100}$

**3.** (a) condicionalmente convergente (b) divergente (c) absolutamente convergente (d) condicionalmente convergente

**4.** absolutamente convergente

# 9.7 POLINÔMIOS DE MACLAURIN E DE TAYLOR

*Em uma aproximação linear local, é usada a reta tangente ao gráfico de uma função para obter uma aproximação linear da função na vizinhança do ponto de tangência. Nesta seção, consideraremos como poderemos melhorar a eficácia da aproximação linear local usando polinômios de ordem maior como funções aproximantes. Também investigaremos o erro associado com tais aproximações.*

## APROXIMAÇÕES QUADRÁTICAS LOCAIS

Lembre-se da Fórmula (1) da Seção 3.5 do Volume 1, em que vimos que a aproximação linear local de uma função $f$ em um ponto $x_0$ é

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

Nessa fórmula, a função aproximante

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é um polinômio de primeiro grau satisfazendo $p(x_0) = f(x_0)$ e $p'(x_0) = f'(x_0)$ (verifique). Assim, a aproximação linear local de $f$ em $x_0$ tem a propriedade de que o seu valor e o de sua derivada coincidem com aqueles de $f$ em $x_0$.

Se o gráfico de uma função $f$ tiver uma "curvatura" pronunciada em um ponto $x_0$, então podemos esperar que a precisão da aproximação linear local de $f$ em $x_0$ irá decrescer rapidamente à medida que nos afastarmos de $x_0$ (Figura 9.7.1). Uma maneira de tratar esse problema é aproximar a função $f$ em $x_0$ por um polinômio $p$ de grau 2 com a propriedade de que o valor de $p$ e o de suas duas primeiras derivadas coincidam com os de $f$ em $x_0$. Isso garante que os gráficos de $f$ e $p$ não somente têm a mesma reta tangente em $x_0$, mas também têm curvaturas na mesma direção em $x_0$ (ambos côncavos para cima ou côncavos para baixo). Como resultado, podemos esperar que o gráfico de $p$ permaneça próximo ao gráfico de $f$ por um intervalo maior em torno de $x_0$ do que o gráfico da aproximação linear local. O polinômio $p$ é denominado ***aproximação quadrática local de f no ponto x = x₀***.

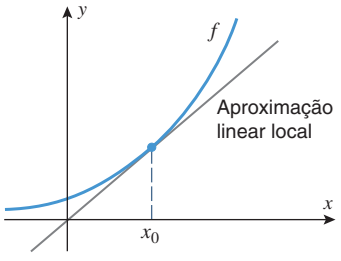



**Figura 9.7.1**

Para ilustrar essa ideia, vamos tentar encontrar uma fórmula para a aproximação quadrática local de uma função $f$ em $x = 0$. Essa aproximação tem a forma

$$f(x) \approx c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \tag{2}$$

onde $c_0$, $c_1$ e $c_2$ devem ser escolhidos de tal forma que os valores de

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

e de suas primeiras duas derivadas coincidam com os de $f$ em 0. Assim, queremos

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0), \quad p''(0) = f''(0) \tag{3}$$

Contudo, os valores de $p(0)$, $p'(0)$ e $p''(0)$ são os seguintes:

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 & p(0) &= c_0 \\ p'(x) &= c_1 + 2c_2x & p'(0) &= c_1 \\ p''(x) &= 2c_2 & p''(0) &= 2c_2 \end{aligned}$$

Assim, segue de (3) que

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = f'(0), \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

e substituindo esses valores em (2) chegamos à seguinte fórmula para a aproximação quadrática local de $f$ em $x = 0$:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \tag{4}$$

**► Exemplo 1** Encontre as aproximações linear e quadrática locais de $e^x$ em $x = 0$ e faça juntos os gráficos de $e^x$ e das duas aproximações.

***Solução*** Se tomarmos $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = e^x$ e, portanto,

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = e^0 = 1$$

Assim, a partir de (4) a aproximação quadrática local de $e^x$ em $x = 0$ é

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

e a aproximação linear local (que é a parte linear da aproximação quadrática local) é

$$e^x \approx 1 + x$$

O gráfico de $e^x$ e das duas aproximações são mostrados na Figura 9.7.2. Como era de se esperar, a aproximação quadrática local é mais precisa do que a aproximação linear local próximo de $x = 0$. ◄

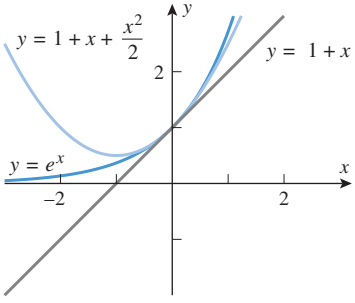



**Figura 9.7.2**

## ■ POLINÔMIOS DE MACLAURIN

É natural indagar se é possível melhorar a precisão de uma aproximação quadrática local usando um polinômio de grau 3. Especificamente, poderíamos procurar por um polinômio de

**Colin Maclaurin (1698-1746)** Matemático escocês. O pai de Maclaurin, um pastor, morreu quando o menino tinha somente seis meses de idade, sua mãe faleceu quando ele estava com nove anos. Ele foi criado, então, por um tio que também era um pastor. Maclaurin ingressou na Universidade de Glasgow como um estudante de Teologia, mas depois de um ano transferiu-se para a Matemática. Com dezessete anos, recebeu o título de mestre e, apesar de sua juventude, começou a lecionar no Marischal College em Aberdeen, na Escócia. Ele encontrou Isaac Newton durante uma visita a Londres, em 1719, e daí em diante, tornou-se um discípulo de Newton. Durante essa época, alguns dos métodos analíticos de Newton estavam sendo amargamente criticados por grandes matemáticos, e muitos dos trabalhos importantes de Maclaurin resultaram dos seus esforços em defender geometricamente as ideias de Newton. Um trabalho de Maclaurin, *Um Tratado de Fluxônios* (1742), foi a primeira formulação sistemática dos métodos de Newton. O tratado foi feito tão cuidadosamente que se tornou padrão de rigor matemático em Cálculo até o trabalho de Cauchy, em 1821. Maclaurin foi também um notável experimentalista. Ele desenvolveu inúmeros inventos mecânicos engenhosos, fez importantes observações astronômicas, realizou cálculos atuariais na área de seguros e ajudou a melhorar os mapas das ilhas em torno da Escócia.

*[Imagem: © Bettmann/Corbis Images]*

grau 3 com a propriedade de que seu valor e os valores das três primeiras derivadas coincidissem com aqueles de $f$ em um ponto; e se isso fornece um aprimoramento na precisão, por que não seguir adiante com polinômios de graus cada vez maiores? Desse modo, somos levados a considerar o seguinte problema geral.

**9.7.1 PROBLEMA** Dada uma função $f$ que possa ser diferenciada $n$ vezes em $x = x_0$, encontre um polinômio $p$ de grau $n$ com a propriedade de que o valor de $p$ e os das suas $n$ primeiras derivadas coincidam com aqueles de $f$ em $x_0$.

Vamos começar resolvendo o problema no caso em que $x_0 = 0$. Assim, queremos um polinômio

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n \tag{5}$$

tal que

$$f(0) = p(0), \quad f'(0) = p'(0), \quad f''(0) = p''(0), \ldots, \quad f^{(n)}(0) = p^{(n)}(0) \tag{6}$$

Contudo,

$$\begin{aligned}
p(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n \\
p'(x) &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots + nc_nx^{n-1} \\
p''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + \cdots + n(n-1)c_nx^{n-2} \\
p'''(x) &= 3 \cdot 2c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3} \\
&\vdots \\
p^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots(1)c_n
\end{aligned}$$

Portanto, para satisfazer (6) devemos ter

$$\begin{aligned}
f(0) &= p(0) &&= c_0 \\
f'(0) &= p'(0) &&= c_1 \\
f''(0) &= p''(0) &&= 2c_2 = 2!c_2 \\
f'''(0) &= p'''(0) &&= 3 \cdot 2c_3 = 3!c_3 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= p^{(n)}(0) &&= n(n-1)(n-2)\cdots(1)c_n = n!c_n
\end{aligned}$$

o que fornece os seguintes valores para os coeficientes de $p(x)$:

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = f'(0), \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \ldots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

O polinômio que resulta substituindo-se esses coeficientes em (5) é chamado de *enésimo polinômio de Maclaurin de f*.

As aproximações linear e quadrática locais em $x = 0$ de uma função $f$ são casos especiais dos polinômios de Maclaurin de $f$. Verifique que $f(x) \approx p_1(x)$ é a aproximação linear local de $f$ em $x = 0$ e que $f(x) \approx p_2(x)$ é a aproximação quadrática local em $x = 0$.

**9.7.2 DEFINIÇÃO** Se $f$ puder ser derivada $n$ vezes em 0, então definiremos o ***enésimo polinômio de Maclaurin de f*** como sendo

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{7}$$

Observe que o polinômio em (7) tem a propriedade de que seu valor e o de suas $n$ primeiras derivadas coincidem com os valores de $f$ e o de suas $n$ primeiras derivadas em $x = 0$.

**► Exemplo 2** Encontre os polinômios de Maclaurin $p_0$, $p_1$, $p_2$, $p_3$ e $p_n$ de $e^x$.

***Solução*** Seja $f(x) = e^x$. Assim,

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$$

e

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Logo,

$$p_0(x) = f(0) = 1$$

$$p_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$$

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad ◄$$

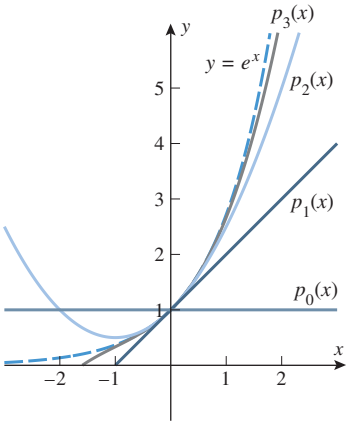



**Figura 9.7.3**

A Figura 9.7.3 mostra os gráficos de $e^x$ (tracejado em azul) e os de seus quatro primeiros polinômios de Maclaurin. Observe que os gráficos de $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são praticamente indistinguíveis do gráfico de $e^x$ próximo de $x = 0$, portanto esses polinômios são boas aproximações de $e^x$ com $x$ próximo de 0. Porém, quanto mais longe $x$ estiver de 0, piores serão essas aproximações. Isso é típico dos polinômios de Maclaurin de uma função $f(x)$; eles fornecem boas aproximações de $f(x)$ próximo de 0, mas a precisão diminui à medida que $x$ se distancia de 0. Em geral, quanto maior for o grau do polinômio, maior será o intervalo no qual fornece uma precisão especificada. A questão da precisão será investigada posteriormente.

**Augustin Louis Cauchy (1789-1857)** Matemático francês. A educação de Cauchy foi iniciada por seu pai, um advogado e mestre dos clássicos. Cauchy ingressou na Escola Politécnica em 1805 para estudar Engenharia mas, por motivos de saúde, foi aconselhado a se concentrar em Matemática. Seu principal trabalho matemático iniciou em 1811, com uma série de soluções brilhantes de alguns problemas difíceis que estavam em aberto. Em 1814, ele escreveu um tratado sobre integração que acabou se tornando a base da moderna teoria de variáveis complexas; em 1816, seguiu-se um artigo clássico sobre a propagação de ondas em líquidos que recebeu um prêmio da Academia Francesa e, em 1822, ele escreveu um artigo que se constitui na base da moderna teoria de Elasticidade. As contribuições matemáticas de Cauchy durante os 35 anos seguintes foram brilhantes e impressionantes em quantidade: mais de 700 artigos, que hoje preenchem 26 volumes. O trabalho de Cauchy iniciou a era da moderna Análise Matemática. Ele trouxe para a Matemática padrões de precisão e rigor que sequer eram sonhados por Leibniz e Newton.

A vida de Cauchy foi extremamente marcada pelos tumultos políticos de sua época. Por ser um decidido partidário dos Bourbons, em 1830 ele abandonou esposa e filhos para seguir o rei Bourbon Carlos X em seu exílio. Por sua lealdade, recebeu do ex-rei o título de barão. Cauchy acabou retornando à França, mas recusou-se a aceitar uma posição universitária até que o governo abrisse mão da exigência de prestar um juramento de lealdade.

É difícil entender claramente sua pessoa. Católico devoto, ele patrocinou trabalho de caridade para mães solteiras, criminosos e de ajuda à Irlanda. No entanto, outros aspectos de sua vida o colocam em luz menos favorável. O matemático norueguês Abel descreveu-o como "demente, infinitamente católico e intolerante". Alguns autores louvam suas aulas, mas outros dizem que ele murmurava incoerentemente e, de acordo com um relato contemporâneo, uma vez dedicou uma aula inteira à extração da raiz quadrada de dezessete até a décima casa decimal usando um método muito bem conhecido por seus alunos. De qualquer forma, Cauchy é, indiscutivelmente, uma das maiores mentes da história da Ciência.

*[Imagem: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg]*

**► Exemplo 3** Encontre os enésimos polinomiais de Maclaurin de

$$\text{(a) } \operatorname{sen} x \quad \text{(b) } \cos x$$

***Solução (a)*** Nos polinômios de Maclaurin para sen $x$, somente aparecem explicitamente as potências ímpares de $x$. Para ver isto, seja $f(x) = \operatorname{sen} x$; assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

Como $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x = f(x)$, o padrão 0, 1, 0, $-1$ irá repetir-se à medida que calcularmos as sucessivas derivadas em 0. Dessa forma, os sucessivos polinômios de Maclaurin de sen $x$ são

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 0 \\ p_1(x) &= 0 + x \\ p_2(x) &= 0 + x + 0 \\ p_3(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} \\ p_4(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 \\ p_5(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} \\ p_6(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 \\ p_7(x) &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} \end{aligned}$$

Por causa dos termos nulos, os polinômios de Maclaurin de ordem par [depois de $p_0(x)$] são iguais aos polinômios de ordem ímpar precedente; isto é,

$$p_{2k+1}(x) = p_{2k+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

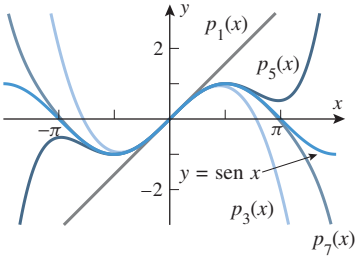



**Figura 9.7.4**

Os gráficos de sen $x$, $p_1(x)$, $p_3(x)$, $p_5(x)$ e $p_7(x)$ estão mostrados na Figura 9.7.4.

***Solução (b)*** Nos polinômios de Maclaurin de cos $x$, somente aparecem explicitamente as potências pares de $x$; os cálculos são similares àqueles da parte (a). O leitor deve conseguir mostrar que

$$\begin{aligned} p_0(x) &= p_1(x) = 1 \\ p_2(x) &= p_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} \\ p_4(x) &= p_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\ p_6(x) &= p_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \end{aligned}$$

Em geral, os polinômios de Maclaurin de cos $x$ são dados por

$$p_{2k}(x) = p_{2k+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

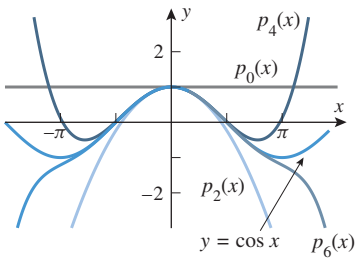



**Figura 9.7.5**

Os gráficos de cos $x$, $p_0(x)$, $p_2(x)$, $p_4(x)$ e $p_6(x)$ estão mostrados na Figura 9.7.5. ◄

## POLINÔMIOS DE TAYLOR

Até agora, focalizamos a aproximação de uma função $f$ na vizinhança de $x = 0$. Vamos, agora, considerar o caso mais geral de aproximar $f$ nas proximidades de um ponto arbitrário $x_0$ do domínio. A ideia básica é igual à anterior; queremos encontrar um polinômio $p$ de grau $n$ com a propriedade de que seu valor e o de suas $n$ primeiras derivadas coincidam com aqueles de $f$ em $x_0$. No entanto, em vez de expressar $p(x)$ em potências de $x$, é conveniente, para simplificar as contas, expressar o polinômio em potências de $x - x_0$, isto é

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n \tag{8}$$

As aproximações linear e quadrática locais em $x = x_0$ de uma função $f$ são casos especiais dos polinômios de Taylor de $f$. Verifique que $f(x) \approx p_1(x)$ é a aproximação linear local de $f$ em $x = x_0$, e que $f(x) \approx p_2(x)$ é a aproximação quadrática local em $x = x_0$.

Deixaremos como exercício para o leitor imitar os cálculos usados no caso em que $x_0 = 0$ para mostrar que

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = f'(x_0), \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \ldots, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Substituindo-se esses valores em (8), obtemos o que é chamado de *enésimo polinômio de Taylor em torno de $x = x_0$ de $f$.*

**9.7.3 DEFINIÇÃO** Se $f$ puder ser derivada $n$ vezes em $x_0$, então definiremos o ***enésimo polinômio de Taylor de $f$ em torno de $x = x_0$*** como sendo

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{9}$$

Os polinômios de Maclaurin são casos especiais dos polinômios de Taylor, com $x_0 = 0$. Assim, todos os teoremas sobre polinômios de Taylor também se aplicam a polinômios de Maclaurin.

▶ **Exemplo 4** Encontre os quatro primeiros polinômios de Taylor de $\ln x$ em torno de $x = 2$.

***Solução*** Seja $f(x) = \ln x$. Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f(2) &= \ln 2 \\ f'(x) &= 1/x & f'(2) &= 1/2 \\ f''(x) &= -1/x^2 & f''(2) &= -1/4 \\ f'''(x) &= 2/x^3 & f'''(2) &= 1/4 \end{aligned}$$

**Brook Taylor (1685-1731)** Matemático inglês. Taylor nasceu em uma família de posses. Artistas e músicos eram recebidos frequentemente na casa de Taylor e tiveram uma influência duradoura sobre o jovem Brook. Anos mais tarde, ele publicou um trabalho definitivo sobre a teoria matemática da perspectiva e obteve resultados matemáticos importantes sobre as vibrações das cordas. Existe também um trabalho não publicado, *On Musick*, que faria parte de uma publicação conjunta com Isaac Newton. A vida de Taylor foi marcada por infelicidade, doença e tragédia. Como sua primeira mulher não era rica o suficiente para agradar seu pai, os dois homens discutiram intensamente e romperam relações. Subsequentemente, sua mulher morreu durante o parto. Então, após casar-se de novo, sua segunda mulher também morreu no parto, embora sua filha tenha sobrevivido. O período mais produtivo de Taylor foi de 1714 a 1719, durante o qual escreveu sobre uma variedade de assuntos: magnetismo, ação capilar, termômetros, perspectivas e Cálculo. Em seus últimos anos, dedicou os seus esforços para escrever sobre Religião e Filosofia. De acordo com Taylor, os resultados que levam o seu nome foram motivados por uma conversa em um café sobre os trabalhos de Newton a respeito do movimento planetário e os trabalhos de Halley (do "cometa Halley") sobre raízes de polinômios. Infelizmente, o estilo da escrita de Taylor era tão conciso e difícil de entender que ele nunca recebeu créditos para muitas de suas inovações.

*[Imagem: http://en.wikipedia.org/wiki/File:BTaylor.jpg]*

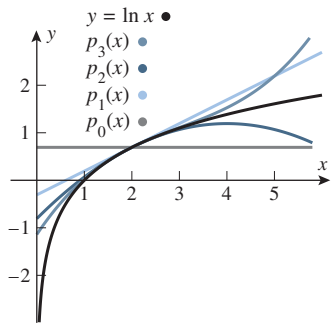



**Figura 9.7.6**

Substituindo-se em (9) com $x_0 = 2$, obtém-se

$$p_0(x) = f(2) = \ln 2$$

$$p_1(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}(x-2)$$

$$p_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 = \ln 2 + \tfrac{1}{2}(x-2) - \tfrac{1}{8}(x-2)^2$$

$$p_3(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$
$$= \ln 2 + \tfrac{1}{2}(x-2) - \tfrac{1}{8}(x-2)^2 + \tfrac{1}{24}(x-2)^3$$

O gráfico de $\ln x$ (em preto) e dos seus quatro primeiros polinômios de Taylor em torno de $x = 2$ estão na Figura 9.7.6. Conforme era de se esperar, esses polinômios produzem sua melhor aproximação de $\ln x$ na vizinhança de 2. ◀

## NOTAÇÃO DE SOMATÓRIO PARA OS POLINÔMIOS DE TAYLOR E MACLAURIN

Muitas vezes, precisaremos expressar a Fórmula (9) em notação sigma. Para fazer isso, usamos a notação $f^{(k)}(x_0)$ para denotar a $k$-ésima derivada de $f$ em $x = x_0$ e faremos a convenção de que $f^{(0)}(x_0)$ denota $f(x_0)$. Isso nos permite escrever

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (10)$$

Em particular, podemos escrever o enésimo polinômio de Maclaurin de $f(x)$ como

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (11)$$

**▶ Exemplo 5** Encontre o enésimo polinômio de Maclaurin de

$$\frac{1}{1-x}$$

***Solução*** Seja $f(x) = 1/(1-x)$. Os valores de $f$ e de suas $k$ primeiras derivadas em $x = 0$ são como segue:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f(0) = 1 = 0!$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(0) = 1 = 1!$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad f''(0) = 2 = 2!$$

$$f'''(x) = \frac{3 \cdot 2}{(1-x)^4} \qquad f'''(0) = 3!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{(1-x)^5} \qquad f^{(4)}(0) = 4!$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \qquad f^{(k)}(0) = k!$$

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Os programas de CAS têm comandos que geram polinômios de Taylor de qualquer grau especificado. Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para encontrar alguns dos polinômios de Maclaurin e Taylor dos Exemplos 3, 4 e 5.

Substituindo $f^{(k)}(0) = k!$ na Fórmula (11), obtemos o enésimo polinômio de Maclaurin de $1/(1 - x)$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \blacktriangleleft$$

**▶ Exemplo 6** Encontre o enésimo polinômio de Taylor de $1/x$ em torno de $x = 1$ e expresse-o em notação sigma.

***Solução*** Seja $f(x) = 1/x$. Os cálculos são análogos aos do Exemplo 5. Deixamos a cargo do leitor mostrar que

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -1, \quad f''(1) = 2!, \quad f'''(1) = -3!,$$
$$f^{(4)}(1) = 4!, \ldots, \quad f^{(k)}(1) = (-1)^k k!$$

Assim, substituindo $f^{(k)}(1) = (-1)^k k!$ na Fórmula (10) com $x_0 = 1$, obtemos o enésimo polinômio de Taylor de $1/x$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x - 1)^k = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + \cdots + (-1)^n (x - 1)^n \blacktriangleleft$$

## O ENÉSIMO RESTO

É conveniente ter uma notação para o erro da aproximação $f(x) \approx p_n(x)$. Assim, denotamos por $R_n(x)$ a diferença entre $f(x)$ e seu enésimo polinômio de Taylor, ou seja,

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{12}$$

Isso também pode ser escrito como

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \tag{13}$$

A função $R_n(x)$ é denominada ***enésimo resto*** da série de Taylor de $f$, e a Fórmula (13) é chamada de ***fórmula de Taylor com resto***.

Obter uma cota para $R_n(x)$ dá uma indicação da precisão da aproximação $p_n(x) \approx f(x)$. O teorema seguinte, que será provado no Apêndice D, fornece uma tal cota.

**9.7.4 TEOREMA** **(*Teorema da Estimativa do Resto*)** *Se a função $f$ puder ser derivada $n + 1$ vezes em um intervalo contendo o ponto $x_0$, e se $M$ for uma cota superior para $|f^{(n+1)}(x)|$ nesse intervalo, ou seja, se $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ com qualquer $x$ do intervalo, então*

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \tag{14}$$

*com qualquer $x$ do intervalo.*

A cota para $|R_n(x)|$ em (14) é chamada de ***estimativa do erro de Lagrange***.

**► Exemplo 7** Use um enésimo polinômio de Maclaurin de $e^x$ para aproximar $e$ com cinco casas decimais de precisão.

***Solução*** Inicialmente, observe que a função exponencial $e^x$ tem derivadas de todas as ordens em cada número real $x$. Pelo Exemplo 2, o enésimo polinômio de Maclaurin de $e^x$ é

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

a partir do que obtemos

$$e = e^1 \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Assim, nosso problema é determinar quantos termos devemos incluir num polinômio de Maclaurin de $e^x$ para obter cinco casas decimais de precisão; isto é, queremos escolher $n$ tal que o valor absoluto do enésimo resto em $x = 1$ satisfaça

$$|R_n(1)| \leq 0{,}000005$$

Para determinar $n$, aplicaremos o Teorema da Estimativa do Resto com $f(x) = e^x$, $x = 1$, $x_0 = 0$, e o intervalo $[0, 1]$. Neste caso, temos a partir da Fórmula (14) que

$$|R_n(1)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot |1 - 0|^{n+1} = \frac{M}{(n+1)!} \tag{15}$$

onde $M$ é uma cota superior do valor de $f^{(n+1)}(x) = e^x$ com $x$ no intervalo $[0, 1]$. Entretanto, $e^x$ é uma função crescente, assim o valor máximo no intervalo $[0, 1]$ ocorre em $x = 1$; isto é, $e^x \leq e$ nesse intervalo. Desse modo, podemos tomar $M = e$ em (15) para obter

$$|R_n(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \tag{16}$$

Infelizmente, essa desigualdade não é muito útil, pois envolve $e$, que é a própria quantidade que estamos tentando aproximar. Entretanto, se aceitarmos que $e < 3$, então podemos substituir (16) com a seguinte desigualdade, que é menos precisa, mas mais útil:

$$|R_n(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Assim, podemos obter precisão de cinco casas decimais escolhendo $n$ tal que

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 0{,}000005 \quad \text{ou} \quad (n+1)! \geq 600.000$$

Como $9! = 362.880$ e $10! = 3.628.800$, o menor valor de $n$ que satisfaz este critério é $n = 9$. Assim, com cinco casas decimais de precisão

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} \approx 2{,}71828$$

Como comparação, a representação de $e$ com 12 casas decimais, dada por uma calculadora, é $e \approx 2{,}71828182846$, a qual coincide com a aproximação acima quando arredondada para cinco casas decimais. ◄

**► Exemplo 8** Use o Teorema da Estimativa do Resto para encontrar um intervalo contendo $x = 0$ no qual $f(x) = \cos x$ possa ser aproximada por $p(x) = 1 - (x^2/2!)$ com três casas decimais de precisão.

***Solução*** Inicialmente, observamos que $f(x) = \cos x$ tem derivadas de todas as ordens em cada número real $x$, de modo que a primeira hipótese do Teorema da Estimativa do Resto es-

tará satisfeita em qualquer intervalo que escolhermos. O polinômio $p(x)$ dado é o segundo e também o terceiro polinômio de Maclaurin de cos $x$; como queremos o maior grau $n$ do polinômio, escolhemos $n = 3$. Nosso problema é encontrar um intervalo no qual o valor absoluto do terceiro resto em $x$ satisfaça

$$|R_3(x)| \le 0{,}0005$$

Vamos usar o Teorema da Estimativa do Resto com $f(x) = \cos x$, $n = 3$ e $x_0 = 0$. Segue de (14) que

$$|R_3(x)| \le \frac{M}{(3+1)!}|x-0|^{3+1} = \frac{M|x|^4}{24} \tag{17}$$

onde $M$ é uma cota superior de $|f^{(4)}(x)| = |\cos x|$. Como $|\cos x| \le 1$ em cada número real $x$, podemos tomar $M = 1$ em (17) e obter

$$|R_3(x)| \le \frac{|x|^4}{24} \tag{18}$$

Assim, podemos obter precisão de três casas decimais escolhendo valores de $x$ com os quais

$$\frac{|x|^4}{24} \le 0{,}0005 \quad \text{ou} \quad |x| \le 0{,}3309$$

de modo que o intervalo $[-0{,}3309, 0{,}3309]$ é uma opção. Podemos conferir isso traçando o gráfico de $|f(x) - p(x)|$ sobre o intervalo $[-0{,}3309, 0{,}3309]$ (Figura 9.7.7). ◀

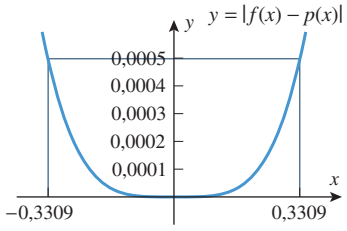



**Figura 9.7.7**

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.7 *(Ver página 659 para respostas.)*

**1.** Se $f$ puder ser derivada três vezes em 0, então o terceiro polinômio de Maclaurin para $f$ será $p_3(x) =$ _____.

**2.** O terceiro polinômio de Maclaurin de $f(x) = e^{2x}$ é

$$p_3(x) = _____ + _____\, x + _____\, x^2 + _____\, x^3$$

**3.** Se $f(2) = 3$, $f'(2) = -4$ e $f''(2) = 10$, então o segundo polinômio de Taylor de $f$ em torno de $x = 2$ será $p_2(x) =$ _____.

**4.** O terceiro polinômio de Taylor de $f(x) = x^5$ em torno de $x = -1$ é

$$p_3(x) = _____ + _____\,(x+1) + _____\,(x+1)^2 + _____\,(x+1)^3$$

**5.** (a) Se uma função $f$ tiver um enésimo polinômio $p_n(x)$ em torno de $x = x_0$, então o enésimo resto $R_n(x)$ será definido por $R_n(x) =$ _____.

(b) Suponha que uma função $f$ possa ser derivada cinco vezes num intervalo contendo $x_0 = 2$ e que $|f^{(5)}(x)| \le 20$ em cada $x$ do intervalo. Então o quarto resto satisfará $|R_4(x)| \le$ _____ em cada $x$ do intervalo.

## EXERCÍCIOS 9.7 Recurso Gráfico

**1-2.** Em cada parte, encontre a aproximação quadrática local de $f$ em $x = x_0$ e use-a para encontrar a aproximação linear local de $f$ em $x = x_0$. Use um recurso gráfico para esboçar o gráfico de $f$ e das duas aproximações em uma mesma tela. ■

**1.** (a) $f(x) = e^{-x}$; $x_0 = 0$ (b) $f(x) = \cos x$; $x_0 = 0$

**2.** (a) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $x_0 = \pi/2$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$

**3.** (a) Encontre a aproximação quadrática local de $\sqrt{x}$ em $x_0 = 1$.

(b) Use o resultado obtido na parte (a) para aproximar $\sqrt{1{,}1}$ e compare a sua aproximação com a obtida diretamente por seu recurso computacional. [*Nota*: Ver o Exemplo 1 da Seção 3.5, no Volume 1.]

**4.** (a) Encontre a aproximação quadrática local de cos $x$ em $x_0 = 0$.

(b) Use o resultado obtido na parte (a) para aproximar cos 2° e compare a aproximação com a obtida diretamente por seu recurso computacional.

**5.** Use uma aproximação quadrática local apropriada para aproximar tg 61° e compare o resultado com o obtido diretamente por seu recurso computacional.

**6.** Use uma aproximação quadrática local apropriada para aproximar $\sqrt{36{,}03}$ e compare o resultado com o obtido diretamente por seu recurso computacional.

**7-16** Encontre os polinômios de Maclaurin de ordens $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 e, então, obtenha o enésimo polinômio de Maclaurin da função em notação de somatório. ■

**7.** $e^{-x}$ **8.** $e^{ax}$ **9.** $\cos \pi x$

**10.** $\operatorname{sen} \pi x$ **11.** $\ln(1 + x)$ **12.** $\dfrac{1}{1+x}$

**13.** $\cosh x$ **14.** $\operatorname{senh} x$ **15.** $x \operatorname{sen} x$

**16.** $xe^x$

**17-24** Encontre os polinômios de Taylor de ordens $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 em torno de $x = x_0$ e, então, encontre o enésimo polinômio de Taylor da função em notação de somatório. ■

**17.** $e^x;\ x_0 = 1$ **18.** $e^{-x};\ x_0 = \ln 2$

**19.** $\dfrac{1}{x};\ x_0 = -1$ **20.** $\dfrac{1}{x+2};\ x_0 = 3$

**21.** $\operatorname{sen} \pi x;\ x_0 = \dfrac{1}{2}$ **22.** $\cos x;\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

**23.** $\ln x;\ x_0 = 1$ **24.** $\ln x;\ x_0 = e$

**25.** (a) Encontre o terceiro polinômio de Maclaurin de

$$f(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$$

(b) Encontre o terceiro polinômio de Taylor em torno de $x = 1$ para

$$f(x) = 1 + 2(x - 1) - (x - 1)2 + (x - 1)^3$$

**26.** (a) Encontre o enésimo polinômio de Maclaurin de

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

(b) Encontre o enésimo polinômio de Taylor em torno de $x = 1$ de

$$f(x) = c_0 + c_1(x - 1) + c_2(x - 1)^2 + \cdots + c_n(x - 1)^n$$

**27-30** Encontre os quatro primeiros polinômios de Taylor distintos em torno de $x = x_0$ e use um recurso computacional para fazer o gráfico da função dada e dos polinômios de Taylor na mesma tela. ■

**27.** $f(x) = e^{-2x};\ x_0 = 0$ **28.** $f(x) = \operatorname{sen} x;\ x_0 = \pi/2$

**29.** $f(x) = \cos x;\ x_0 = \pi$ **30.** $\ln(x + 1);\ x_0 = 0$

**31-34 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**31.** A equação da reta tangente a uma função diferenciável é o primeiro polinômio de Taylor dessa função.

**32.** O gráfico de uma função $f$ e o de seu polinômio de Maclaurin têm um corte com o eixo $y$ em comum.

**33.** Se $p_6(x)$ for o sexto polinômio de Taylor de uma função $f$ em torno de $x = x_0$, então $p_6^{(4)}(x_0) = 4!f^{(4)}(x_0)$.

**34.** Se $p_4(x)$ for o quarto polinômio de Maclaurin de $e^x$, então

$$|e^2 - p_4(2)| \le \frac{9}{5!}$$

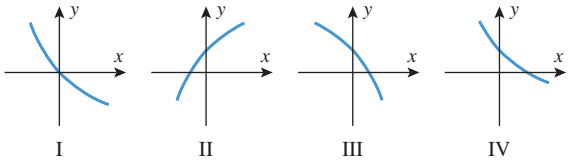
**35-36** Use o método do Exemplo 7 para aproximar a expressão dada com o grau de precisão especificado. Confira sua resposta com a produzida diretamente por um recurso computacional. ■

**35.** $\sqrt{e}$; quatro casas decimais de precisão.

**36.** $1/e$; três casas decimais de precisão.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**37.** Quais das funções cujo gráfico está na figura a seguir mais provavelmente tem $p(x) = 1 - x + 2x^2$ como o seu polinômio de Maclaurin de segunda ordem? Explique seu raciocínio.




**38.** Suponha que os valores de uma função $f$ e de suas três primeiras derivadas em $x = 1$ sejam

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = -3, \quad f''(1) = 0, \quad f'''(1) = 6$$

Obtenha tantos polinômios de Taylor para $f$ quantos puder em torno de $x = 1$.

**39.** Sejam $p_1(x)$ e $p_2(x)$ as aproximações linear e quadrática locais de $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ em $x = 0$.

(a) Use um recurso computacional para gerar na mesma tela os gráficos de $f(x)$, $p_1(x)$ e $p_2(x)$ com $-1 \le x \le 1$.

(b) Construa uma tabela de valores de $f(x)$, $p_1(x)$ e $p_2(x)$ para $x = -1{,}00;\ -0{,}75;\ -0{,}50;\ -0{,}25;\ 0;\ 0{,}25;\ 0{,}50;\ 0{,}75;\ 1{,}00$. Arredonde os valores para três casas decimais.

(c) Gere o gráfico de $|f(x) - p_1(x)|$ e use-o para determinar um intervalo no qual $p_1(x)$ aproxime $f(x)$ com um erro de, no máximo, $\pm 0{,}01$. [*Sugestão*: Reveja a discussão relativa à Figura 3.5.4, do Volume 1.]

(d) Gere o gráfico de $|f(x) - p_2(x)|$ e use-o para determinar um intervalo no qual $p_2(x)$ aproxime $f(x)$ com um erro de, no máximo, $\pm 0{,}01$.

**40.** (a) A figura abaixo mostra um setor de raio $r$ e ângulo central $2\alpha$. Supondo que o ângulo $\alpha$ seja pequeno, use a aproximação quadrática local de $\cos \alpha$ em $\alpha = 0$ para mostrar que $x \approx r\alpha^2/2$.

(b) Supondo que a Terra seja uma esfera com um raio de 4.000 milhas, use o resultado da parte (a) para aproximar a distância máxima que um arco de 100 milhas ao longo do Equador pode divergir de sua corda.

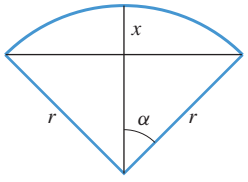



**Figura Ex-40**

**41.** (a) Determine um intervalo $[0, b]$ no qual $e^x$ possa ser aproximada por $1 + x + (x^2/2!)$ com até três casas decimais de precisão em todo o intervalo.

(b) Confira sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico de

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)\right|$$

sobre o intervalo obtido.

**42.** Mostre que o enésimo polinômio de Taylor de senh $x$ em torno de $x = \ln 4$ é

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{16 - (-1)^k}{8k!}(x - \ln 4)^k$$

**43-46** Use o Teorema da Estimativa do Resto para encontrar um intervalo contendo $x = 0$ no qual $f(x)$ possa ser aproximada por $p(x)$ com precisão de três casas decimais em cada ponto do intervalo. Confira sua resposta traçando o gráfico de $|f(x) - p(x)|$ sobre o intervalo encontrado. ■

**43.** $f(x) = \operatorname{sen} x;\ p(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$

**44.** $f(x) = \cos x;\ p(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$

**45.** $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2};\ p(x) = 1 - x^2 + x^4$

**46.** $f(x) = \ln(1 + x);\ p(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.7

**1.** $f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3$ **2.** 1; 2; 2; $\frac{4}{3}$ **3.** $3 - 4(x - 2) + 5(x - 2)^2$ **4.** $-1$; 5; $-10$; 10

**5.** (a) $f(x) - p_n(x)$ (b) $\frac{1}{6}|x - 2|^5$

## 9.8 SÉRIES DE MACLAURIN E DE TAYLOR; SÉRIES DE POTÊNCIAS

*Lembre-se de que, na seção anterior, definimos o enésimo polinômio de Taylor $p_n(x)$ em $x = x_0$ de uma função $f$ de tal modo que os valores de suas primeiras $n$ derivadas coincidissem com as de $f$ em $x_0$. Desse modo, é razoável antecipar que, com valores de $x$ próximos de $x_0$, à medida que $n$ cresce, os valores de $p_n(x)$ serão aproximações cada vez melhores de $f(x)$ e que, possivelmente, possam convergir a $f(x)$ quando $n \to +\infty$. Nesta seção, exploraremos essa ideia.*

### ■ SÉRIES DE MACLAURIN E DE TAYLOR

Na Seção 9.7, definimos o enésimo polinômio de Maclaurin de uma função $f$ como

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

e o enésimo polinômio de Taylor de $f$ em torno de $x = x_0$ como

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Não é um passo tão grande estender os conceitos de polinômios de Maclaurin e de Taylor para séries, bastando simplesmente não parar o índice do somatório em $n$. Assim, temos a seguinte definição.

**9.8.1 DEFINIÇÃO** Se a função $f$ possuir derivadas de todas as ordens em $x_0$, então dizemos que a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \cdots \quad (1)$$

é a ***série de Taylor de f em torno de x = 0***. No caso especial em que $x_0 = 0$, essa série se torna

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots \quad (2)$$

caso em que é chamada ***série de Maclaurin de f***.

Observe que os enésimos polinômios de Maclaurin e de Taylor são as enésimas somas parciais das correspondentes séries de Maclaurin e de Taylor.

► **Exemplo 1** Encontre a série de Maclaurin de

(a) $ex$ (b) $\operatorname{sen} x$ (c) $\cos x$ (d) $\dfrac{1}{1-x}$

***Solução (a)*** No Exemplo 2 da Seção 9.7, vimos que o enésimo polinômio de Maclaurin de $e^x$ é

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Assim, a série de Maclaurin de $e^x$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

***Solução (b)*** No Exemplo 3(a) da Seção 9.7, vimos que os polinômios de Maclaurin de sen $x$ são dados por

$$p_{2k+1}(x) = p_{2k+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Assim, a série de Maclaurin de sen $x$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$$

***Solução (c)*** No Exemplo 3(b) da Seção 9.7, vimos que os polinômios de Maclaurin de cos $x$ são dados por

$$p_{2k}(x) = p_{2k+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Assim, a série de Maclaurin de cos $x$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots$$

***Solução (d)*** No Exemplo 5 da Seção 9.7, vimos que o enésimo polinômio de Maclaurin de $1/(1-x)$ é

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Assim, a série de Maclaurin de $1/(1-x)$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots \blacktriangleleft$$

**▶ Exemplo 2** Encontre a série de Taylor de $1/x$ em torno de $x = 1$.

***Solução*** No Exemplo 6 da Seção 9.7, vimos que o enésimo polinômio de Taylor de $1/x$ em torno de $x = 1$ é

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots + (-1)^n (x-1)^n$$

Assim, a série de Taylor de $1/x$ em torno de $x = 1$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots + (-1)^k (x-1)^k + \cdots \blacktriangleleft$$

## SÉRIES DE POTÊNCIAS EM *x*

As séries de Maclaurin e de Taylor diferem das séries que consideramos nas Seções 9.3 até 9.6, pois seus termos, em vez de serem meramente constantes, envolvem uma variável. Essas séries são exemplos de *séries de potências*, que passamos a definir.

Se $c_0, c_1, c_2, \ldots$ forem constantes e $x$ for uma variável, então uma série da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k + \cdots \tag{3}$$

será denominada uma ***série de potências em x***. Alguns exemplos são

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Pelo Exemplo 1, essas são as séries de Maclaurin das funções $1/(1-x)$, $e^x$ e $\cos x$, respectivamente. Na verdade, toda série de Maclaurin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \cdots$$

é uma série de potências em $x$.

## RAIO E INTERVALO DE CONVERGÊNCIA

Quando numa série de potências $\sum c_k x^k$ a variável $x$ for substituída por um valor numérico, obtemos uma série de números que pode convergir ou não. Isso nos leva ao problema de determinar o conjunto de valores de $x$ nos quais uma dada série de potências converge; esse é o ***conjunto de convergência***.

Observe que toda série de potências em $x$ converge em $x = 0$, uma vez que a substituição desse valor em (3) produz a série

$$c_0 + 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$$

cuja soma é $c_0$. Em alguns casos, $x = 0$ pode ser o único ponto no conjunto de convergência; em outros, o conjunto de convergência é algum intervalo finito ou infinito contendo $x = 0$. Esse é o conteúdo do teorema seguinte, cuja prova será omitida.

**9.8.2 TEOREMA** *Dada qualquer série de potências em x, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira*:

(*a*) *A série converge somente em* $x = 0$.

(*b*) *A série converge absolutamente* (*e, portanto, converge*) *em todos os valores reais de x.*

(*c*) *A série converge absolutamente* (*e, portanto, converge*) *em todo x de algum intervalo aberto finito* $(-R, R)$ *e diverge se* $x < -R$ *ou* $x > R$. *Em cada um dos pontos* $x = R$ *ou* $x = -R$, *a série pode convergir absolutamente, convergir condicionalmente ou divergir, dependendo da série considerada.*

Esse teorema afirma que o conjunto de convergência de uma série de potências em $x$ é sempre um intervalo centrado em $x = 0$ (possivelmente, o próprio ponto $x = 0$ ou infinito). Por essa razão, o conjunto de convergência de uma série de potências em $x$ é chamado de ***intervalo de convergência***. No caso em que o conjunto de convergência for o único ponto $x = 0$, diremos que a série tem ***raio de convergência 0***; no caso em que o conjunto de convergência for $(-\infty, +\infty)$, diremos que a série tem ***raio de convergência*** $+\infty$; e no caso em que o conjunto de convergência estender-se de $-R$ a $R$, diremos que a série tem ***raio de convergência R*** (Figura 9.8.1).

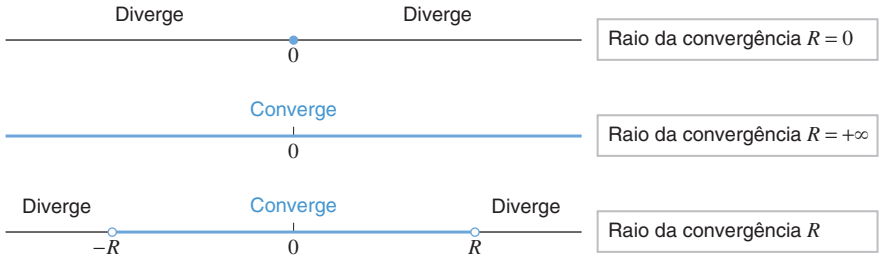



**Figura 9.8.1**

## DETERMINANDO O INTERVALO DE CONVERGÊNCIA

O procedimento usual para determinar o intervalo de convergência de uma série de potências é aplicar o teste da razão para a convergência absoluta (Teorema 9.6.5). O exemplo seguinte ilustra como isso funciona.

**▶ Exemplo 3** Determine o intervalo de convergência e o raio de convergência das seguintes séries de potências.

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{(c)} \sum_{k=0}^{\infty} k! x^k \qquad \text{(d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{3^k (k+1)}$$

***Solução (a)*** Aplicamos o teste da razão para a convergência absoluta. Temos

$$\rho = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = \lim_{k\to+\infty}|x| = |x|$$

portanto, a série converge absolutamente se $\rho = |x| < 1$ e diverge se $\rho = |x| > 1$. O teste é inconclusivo se $|x| = 1$ (isto é, se $x = 1$ ou $x = -1$), o que significa que devemos investigar a convergência nesses pontos separadamente. Nesses pontos, a série torna-se

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots \qquad \boxed{x = 1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \qquad \boxed{x = -1}$$

ambas as quais divergem; assim, o intervalo de convergência da série de potências dada é $(-1, 1)$, e o raio de convergência é $R = 1$.

***Solução (b)*** Aplicando o teste da razão para a convergência absoluta, obtemos

$$\rho = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{x^k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{x}{k+1}\right| = 0$$

Uma vez que $\rho < 1$ com qualquer $x$, a série converge absolutamente em todo $x$. Logo, o intervalo de convergência é $(-\infty, +\infty)$, e o raio de convergência é $R = +\infty$.

***Solução (c)*** Se $x \neq 0$, então o teste da razão para a convergência absoluta fornece

$$\rho = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{(k+1)!x^{k+1}}{k!x^k}\right| = \lim_{k\to+\infty}|(k+1)x| = +\infty$$

Portanto, a série diverge em todos os valores de $x$ diferentes de zero. Assim, o intervalo de convergência é o único ponto $x = 0$, e o raio de convergência é $R = 0$.

***Solução (d)*** Uma vez que $|(-1)^k| = |(-1)^{k+1}| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\rho = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| &= \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{3^{k+1}(k+2)}\cdot\frac{3^k(k+1)}{x^k}\right| \\ &= \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{|x|}{3}\cdot\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\right] \\ &= \frac{|x|}{3}\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1+(1/k)}{1+(2/k)}\right) = \frac{|x|}{3}\end{aligned}$$

O teste da razão para a convergência absoluta implica que a série converge absolutamente se $|x| < 3$ e diverge se $|x| > 3$. O teste da razão deixa de fornecer qualquer informação quando $|x| = 3$; logo, os casos $x = -3$ e $x = 3$ precisam ser analisados separadamente. Substituindo $x = -3$ na série dada, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-3)^k}{3^k(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-1)^k3^k}{3^k(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}$$

que é a série harmônica divergente $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$. Substituir $x = 3$ na série dada resulta

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k3^k}{3^k(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

que é a série harmônica alternada condicionalmente convergente. Assim, o intervalo de convergência da série dada é $(-3, 3]$, e o raio de convergência é $R = 3$. ◀

## SÉRIE DE POTÊNCIAS EM $x - x_0$

Se $x_0$ for uma constante, e se $x$ for substituído por $x - x_0$ em (3), então a série resultante terá a forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_k(x - x_0)^k + \cdots$$

Isso é chamado de ***série de potências em $x - x_0$***. Alguns exemplos são

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k+1} = 1 + \frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(x-1)^3}{4} + \cdots \qquad x_0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(x+3)^k}{k!} = 1 - (x+3) + \frac{(x+3)^2}{2!} - \frac{(x+3)^3}{3!} + \cdots \qquad x_0 = -3$$

A primeira é uma série de potências em $x - 1$, e a segunda é uma série de potências em $x + 3$. Note que uma série de potências em $x$ é uma série de potências em $x - x_0$ na qual $x_0 = 0$. Mais geralmente, a série de Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

é uma série de potências em $x - x_0$.

O resultado principal sobre a convergência de uma série de potências em $x - x_0$ pode ser obtido substituindo $x$ por $x - x_0$ no Teorema 9.8.2. Isso leva ao seguinte teorema.

**9.8.3 TEOREMA** *Dada qualquer série de potências $\sum c_k(x - x_0)^k$, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

(*a*) *A série converge somente em $x = x_0$.*

(*b*) *A série converge absolutamente (e, portanto, converge) em todos os valores reais de $x$.*

(*c*) *A série converge absolutamente (e, portanto, converge) em todo $x$ de algum intervalo aberto finito $(x_0 - R, x_0 + R)$ e diverge se $x < x_0 - R$ ou $x > x_0 + R$. Em cada um dos pontos $x = x_0 - R$ ou $x = x_0 + R$, a série pode convergir absolutamente, convergir condicionalmente ou divergir, dependendo da série considerada.*

Tem-se, a partir desse teorema, que o conjunto de valores nos quais uma série de potências em $x - x_0$ converge é sempre um intervalo centrado em $x = x_0$, denominado ***intervalo de convergência*** (Figura 9.8.2). Na parte (*a*) do Teorema 9.8.3, o intervalo de convergência reduz-se ao único ponto $x = x_0$, caso em que dizemos que a série tem ***raio de convergência $R = 0$***; na parte (*b*), o intervalo de convergência é infinito (toda a reta

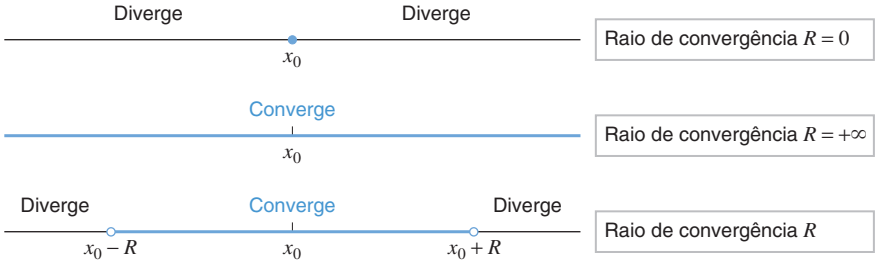



**Figura 9.8.2**

real), caso em que dizemos que a série tem ***raio de convergência R = +∞***; e na parte $(c)$, o intervalo estende-se de $x_0 - R$ a $x_0 + R$, caso em que dizemos que a série tem ***raio de convergência R.***

► **Exemplo 4** Determine o intervalo de convergência e o raio de convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k^2}$$

***Solução*** Aplicando o teste da razão para a convergência absoluta, obtemos

$$\begin{aligned}\rho = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| &= \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{(x-5)^{k+1}}{(k+1)^2}\cdot\frac{k^2}{(x-5)^k}\right| \\ &= \lim_{k\to+\infty}\left[|x-5|\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right] \\ &= |x-5|\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1+(1/k)}\right)^2 = |x-5|\end{aligned}$$

Assim, a série converge absolutamente se $|x-5|<1$, ou $-1<x-5<1$, ou $4<x<6$. A série diverge se $x<4$ ou $x>6$.

Para determinar o comportamento da convergência nas extremidades $x=4$ e $x=6$, substituímos esses valores na série dada. Se $x=6$, a série torna-se

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

que é uma série $p$ convergente ($p=2$). Se $x=4$, a série torna-se

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \cdots$$

Uma vez que esta série converge absolutamente, o intervalo de convergência da série dada é $[4, 6]$. O raio de convergência é $R=1$ (Figura 9.8.3). ◄

Será sempre uma perda de tempo testar a convergência nas extremidades do intervalo de convergência usando o teste da razão, uma vez que $\rho$ será sempre 1 nesses pontos se

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|$$

existir. Explique por que isso é assim.

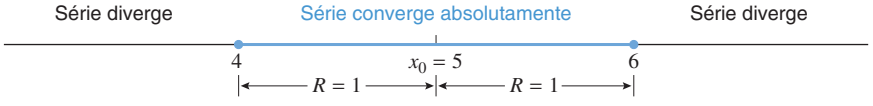


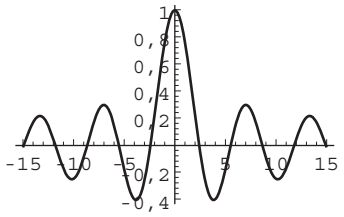

**Figura 9.8.3**

## ■ FUNÇÕES DEFINIDAS POR SÉRIES DE POTÊNCIAS

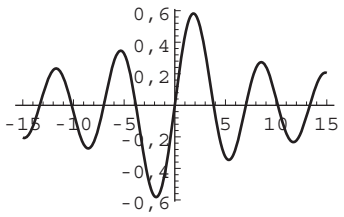
Se uma função $f$ for expressa como uma série de potências em algum intervalo, então dizemos que a série de potências ***representa*** a função $f$ naquele intervalo ou, então, que $f$ está ***representada*** por uma série de potências naquele intervalo. Por exemplo, vimos no Exemplo 4$(a)$ da Seção 9.3 que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

se $|x|<1$, de modo que essa série de potências representa a função $1/(1-x)$ no intervalo $-1<x<1$.




$y = J_0(x)$




$y = J_1(x)$

*Gerado por Mathematica*

**Figura 9.8.4**

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Muitos programas CAS têm as funções de Bessel como parte de seu repertório. Se você tiver um CAS com funções de Bessel, gere os gráficos mostrados na Figura 9.8.4.

Algumas vezes, funções novas de fato se originam como séries de potências, e as propriedades das funções são desenvolvidas trabalhando com suas representações em séries de potências. Por exemplo, as funções

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \cdots \tag{4}$$

e

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+1}(k!)(k+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3(1!)(2!)} + \frac{x^5}{2^5(2!)(3!)} - \cdots \tag{5}$$

que são chamadas de ***funções de Bessel*** em homenagem ao matemático e astrônomo alemão Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846). Elas surgem naturalmente no estudo do movimento planetário e em vários problemas que envolvem fluxo de calor.

Para encontrar o domínio dessas funções, precisamos determinar onde convergem as séries de potências que as definem. Por exemplo, no caso de $J_0(x)$, temos

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{x^{2(k+1)}}{2^{2(k+1)}[(k+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2k}(k!)^2}{x^{2k}} \right|$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{x^2}{4(k+1)^2} \right| = 0 < 1$$

de modo que a série converge em todo $x$; isto é, o domínio de $J_0(x)$ é $(-\infty, +\infty)$. Deixamos como exercício mostrar que a série de potências de $J_1(x)$ também converge em todo $x$. Gráficos gerados por computador de $J_0(x)$ e $J_1(x)$ estão apresentados na Figura 9.8.4.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.8 (*Ver página 668 para respostas.*)

**1.** Se $f$ tiver derivadas de todas as ordens em $x_0$, então a série de Taylor de $f$ em torno de $x = x_0$ é definida por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{_____}$$

**2.** Como

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{2^{k+1}x^{k+1}}{2^k x^k} \right| = 2|x|$$

o raio de convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ é _____.

**3.** Como

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{(3^{k+1}x^{k+1})/(k+1)!}{(3^k x^k)/k!} \right| = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{3x}{k+1} \right| = 0$$

o raio de convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} (3^k/k!)x^k$ é _____.

**4.** (a) Como

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{(x-4)^{k+1}/\sqrt{k+1}}{(x-4)^k/\sqrt{k}} \right| = \lim_{k\to+\infty} \left| \sqrt{\frac{k}{k+1}}(x-4) \right|$$

$$= |x-4|$$

o raio de convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} (1/\sqrt{k})(x-4)^k$ é _____.

(b) Se $x = 3$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}(x-4)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}(-1)^k$$

Essa série converge ou diverge?

(c) Se $x = 5$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}(x-4)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Essa série converge ou diverge?

(d) O intervalo de convergência da série infinita $\sum_{k=1}^{\infty} (1/\sqrt{k})(x-4)^k$ é _____.

## EXERCÍCIOS 9.8 Recurso Gráfico CAS

**1-10** Use a notação de somatório para escrever a série de Maclaurin da função dada. ■

**1.** $e^{-x}$ **2.** $e^{ax}$ **3.** $\cos \pi x$ **4.** $\operatorname{sen} \pi x$

**5.** $\ln(1+x)$ **6.** $\dfrac{1}{1+x}$ **7.** $\cosh x$

**8.** $\operatorname{senh} x$ **9.** $x \operatorname{sen} x$ **10.** $xe^{x}$

**11-18** Use a notação de somatório para escrever a série de Taylor em torno de $x = x_0$ da função dada. ■

**11.** $e^{x};\ x_0 = 1$ **12.** $e^{-x};\ x_0 = \ln 2$

**13.** $\dfrac{1}{x};\ x_0 = -1$ **14.** $\dfrac{1}{x+2};\ x_0 = 3$

**15.** $\operatorname{sen} \pi x;\ x_0 = \dfrac{1}{2}$ **16.** $\cos x;\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

**17.** $\ln x;\ x_0 = 1$ **18.** $\ln\ x;\ x_0 = \mathrm{e}$

**19-22** Determine o intervalo de convergência da série de potências e encontre uma função conhecida que esteja representada pela série de potências naquele intervalo. ■

**19.** $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots$

**20.** $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2k} + \cdots$

**21.** $1 + (x-2) + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^k + \cdots$

**22.** $1 - (x+3) + (x+3)^2 - (x+3)^3 + \cdots + (-1)^k (x+3)^k \ldots$

**23.** Suponha que a função $f$ esteja representada pela série de potências

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{2^k} + \cdots$$

(a) Encontre o domínio de $f$. (b) Encontre $f(0)$ e $f(1)$.

**24.** Suponha que a função $f$ esteja representada pela série de potências

$$f(x) = 1 - \frac{x-5}{3} + \frac{(x-5)^2}{3^2} - \frac{(x-5)^3}{3^3} + \cdots$$

(a) Encontre o domínio de $f$. (b) Encontre $f(3)$ e $f(6)$.

**25-28 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**25.** Se uma série de potências em $x$ convergir condicionalmente em $x = 3$, então a série convergirá se $|x| < 3$ e divergirá se $|x| > 3$.

**26.** O teste da razão é útil para determinar a convergência nas extremidades do intervalo de convergência de uma série de potências.

**27.** A série de Maclaurin de uma função polinomial tem raio de convergência $+\infty$.

**28.** A série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge se $|x| < 1$.

**29-50** Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência. ■

**29.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$ **30.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$ **31.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$

**32.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^k} x^k$ **33.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2} x^k$ **34.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\ln k}$

**35.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$ **36.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k x^{k+1}}{k+1}$

**37.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$ **38.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

**39.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} x^k$ **40.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k(\ln k)^2}$

**41.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{1+k^2}$ **42.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

**43.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k$ **44.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{2^k}$

**45.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x+1)^k}{k}$ **46.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-4)^k}{(k+1)^2}$

**47.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x+1)^{2k+1}}{k^2+4}$ **48.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{k^3} (x-2)^k$

**49.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k (x-1)^{2k}}{(2k+1)!}$ **50.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^k}{4^{2k}}$

**51.** Use o teste da raiz para determinar o intervalo de convergência de

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{(\ln k)^k}$$

**52.** Determine o domínio da função

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{(2k-2)!} x^k$$

**53.** Mostre que a série

$$1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots$$

é a série de Maclaurin da função

$$f(x) = \begin{cases} \cos \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \cosh \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

[*Sugestão*: Use as séries de Maclaurin de $\cos x$ e $\cosh x$ para obter a série de $\cos \sqrt{x}$, onde $x \geq 0$, e $\cosh \sqrt{-x}$, onde $x \leq 0$.]

### ENFOCANDO CONCEITOS

**54.** Se uma função $f$ estiver representada por uma série de potências em um intervalo, então os gráficos das somas parciais podem ser usados como aproximações para o gráfico de $f$.

(a) Use um recurso gráfico para gerar o gráfico de $1/(1-x)$ junto com o gráfico das quatro primeiras somas parciais da sua série de Maclaurin sobre o intervalo $(-1, 1)$.

(b) Em termos gerais, onde é que os gráficos das somas parciais são mais precisos?

**55.** Prove as afirmações:
(a) Se $f$ for uma função par, então todas as potências ímpares de $x$ na série de Maclaurin de $f$ terão coeficiente 0.
(b) Se $f$ for uma função ímpar, então todas as potências pares de $x$ na série de Maclaurin de $f$ terão coeficiente 0.

**56.** Suponha que a série de potências $\sum c_k(x-x_0)^k$ tenha raio de convergência $R$ e que $p$ seja uma constante não nula. O que podemos dizer sobre o raio de convergência da série de potências $\sum pc_k(x-x_0)^k$? Explique seu raciocínio. [*Sugestão*: Ver Teorema 9.4.3.]

**57.** Suponha que a série de potências $\sum c_k(x-x_0)^k$ tenha um raio de convergência finito $R$ e que a série de potências $\sum d_k(x-x_0)^k$ tenha um raio de convergência $+\infty$. O que podemos dizer sobre o raio de convergência de $\sum(c_k+d_k)(x-x_0)^k$? Explique seu raciocínio.

**58.** Suponha que a série de potências $\sum c_k(x-x_0)^k$ tenha um raio de convergência finito $R_1$ e que a série de potências $\sum d_k(x-x_0)^k$ tenha um raio de convergência finito $R_2$. O que podemos dizer sobre o raio de convergência de $\sum(c_k+d_k)(x-x_0)^k$? Explique seu raciocínio. [*Sugestão*: O caso $R_1 = R_2$ requer atenção especial.]

**59.** Mostre que se $p$ for um inteiro positivo, então a série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pk)!}{(k!)^p} x^k$$

tem um raio de convergência igual a $1/p^p$.

**60.** Mostre que se $p$ e $q$ forem inteiros positivos, então a série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+p)!}{k!(k+q)!} x^k$$

tem um raio de convergência igual a $+\infty$.

**61.** Mostre que a representação em série de potências da função de Bessel $J_1(x)$ converge em todo $x$ [Fórmula (5)].

**62.** Aproxime os valores das funções de Bessel $J_0(x)$ e $J_1(x)$ em $x = 1$, cada um com quatro casas decimais de precisão.

C **63.** Se a constante $p$ na série $p$ geral for substituída por uma variável $x$ com $x > 1$, então a função resultante é chamada de ***função zeta de Riemann*** e é denotada por

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$$

(a) Seja $s_n$ a enésima soma parcial da série de $\zeta(3{,}7)$. Determine $n$ tal que $s_n$ aproxime $\zeta(3{,}7)$ até duas casas decimais de precisão e calcule $s_n$ usando esse valor de $n$. [*Sugestão*: Use a desigualdade à direita no Exercício 36($b$) da Seção 9.4 com $f(x) = 1/x^{3,7}$.]
(b) Determine se o seu CAS sabe calcular a função zeta de Riemann diretamente. Se souber, compare o valor produzido pelo CAS com o valor de $s_n$ obtido na parte (a).

**64.** Prove: Se $\lim_{k\to+\infty}|c_k|^{1/k} = L$ e $L \neq 0$, então $1/L$ é o raio de convergência da série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

**65.** Prove: Se a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ tiver raio de convergência $R$, então a série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}$ tem raio de convergência $\sqrt{R}$.

**66.** Prove: Se o intervalo de convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ for $(x_0-R, x_0+R]$, então a série converge condicionalmente em $x_0+R$.

**67.** **Texto** A função seno pode ser definida geometricamente a partir do círculo unitário ou analiticamente a partir de sua série de Maclaurin. Discuta as vantagens de cada representação quanto ao fornecimento de informações sobre a função seno.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.8

**1.** $\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ **2.** $\dfrac{1}{2}$ **3.** $(-\infty, +\infty)$ **4.** (a) 1 (b) converge (c) diverge (d) $[3, 5)$

# 9.9 CONVERGÊNCIA DE SÉRIES DE TAYLOR

*Nesta seção, investigaremos quando uma série de Taylor de uma função converge àquela função em algum intervalo e consideraremos como as séries de Taylor podem ser usadas para aproximar os valores de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.*

### O PROBLEMA DA CONVERGÊNCIA DE SÉRIES DE TAYLOR

Lembre-se de que o enésimo polinômio de Taylor de uma função $f$ em torno de $x = x_0$ tem a propriedade de que seu valor e os de suas $n$ primeiras derivadas coincidem com aquelas de $f$

em $x_0$. Quando $n$ cresce, cada vez mais derivadas vão coincidindo, portanto é razoável esperar que, com valores de $x$ próximos de $x_0$, os valores dos polinômios de Taylor devam convergir para o valor de $f(x)$; isto é,

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{1}$$

Contudo, o enésimo polinômio de Taylor de $f$ é a enésima soma parcial da série de Taylor de $f$, de modo que (1) é equivalente a afirmar que a série de Taylor de $f$ converge no ponto $x$, e que a soma é $f(x)$. Assim, somos levados a considerar o problema seguinte.

É importante entender que o Problema 9.9.1 se refere a mais do que simplesmente a convergência da série de Taylor de $f$ ; o problema é saber se a série converge à própria função $f$. Na verdade, é possível que a série de Taylor de uma função $f$ convirja a valores diferentes de $f(x)$ com certos valores de $x$ (ver Exercício 14).

**9.9.1 PROBLEMA** Dada uma função $f$ que tem derivadas de todas as ordens em $x = x_0$, determine se há um intervalo aberto contendo $x_0$ tal que $f(x)$ seja a soma de sua série de Taylor em torno de $x = x_0$ em cada ponto do intervalo; isto é,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{2}$$

com quaisquer valores de $x$ do intervalo.

Uma maneira de verificar que (1) vale é mostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right] = 0$$

Contudo, a diferença que aparece do lado esquerdo dessa equação é o enésimo resto da série de Taylor [Fórmula (12) da Seção 9.7]. Assim, temos o resultado seguinte.

**9.9.2 TEOREMA** *A igualdade*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

*é verdadeira em um ponto x se, e somente se,* $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

## ESTIMANDO O ENÉSIMO RESTO

É relativamente raro poder provar diretamente que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Geralmente, isso é provado indiretamente, obtendo cotas apropriadas de $|R_n(x)|$ e aplicando o Teorema do Confronto para Sequências. Uma dessas cotas superiores úteis é fornecida pelo Teorema da Estimativa do Resto (Teorema 9.7.4). Lembre-se de que esse teorema afirma que se $M$ for uma cota superior para $|f^{(n+1)}(x)|$ em um intervalo que contenha $x_0$, então

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \tag{3}$$

em cada $x$ desse intervalo.

O seguinte exemplo ilustra como é aplicado o Teorema da Estimativa do Resto.

**▶ Exemplo 1** Mostre que a série de Maclaurin de $\cos x$ converge para $\cos x$ em cada $x$, isto é

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

***Solução*** A partir do Teorema 9.9.2, devemos mostrar que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to +\infty$ em cada $x$. Para isso, seja $f(x) = \cos x$, de modo que, em cada $x$ temos

$$f^{(n+1)}(x) = \pm\cos x \quad \text{ou} \quad f^{(n+1)}(x) = \pm\operatorname{sen} x$$

Em todos os casos, temos $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$, logo podemos aplicar (3) com $M = 1$ e $x_0 = 0$ para concluir que

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{4}$$

O método usado no Exemplo 1 pode ser facilmente modificado para provar que as séries de Taylor de sen $x$ e cos $x$ em torno de qualquer ponto $x = x_0$ convergem para sen $x$ e cos $x$, respectivamente, em cada $x$ (Exercícios 21 e 22). Para referência, há uma lista de algumas das mais importantes séries de Maclaurin na Tabela 9.9.1, no final desta seção.

Contudo, segue da Fórmula (5) da Seção 9.2 com $n+1$ em lugar do $n$ e $|x|$ em lugar de $x$ que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \tag{5}$$

Usando esse resultado e o Teorema do Confronto para Sequências (Teorema 9.1.5), decorre de (4) que $|R_n(x)| \to 0$ quando $n \to +\infty$; e, portanto, que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to +\infty$ (Teorema 9.1.6). Como isso é verdadeiro em cada $x$, provamos que a série de Maclaurin de cos $x$ converge para cos $x$ em cada $x$. Isso está ilustrado na Figura 9.9.1, na qual podemos ver como as sucessivas somas parciais aproximam cada vez mais a curva da função cosseno. ◄

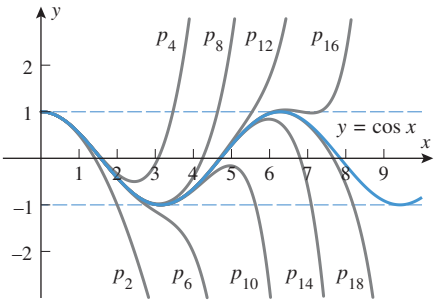



**Figura 9.9.1**

## APROXIMANDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Em geral, para aproximar o valor de uma função $f$ em um ponto $x$ usando uma série de Taylor, há duas questões básicas que devem ser respondidas:

- Em torno de qual ponto $x_0$ a série de Taylor deveria ser expandida?
- Quantos termos na série deveriam ser usados para alcançar a precisão desejada?

Em resposta à primeira questão, $x_0$ precisa ser um ponto em que a derivada de $f$ possa ser calculada facilmente, uma vez que esses valores são necessários para os coeficientes da série de Taylor. Além disso, se a função $f$ estiver sendo calculada no ponto $x$, então $x_0$ deve ser escolhido tão próximo quanto possível de $x$, uma vez que as séries de Taylor tendem a convergir mais rapidamente próximas de $x_0$. Por exemplo, para aproximar sen $3°(= \pi/60$ radianos), seria razoável tomar $x_0 = 0$, pois $\pi/60$ está próximo de 0 e as derivadas de sen $x$ são fáceis de calcular em 0. Por outro lado, para aproximar sen $85°$ $(= 17\pi/36$ radianos), seria mais natural tomar $x_0 = \pi/2$, pois $17\pi/36$ está próximo de $\pi/2$ e as derivadas de sen $x$ são fáceis de calcular em $\pi/2$.

A resposta da segunda questão colocada acima, o número de termos necessários para obtenção de uma determinada precisão, deve ser determinada caso a caso. O próximo exemplo fornece dois métodos para fazer isso.

► **Exemplo 2** Use a série de Maclaurin de sen $x$ para aproximar sen $3°$ com precisão de cinco casas decimais.

***Solução*** Na série de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{6}$$

se supõe que o ângulo $x$ esteja em radianos (pois as fórmulas de diferenciação de funções trigonométricas são deduzidas com essa hipótese). Como $3^\circ = \pi/60$ radianos, segue de (6) que

$$\operatorname{sen} 3^\circ = \operatorname{sen} \frac{\pi}{60} = \left(\frac{\pi}{60}\right) - \frac{(\pi/60)^3}{3!} + \frac{(\pi/60)^5}{5!} - \frac{(\pi/60)^7}{7!} + \cdots \tag{7}$$

Precisamos determinar quantos termos são necessários na série para obter uma precisão de cinco casas decimais. Vamos considerar duas abordagens possíveis, uma usando o Teorema da Estimativa do Resto (Teorema 9.7.4) e outra usando o fato de que (7) satisfaz as hipóteses do Teste da Série Alternada (Teorema 9.6.1).

**Método 1** (*Teorema da Estimativa do Resto*)

Já que queremos obter cinco casas decimais de precisão, nosso objetivo é escolher $n$ de tal modo que o valor absoluto do enésimo resto em $x = \pi/60$ não exceda $0{,}000005 = 5 \times 10^{-6}$, isto é,

$$\left|R_n\left(\frac{\pi}{60}\right)\right| \leq 0{,}000005 \tag{8}$$

Porém, se fizermos $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $f^{(n+1)}(x)$ é $\pm \operatorname{sen} x$ ou $\pm \cos x$ e, em ambos os casos, $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ em cada $x$. Assim, tem-se a partir do Teorema da Estimativa do Resto com $M = 1$, $x_0 = 0$ e $x = \pi/60$ que

$$\left|R_n\left(\frac{\pi}{60}\right)\right| \leq \frac{(\pi/60)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Assim, (8) estará satisfeita se escolhermos $n$ de tal modo que

$$\frac{(\pi/60)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 0{,}000005$$

Com a ajuda de uma calculadora, podemos verificar que o menor valor de $n$ que satisfaz esse critério é $n = 3$. Assim, para obter a precisão de cinco casas decimais precisamos apenas dos termos até a terceira potência em (7). Obtemos, então,

$$\operatorname{sen} 3^\circ \approx \left(\frac{\pi}{60}\right) - \frac{(\pi/60)^3}{3!} \approx 0{,}05234 \tag{9}$$

(verifique). Para comparar, uma calculadora dá $\operatorname{sen} 3^\circ \approx 0{,}05233595624$, que coincide com (9) quando arredondado até a quinta casa decimal.

**Método 2** (*O Teste da Série Alternada*)

Deixamos a cargo do leitor conferir que (7) satisfaz as hipóteses do teste da série alternada (Teorema 9.6.1).

Seja $s_n$ a soma dos termos em (7) até inclusive a enésima potência de $\pi/60$. Como os expoentes na série são inteiros ímpares, o inteiro $n$ deve ser ímpar, e o expoente do primeiro termo *não* incluído na soma $s_n$ deve ser $n + 2$. Assim, tem-se a partir da parte ($b$) do Teorema 9.6.2 que

$$|\operatorname{sen} 3^\circ - s_n| < \frac{(\pi/60)^{n+2}}{(n+2)!}$$

Isso significa que, para cinco casas decimais de precisão, devemos olhar para o primeiro inteiro ímpar positivo tal que

$$\frac{(\pi/60)^{n+2}}{(n+2)!} \leq 0{,}000005$$

Com a ajuda de uma calculadora, podemos verificar que o menor valor de $n$ que satisfaz esse critério é $n = 3$. Isso coincide com o resultado obtido acima usando o Teorema da Estimativa do Resto e, portanto, leva à aproximação (9) como antes. ◀

## ERRO DE TRUNCAMENTO E DE ARREDONDAMENTO

Há dois tipos de erros que ocorrem quando computamos com séries. O primeiro, chamado de ***erro de truncamento***, é o erro que resulta quando uma série é aproximada por uma soma parcial; e o segundo, chamado de ***erro de arredondamento***, é o erro que surge em aproximações na computação numérica. Por exemplo, na nossa dedução de (9), tomamos $n = 3$ para manter o erro de truncamento abaixo de 0,000005. Contudo, para calcular a soma parcial tivemos de aproximar $\pi$, desse modo introduzindo um erro de arredondamento. Se não tivéssemos tido cuidado na escolha da aproximação, o erro de arredondamento poderia facilmente ter degradado o resultado final.

Os métodos para estimar e controlar o erro de arredondamento são estudados em um ramo da Matemática chamado de ***Análise Numérica***. Entretanto, como um método empírico, para atingir a enésima casa decimal de precisão no resultado final, todo cálculo intermediário deve ter precisão de, no mínimo, $n + 1$ casas decimais. Assim, em (9) são necessárias no mínimo seis casas decimais de precisão em $\pi$ para alcançar a precisão de cinco casas decimais no resultado numérico final. Como uma questão prática, um bom procedimento operacional é realizar todos os cálculos intermediários com o número máximo de dígitos que sua calculadora conseguir e depois arredondar no final.

## APROXIMANDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS

**▶ Exemplo 3** Mostre que a série de Maclaurin de $e^x$ converge para $e^x$ em cada $x$, isto é, que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

***Solução*** Seja $f(x) = e^x$, logo

$$f^{(n+1)}(x) = e^x$$

Queremos mostrar que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to +\infty$ em cada $x$ no intervalo $-\infty < x < +\infty$. Entretanto, será útil aqui considerar os casos em que $x \leq 0$ e $x > 0$ separadamente. Se $x \leq 0$, então tomaremos o intervalo no Teorema de Estimativa do Resto (Teorema 9.7.4) como sendo $[x, 0]$ e, se $x > 0$, então tomaremos como sendo $[0, x]$. Como $f^{(n+1)}(x) = e^x$ é uma função crescente, tem-se que se $c$ estiver no intervalo $[x, 0]$, então

$$|f^{(n+1)}(c)| \leq |f^{(n+1)}(0)| = e^0 = 1$$

e se $c$ estiver no intervalo $[0, x]$, então

$$|f^{(n+1)}(c)| \leq |f^{(n+1)}(x)| = e^x$$

Assim, podemos aplicar o Teorema 9.7.4, com $M = 1$ no caso em que $x \leq 0$ e com $M = e^x$ no caso em que $x > 0$. Disso resulta

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{se } x \leq 0$$

$$0 \leq |R_n(x)| \leq e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{se } x > 0$$

Assim, em ambos os casos segue de (5) e do Teorema do Confronto para Sequências que $|R_n(x)| \to 0$ quando $n \to +\infty$, o que, por sua vez, implica que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Como isso é verdadeiro em cada $x$, provamos que a série de Maclaurin de $e^x$ converge para $e^x$ em cada $x$. ◀

Como a série de Maclaurin de $e^x$ converge para $e^x$ em cada $x$, podemos usar somas parciais da série de Maclaurin para aproximar potências de $e$ com precisão arbitrária. Lembre-se de que, no Exemplo 7 da Seção 9.7, conseguimos utilizar o Teorema da Estimativa do Resto para determinar que o valor do nono polinômio de Maclaurin de $e^x$ em $x = 1$ dá uma aproximação de $e$ com precisão de cinco casas decimais:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} \approx 2{,}71828$$

## APROXIMANDO LOGARITMOS

A série de Maclaurin

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1) \tag{10}$$

é o ponto inicial para a aproximação do logaritmo natural. Infelizmente, a utilidade dessa série é limitada por sua convergência lenta e pela restrição $-1 < x \leq 1$. No entanto, se substituirmos $x$ por $-x$ nesta série, obtemos

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \qquad (-1 \leq x < 1) \tag{11}$$

e subtraindo (11) de (10), obtemos

$$\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right) \qquad (-1 < x < 1) \tag{12}$$

A série (12), obtida primeiramente por James Gregory em 1668, pode ser usada para calcular o logaritmo natural de qualquer número positivo $y$ tomando

$$y = \frac{1 + x}{1 - x}$$

ou, de modo equivalente,

$$x = \frac{y - 1}{y + 1} \tag{13}$$

e notando que $-1 < x < 1$. Por exemplo, para computar $\ln 2$, tomamos $y = 2$ em (13), do que resulta $x = \frac{1}{3}$. Substituir esse valor em (12) dá

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} + \cdots\right] \tag{14}$$

No Exercício 19, pediremos que o leitor mostre que uma precisão de cinco casas decimais pode ser obtida usando a soma parcial com termos até a décima terceira potência de $\frac{1}{3}$. Assim, com precisão de cinco casas decimais

$$\ln 2 \approx 2\left[\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{13}}{13}\right] \approx 0{,}69315$$

(verifique). Como comparação, uma calculadora dá $\ln 2 \approx 0{,}69314718056$, que coincide com a aproximação acima quando arredondado para 5 casas decimais.

## APROXIMANDO $\pi$

Na próxima seção, mostraremos que

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{15}$$

Tomando $x = 1$, obtemos

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg } 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

No Exemplo 2 da Seção 9.6, afirmamos sem provar que

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Este resultado pode ser obtido tomando $x = 1$ em (10), mas, como já indicamos no texto, essa série converge lentamente demais para ter algum valor prático.

**James Gregory (1638-1675)** Matemático e astrônomo escocês. Gregory, filho de um pastor, foi famoso em sua época como o inventor do telescópio de reflexão, denominado gregoriano em sua homenagem. Embora ele não seja, em geral, considerado um grande matemático, muitos dos seus trabalhos foram estudados por Leibniz e Newton e, sem dúvida alguma, influenciaram algumas de suas descobertas. Há um manuscrito descoberto postumamente que mostra que Gregory antecipou a série de Taylor bem antes de Taylor.

*[Imagem: http://en.wikipedia.org/wiki/File:James_Gregory.jpeg]*

ou

$$\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right]$$

Essa série famosa, obtida por Leibniz em 1674, converge tão lentamente que não possui qualquer valor computacional. Um procedimento mais prático para aproximar $\pi$ usa a identidade

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\frac{1}{3} \tag{16}$$

que foi deduzida no Exercício 60 da Seção 0.4, no Volume 1. Usando essa identidade e a série (15) para aproximar arc tg $\frac{1}{2}$ e arc tg $\frac{1}{3}$, o valor de $\pi$ pode ser aproximado eficientemente com qualquer grau de precisão.

## SÉRIE BINOMIAL

Se $m$ for um número real, então a série de Maclaurin de $(1 + x)^m$ é denominada ***série binomial***; é dada por

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + \cdots$$

No caso em que $m$ for um inteiro não negativo, a função $f(x) = (1 + x)^m$ é um polinômio de grau $m$, portanto

$$f^{(m+1)}(0) = f^{(m+2)}(0) = f^{(m+3)}(0) = \cdots = 0$$

e a série binomial reduz-se à conhecida expansão binomial

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^m$$

que é válida com $-\infty < x < +\infty$.

Seja $f(x) = (1 + x)^m$. Verifique que

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = m$$
$$f''(0) = m(m-1)$$
$$f'''(0) = m(m-1)(m-2)$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-k+1)$$

Pode-se provar que, se $m$ não for um número inteiro não negativo, então a série binomial converge para $(1 + x)^m$ se $|x| < 1$. Assim, com tais valores de $x$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + \cdots \tag{17}$$

ou, em notação sigma,

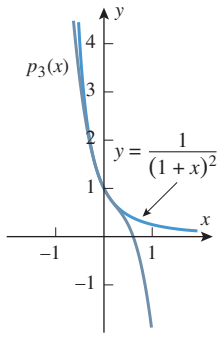
$$(1 + x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k \quad \text{se } |x| < 1 \tag{18}$$

**▶ Exemplo 4** Determine a série binomial de

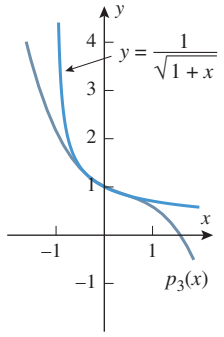
$$\text{(a)}\ \frac{1}{(1+x)^2} \qquad \text{(b)}\ \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

***Solução (a)*** Uma vez que o termo geral da série binomial é complicado, o leitor pode considerar útil escrever alguns dos primeiros termos da série, como na Fórmula (17), para ver o padrão do desenvolvimento. Substituindo $m = -2$ nessa fórmula, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} &= 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-3)}{2!}x^2 \\ &\quad + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3 + \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{4!}x^4 + \cdots \\ &= 1 - 2x + \frac{3!}{2!}x^2 - \frac{4!}{3!}x^3 + \frac{5!}{4!}x^4 - \cdots \\ &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k\end{aligned}$$




$p_3(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$




$p_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$

**Figura 9.9.2**

***Solução (b)*** Substituindo $m = -\frac{1}{2}$ em (17), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k k!}x^k \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

A Figura 9.9.2 mostra os gráficos das funções do Exemplo 4 comparadas com seu polinômio de Maclaurin de terceira ordem.

## ALGUMAS SÉRIES DE MACLAURIN IMPORTANTES

Para referência, a Tabela 9.9.1 lista a série de Maclaurin de algumas funções importantes, junto a uma especificação do intervalo no qual a série de Maclaurin converge para essas funções. Alguns desses resultados são deduzidos nos exercícios e outros na próxima seção, usando algumas técnicas especiais que desenvolveremos.

**Tabela 9.9.1**

ALGUMAS SÉRIES DE MACLAURIN IMPORTANTES

| SÉRIE DE MACLAURIN | INTERVALO DE CONVERGÊNCIA |
|---|---|
| $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ | $-1 < x < 1$ |
| $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ | $-1 < x < 1$ |
| $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ | $-1 < x \leq 1$ |
| $\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ | $-1 \leq x \leq 1$ |
| $\operatorname{senh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k$ | $-1 < x < 1^*$ $(m \neq 0, 1, 2, \ldots)$ |

*O comportamento nas extremidades depende de $m$: se $m > 0$, a série converge absolutamente nas extremidades; se $m \leq -1$, a série diverge nas extremidades; e se $-1 < m < 0$, a série converge condicionalmente em $x = 1$ e diverge em $x = -1$.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.9 (*Ver página 677 para respostas.*)

1. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}$ _____
2. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}$ _____
3. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}$ _____ com $x$ no intervalo _____.
4. Se $m$ for um número real que não é um número inteiro não negativo, então a *série binomial*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \text{_____}$$

converge para $(1+x)^m$ se $|x| <$ _____.

## EXERCÍCIOS 9.9 Recurso Gráfico C CAS

1. Use o Teorema da Estimativa do Resto e o método do Exemplo 1 para provar que a série de Taylor de sen $x$ em torno de $x = \pi/4$ converge para sen $x$ em qualquer $x$.
2. Use o Teorema da Estimativa do Resto e o método do Exemplo 3 para provar que a série de Taylor de $e^x$ em torno de $x = 1$ converge para $e^x$ em qualquer $x$.

**3-10** Aproxime o valor funcional dado conforme indicado e verifique seu trabalho comparando sua resposta com o valor funcional produzido diretamente por um recurso computacional. ■

3. Aproxime sen 4° com precisão de cinco casas decimais usando ambos os métodos dados no Exemplo 2.
4. Aproxime cos 3° com precisão de três casas decimais usando ambos os métodos dados no Exemplo 2.
5. Aproxime cos 0,1 com precisão de cinco casas decimais usando a série de Maclaurin de cos $x$.
6. Aproxime arc tg 0,1 com precisão de três casas decimais usando a série de Maclaurin de arc tg $x$.
7. Aproxime sen 85° com precisão de quatro casas decimais usando uma série de Taylor apropriada.
8. Aproxime cos $(-175°)$ com precisão de quatro casas decimais usando uma série de Taylor.
9. Aproxime senh 0,5 com precisão de três casas decimais usando a série de Maclaurin de senh $x$.
10. Aproxime cosh 0,1 com precisão de três casas decimais usando a série de Maclaurin de cosh $x$.
11. (a) Use a Fórmula (12) do texto para determinar uma série que convirja para ln 1,25.
    (b) Aproxime ln 1,25 usando os dois primeiros termos da série. Arredonde sua resposta até três casas decimais e compare o resultado com aquele produzido diretamente por uma calculadora.
12. (a) Use a Fórmula (12) para determinar uma série que convirja para ln 3.
    (b) Aproxime ln 3 usando os dois primeiros termos da série. Arredonde sua resposta até três casas decimais e compare o resultado com aquele produzido diretamente por uma calculadora.

### ENFOCANDO CONCEITOS

13. (a) Use a série de Maclaurin de arc tg $x$ para aproximar, com três casas decimais de precisão, arc tg $\frac{1}{2}$ e arc tg $\frac{1}{3}$.
    (b) Use os resultados da parte (a) e a Fórmula (16) para aproximar $\pi$.
    (c) Como garantir que o resultado em (b) seja preciso até a terceira casa decimal? Explique seu raciocínio
    (d) Compare sua resposta da parte (b) com aquela produzida por uma calculadora.
14. A proposta deste exercício é mostrar que a série de Taylor de uma função $f$ pode convergir para um valor diferente de $f(x)$ com certos valores de $x$. Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

    (a) Use a definição de derivada para mostrar que $f'(0) = 0$.
    (b) Com alguma dificuldade, pode-se mostrar que $f^{(n)}(0) = 0$ com $n \geq 2$. Admitindo esse fato, mostre que a série de Maclaurin de $f$ converge em cada $x$, mas converge para $f(x)$ somente no ponto $x = 0$.

15. (a) Determine uma cota superior para o erro que pode resultar se cos $x$ for aproximado por $1 - (x^2/2!) + (x^4/4!)$ no intervalo $[-0{,}2;\ 0{,}2]$.
    (b) Verifique sua resposta na parte (a) fazendo o gráfico de

$$\left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\right|$$

    sobre o intervalo.

16. (a) Determine uma cota superior para o erro que pode resultar se $\ln(1+x)$ for aproximado por $x$ no intervalo $[-0{,}01;\ 0{,}01]$.
    (b) Verifique sua resposta na parte (a) fazendo o gráfico de

$$|\ln(1+x) - x|$$

    sobre o intervalo.

**17.** Use a Fórmula (17) da série binomial para obter a série de Maclaurin de

(a) $\dfrac{1}{1+x}$ (b) $\sqrt[3]{1+x}$ (c) $\dfrac{1}{(1+x)^3}$

**18.** Se $m$ for qualquer número real e $k$ for um inteiro não negativo, então definimos o ***coeficiente binomial***

$$\binom{m}{k} \text{ pelas fórmulas } \binom{m}{0} = 1 \text{ e}$$
$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

se $k \geq 1$. Expresse a Fórmula (17) do texto em termos de coeficientes binomiais.

**19.** Neste exercício, usaremos o Teorema da Estimativa do Resto para determinar o número de termos que são necessários na Fórmula (14) para aproximar ln 2 com cinco casas decimais de precisão. Para esse propósito, seja

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) \quad (-1 < x < 1)$$

(a) Mostre que

$$f^{(n+1)}(x) = n!\left[\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$$

(b) Use a desigualdade triangular [Teorema 0.1.4($d$), do Volume 1] para mostrar que

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq n!\left[\frac{1}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$$

(c) Uma vez que queremos obter até cinco casas decimais de precisão, nosso objetivo é escolher $n$ de tal forma que o valor absoluto do enésimo resto em $x = \frac{1}{3}$ não exceda o valor $0{,}000005 = 0{,}5 \times 10^{-5}$; isto é, $\left|R_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| \leq 0{,}000005$. Use o Teorema da Estimativa do Resto para mostrar que essa condição é satisfeita se $n$ for escolhido tal que

$$\frac{M}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 0{,}000005$$

onde $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ sobre o intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

(d) Use o resultado da parte (b) para mostrar que $M$ pode ser tomado como

$$M = n!\left[1 + \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}\right]$$

(e) Use o resultado das partes (c) e (d) para mostrar que até cinco casas decimais de precisão serão obtidas se $n$ satisfizer

$$\frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \leq 0{,}000005$$

e, então, mostrar que o menor valor de $n$ que satisfaz essa condição é $n = 13$.

**20.** Use a Fórmula (12) e o método do Exercício 19 para aproximar $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ com cinco casas decimais de precisão. Então, verifique seu trabalho comparando a sua resposta com aquela produzida diretamente de uma calculadora.

**21.** Prove: A série de Taylor de cos $x$ em torno de qualquer ponto $x = x_0$ converge para cos $x$ em cada $x$.

**22.** Prove: A série de Taylor de sen $x$ em torno de qualquer ponto $x = x_0$ converge para sen $x$ em cada $x$.

**23.** Pesquisas têm mostrado que a proporção $p$ da população com QI (Quociente de Inteligência) entre $\alpha$ e $\beta$ é aproximadamente

$$p = \frac{1}{16\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{16}\right)^2} dx$$

Use os três primeiros termos diferentes de zero de uma série de Maclaurin apropriada para estimar a proporção da população que tem QI entre 100 e 110.

**C 24.** (a) Em 1706, o astrônomo e matemático britânico John Machin descobriu a seguinte fórmula para $\pi/4$, chamada de ***fórmula de Machin***:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

Use um CAS para aproximar $\pi/4$ usando a fórmula de Machin com até 25 casas decimais.

(b) Em 1914, o brilhante matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920) mostrou que

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1.103 + 26.390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

Use um CAS para calcular as primeiras quatro somas parciais nessa ***fórmula de Ramanujan***.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.9

**1.** $(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$ **2.** $\dfrac{x^k}{k!}$ **3.** $(-1)^{k+1}\dfrac{x^k}{k}$; $(-1, 1]$ **4.** $\dfrac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k$; 1

# 9.10 DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS; MODELANDO COM SÉRIES DE TAYLOR

*Nesta seção, discutiremos métodos para encontrar séries de potências de derivadas e integrais de funções; abordaremos também alguns métodos práticos para encontrar séries de Taylor que podem ser usados em situações nas quais é difícil ou impossível encontrar a série diretamente.*

## DERIVANDO SÉRIES DE POTÊNCIAS

Iniciaremos considerando o problema seguinte.

**9.10.1 PROBLEMA** Suponha que uma função $f$ seja representada por uma série de potências em um intervalo aberto. Como poderíamos usar a série de potências para encontrar a derivada de $f$ nesse intervalo?

A solução para esse problema pode ser motivada considerando a série de Maclaurin de sen $x$:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

Naturalmente, já sabemos que a derivada de sen $x$ é cos $x$; entretanto, estamos interessados aqui em usar a série de Maclaurin para concluir isso. A solução é simples – tudo o que precisamos fazer é derivar, termo a termo, a série de Maclaurin e observar que a série resultante é a série de Maclaurin de cos $x$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right] &= 1 - 3\frac{x^2}{3!} + 5\frac{x^4}{5!} - 7\frac{x^6}{7!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x\end{aligned}$$

Aqui está outro exemplo.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[e^x] &= \frac{d}{dx}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right] \\ &= 1 + 2\frac{x}{2!} + 3\frac{x^2}{3!} + 4\frac{x^3}{4!} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x\end{aligned}$$

A computação precedente sugere que, se uma função $f$ estiver representada por uma série de potências em um intervalo aberto, então a representação de $f'$ por uma série de potências naquele intervalo aberto pode ser obtida derivando termo a termo a série de potências de $f$. Isso está enunciado mais precisamente no seguinte teorema, o qual daremos sem prova.

**9.10.2 TEOREMA** **(*Diferenciação de Séries de Potências*)** *Suponha que uma função $f$ esteja representada por uma série de potências em $x - x_0$ que tenha um raio de convergência $R$ não nulo; isto é,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \qquad (x_0 - R < x < x_0 + R)$$

*Então:*

(*a*) *A função $f$ é diferenciável no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$.*

(b) *Se a representação de f por uma série de potências for derivada termo a termo, então a série resultante terá raio de convergência R e convergirá para f′ no intervalo* $(x_0 - R, x_0 + R)$; *isto é*,

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_k(x - x_0)^k] \qquad (x_0 - R < x < x_0 + R)$$

Esse teorema tem uma importante implicação sobre a diferenciabilidade de funções que estão representadas por séries de potências. De acordo com o teorema, a série de potências de $f'$ tem o mesmo raio de convergência que a série de potências de $f$, e isso significa que o teorema pode voltar a ser aplicado para $f'$ no lugar de $f$. Contudo, se fizermos isso, concluímos que $f'$ é diferenciável no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$, e a série de potências de $f''$ tem o mesmo raio de convergência que a série de potências de $f$ e $f'$. Podemos agora repetir esse processo indefinidamente, aplicando o teorema sucessivamente para $f'', f''', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ para concluir que $f$ tem derivadas de todas as ordens no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$. Assim, estabelecemos o seguinte resultado.

**9.10.3 TEOREMA** *Se uma função f puder ser representada por uma série de potências em* $x - x_0$ *com um raio de convergência R diferente de zero, então f terá derivadas de todas as ordens no intervalo* $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Resumindo, apenas uma função "bem comportada" pode ser representada por uma série de potências; isto é, se uma função $f$ não possuir derivadas de todas as ordens em um intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$, então a função não pode ser representada por uma série de potências em $x - x_0$ naquele intervalo.

**► Exemplo 1** Na Seção 9.8, mostramos que a função de Bessel $J_0(x)$ é representada pela série de potências

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \tag{1}$$

com raio de convergência $+\infty$ [ver Fórmula (4) daquela seção e a discussão relacionada]. Desse modo, $J_0(x)$ tem derivadas de todas as ordens no intervalo $(-\infty, +\infty)$, e estas podem ser obtidas derivando a série termo a termo. Por exemplo, se escrevermos (1) como

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$$

Veja o Exercício 45 para uma relação entre $J_0'(x)$ e $J_1(x)$.

e derivarmos termo a termo, obteremos

$$J_0'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k) x^{2k-1}}{2^{2k}(k!)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{2^{2k-1} k!(k-1)!} \quad ◄$$

**OBSERVAÇÃO** Nos cálculos desse exemplo, usamos algumas técnicas que devem ser ressaltadas. Primeiramente, quando uma série de potências é expressa em notação sigma, a fórmula para o termo geral da série muitas vezes não está em uma forma que possa ser usada para derivar o termo constante. Assim, se a série tem termo constante diferente de zero, como aqui, é geralmente uma boa ideia separá-lo da soma antes de derivar. Em segundo lugar, observe como simplificamos a fórmula final cancelando o fator $k$ de um dos fatoriais no denominador. Isso é uma técnica de simplificação padrão.

## INTEGRANDO SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma vez que a derivada de uma função que está representada por uma série de potências pode ser obtida derivando a série termo a termo, não deveria ser surpreendente que uma antiderivada da função representada por uma série de potências possa ser obtida integrando a série termo a termo. Por exemplo, sabemos que sen $x$ é uma antiderivada de cos $x$. Aqui está o resultado obtido pela integração termo a termo da série de Maclaurin de cos $x$:

$$\begin{aligned}\int \cos x\,dx &= \int \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right] dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3(2!)} + \frac{x^5}{5(4!)} - \frac{x^7}{7(6!)} + \cdots\right] + C \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right] + C = \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

A mesma ideia aplica-se a integrais definidas. Por exemplo, integrando diretamente temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x\Big]_0^1 = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

e mostraremos mais adiante nesta seção que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{2}$$

Assim,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Aqui está como esse resultado pode ser obtido integrando termo a termo a série de Maclaurin de $1/(1+x^2)$ (ver Tabela 9.9.1):

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^1 [1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots]\,dx \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\end{aligned}$$

A computação precedente é justificada pelo teorema seguinte, o qual daremos sem prova.

Os Teoremas 9.10.2 e 9.10.4 nos dizem como usar uma representação em série de potências de uma função $f$ para obter representações em séries de potências de $f'(x)$ e de $\int f(x)dx$ que tenham o mesmo raio de convergência de $f$. Contudo, os intervalos de convergência dessas séries podem não ser os mesmos porque seu comportamento de convergência pode ser diferente nas extremidades do intervalo. (Ver Exercício 25 e 26.)

**9.10.4 TEOREMA** (***Integração de Séries de Potências***) *Suponha que uma função $f$ esteja representada por uma série de potências em $x - x_0$ que tenha um raio de convergência $R$ não nulo; isto é,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \qquad (x_0 - R < x < x_0 + R)$$

(*a*) *Se a série de potências que representa $f$ for integrada termo a termo, então a série resultante terá um raio de convergência $R$ e convergirá para uma antiderivada de $f(x)$ no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$; isto é,*

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{c_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}\right] + C \qquad (x_0 - R < x < x_0 + R)$$

(b) *Se $\alpha$ e $\beta$ forem pontos do intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ e se a representação de $f$ em série de potências for integrada termo a termo de $\alpha$ até $\beta$, então a série numérica resultante convergirá absolutamente no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ e*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_\alpha^\beta c_k(x - x_0)^k\,dx\right]$$

## REPRESENTAÇÕES POR SÉRIES DE POTÊNCIAS DEVEM SER SÉRIES DE TAYLOR

Com muitas funções, é difícil ou impossível encontrar as derivadas que são exigidas para obter uma série de Taylor. Por exemplo, para encontrar a série de Maclaurin de $1/(1 + x^2)$ diretamente, seriam necessárias algumas computações entediantes de derivada (tente fazer isso). Um método mais prático é substituir $-x^2$ em $x$ na série geométrica

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

para obter

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Entretanto, há duas questões que exigem cuidado com esse procedimento:

- Onde é que a série de potências que obtivermos para $1/(1 + x^2)$ realmente converge para $1/(1 + x^2)$?
- Como saber que a série de potências obtida é, realmente, a série de Maclaurin de $1/(1 + x^2)$?

A primeira questão é fácil de resolver. Uma vez que a série geométrica converge para $1/(1 - x)$ se $|x| < 1$, a segunda série convergirá para $1/(1 + x^2)$ se $|-x^2| < 1$ ou $|x^2| < 1$. Contudo, isso é verdadeiro se, e somente se, $|x| < 1$, portanto a série de potências que obtivemos da função $1/(1 + x^2)$ converge para esta função se $-1 < x < 1$.

A segunda questão é mais difícil de responder e conduz-nos para o seguinte problema geral.

**9.10.5 PROBLEMA** Suponha que uma função $f$ esteja representada por uma série de potências em $x - x_0$ que tenha raio de convergência diferente de zero. Qual relação existe entre a dada série de potências e a série de Taylor de $f$ em torno de $x = x_0$?

A resposta é que elas são a mesma; e aqui está o teorema que prova isso.

O Teorema 9.10.6 nos diz que não importa como chegamos a uma representação de uma função $f$ em série de potências, quer seja por substituição, diferenciação, integração ou por alguma manipulação algébrica, aquela série será a série de Taylor de $f$ em torno de $x = x_0$, desde que convirja para $f$ em algum intervalo aberto contendo $x_0$.

**9.10.6 TEOREMA** *Se uma função $f$ estiver representada por uma série de potências em $x - x_0$ em algum intervalo aberto contendo $x_0$, então essa série de potências será a série de Taylor de $f$ em torno de $x = x_0$.*

**DEMONSTRAÇÃO** Suponha que

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_k(x - x_0)^k + \cdots$$

com qualquer $x$ em algum intervalo aberto contendo $x_0$. Para provar que isso é a série de Taylor de $f$ em torno de $x = x_0$, devemos mostrar que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{com} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Contudo, a hipótese de que a série converge para $f(x)$ em um intervalo aberto contendo $x_0$ garante que o raio de convergência $R$ é diferente de zero; consequentemente, podemos derivar termo a termo de acordo com o Teorema 9.10.2. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + c_4(x - x_0)^4 + \cdots \\ f'(x) &= c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + 4c_4(x - x_0)^3 + \cdots \\ f''(x) &= 2!c_2 + (3 \cdot 2)c_3(x - x_0) + (4 \cdot 3)c_4(x - x_0)^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 3!c_3 + (4 \cdot 3 \cdot 2)c_4(x - x_0) + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Substituindo $x = x_0$, todas as potências de $x - x_0$ desaparecem, deixando

$$f(x_0) = c_0, \quad f'(x_0) = c_1, \quad f''(x_0) = 2!c_2, \quad f'''(x_0) = 3!c_3, \ldots$$

das quais obtemos

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = f'(x_0), \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \ldots$$

mostrando que os coeficientes $c_0, c_1, c_2,...$ são precisamente os coeficientes da série de Taylor em torno de $x_0$ de $f(x)$. ■

## ■ ALGUMAS MANEIRAS PRÁTICAS PARA ENCONTRAR SÉRIES DE TAYLOR

**► Exemplo 2** Encontre a série de Taylor da função dada em torno do ponto $x_0$ dado.

$$\text{(a) } e^{-x^2}, \quad x_0 = 0 \qquad \text{(b) } \ln x, \quad x_0 = 1 \qquad \text{(c) } \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1$$

***Solução (a)*** A maneira mais simples de encontrar a série de Maclaurin de $e^{-x^2}$ é substituir $x$ por $-x^2$ na série da Maclaurin

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{3}$$

para obter

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

Como (3) converge em cada valor de $x$, o mesmo ocorre com a série de $e^{-x^2}$.

***Solução (b)*** Começamos com a série de Maclaurin de $\ln(1 + x)$, que pode ser encontrada na Tabela 9.9.1:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \le 1)$$

Substituindo $x$ por $x - 1$ nessa série, obtemos

$$\ln(1 + [x - 1]) = \ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \cdots \tag{4}$$

Como a série original converge com $-1 < x \le 1$, o intervalo de convergência de (4) será $-1 < x - 1 \le 1$ ou, equivalentemente, $0 < x \le 2$.

***Solução (c)*** Como $1/x$ é a derivada de $\ln x$, podemos derivar a série de $\ln x$ encontrada em (b) para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= 1 - \frac{2(x - 1)}{2} + \frac{3(x - 1)^2}{3} - \frac{4(x - 1)^3}{4} + \cdots \\ &= 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

Pelo Teorema 9.10.2, sabemos que o raio de convergência de (5) é igual ao de (4), que é $R = 1$. Assim, o intervalo de convergência de (5) deve ser, pelo menos, $0 < x < 2$. Como os comportamentos de (4) e (5) podem diferir nas extremidades $x = 0$ e $x = 2$, devemos conferir isso separadamente. Quando $x = 0$, (5) torna-se

$$1 - (-1) + (-1)^2 - (-1)^3 + \cdots = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

que diverge pelo teste da divergência. Analogamente, quando $x = 2$, (5) torna-se

$$1 - 1 + 1^2 - 1^3 + \cdots = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

que também diverge pelo teste da divergência. Assim, o intervalo de convergência de (5) é $0 < x < 2$. ■

**▶ Exemplo 3** Determine a série de Maclaurin de arc tg $x$.

***Solução*** Seria tedioso encontrar a série de Maclaurin diretamente. O melhor método é começar com a fórmula

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arc tg } x + C$$

e integrar a série de Maclaurin

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

termo a termo. Disso resulta

$$\text{arc tg } x + C = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int [1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots]\,dx$$

ou

$$\text{arc tg } x = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots\right] - C$$

A constante da integração pode ser calculada substituindo $x = 0$ e usando a condição arc tg $0 = 0$. Isso dá $C = 0$, e assim

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \qquad (-1 < x < 1) \tag{6}$$

◀

**OBSERVAÇÃO** Observe que nem o Teorema 9.10.2 nem o Teorema 9.10.3 voltam-se para o que acontece nas extremidades do intervalo de convergência. Entretanto, pode ser provado que se a série de Taylor de $f$ em torno de $x = x_0$ convergir para $f(x)$ em todo $x$ no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$, e se a série de Taylor convergir na extremidade direita $x_0 + R$, então o valor para o qual converge naquele ponto será o limite de $f(x)$ quando $x \to x_0 + R$ pelo lado esquerdo; e se a série de Taylor convergir na extremidade esquerda $x_0 - R$, então o valor para o qual converge naquele ponto será o limite de $f(x)$ quando $x \to x_0 - R$ pelo lado direito.

Por exemplo, a série de Maclaurin de arc tg $x$ dada em (6) converge em $x = -1$ e em $x = 1$, uma vez que as hipóteses do teste da série alternada (Teorema 9.6.1) estão satisfeitas naqueles pontos. Assim, a continuidade de arc tg $x$ sobre o intervalo $[-1, 1]$ implica que, em $x = 1$, a série de Maclaurin converge para

$$\lim_{x \to 1^-} \text{arc tg } x = \text{arc tg } 1 = \frac{\pi}{4}$$

e em $x = -1$ converge para

$$\lim_{x \to -1^+} \text{arc tg } x = \text{arc tg } (-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Isso mostra que a série de Maclaurin de arc tg $x$ converge, de fato, para arc tg $x$ no intervalo fechado $-1 \le x \le 1$. Além disso, a convergência em $x = 1$ fornece a Fórmula (2).

## APROXIMANDO INTEGRAIS DEFINIDAS USANDO SÉRIES DE TAYLOR

As séries de Taylor fornecem uma alternativa para a regra de Simpson e outros métodos numéricos para aproximar integrais definidas.

**▶ Exemplo 4** Aproxime a integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

com três casas decimais de precisão expandindo o integrando em uma série de Maclaurin e integrando termo a termo.

***Solução*** Vimos no Exemplo 2(a) que a série de Maclaurin de $e^{-x^2}$ é

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}\,dx &= \int_0^1 \left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots\right] dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5(2!)} - \frac{x^7}{7(3!)} + \frac{x^9}{9(4!)} - \cdots\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}\end{aligned}$$

Como essa série satisfaz evidentemente as hipóteses do teste da série alternada (Teorema 9.6.1), tem-se a partir do Teorema 9.6.2 que se aproximarmos a integral por $s_n$ (a enésima soma parcial da série), então

$$\left|\int_0^1 e^{-x^2}\,dx - s_n\right| < \frac{1}{[2(n+1)+1](n+1)!} = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$$

Assim, para três casas decimais de precisão, devemos escolher $n$ tal que

$$\frac{1}{(2n+3)(n+1)!} \le 0{,}0005 = 5 \times 10^{-4}$$

Com a ajuda de uma calculadora, podemos mostrar que o menor valor de $n$ que satisfaça essa condição é $n = 5$. Assim, o valor da integral com três casas decimais de precisão é

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0{,}747$$

Quais vantagens o método do Exemplo 4 tem sobre a regra de Simpson? Quais são as desvantagens?

Para comparar, uma calculadora com capacidade de integração numérica produziu a aproximação 0,746824, que coincide com nosso resultado quando arredondado até três casas decimais. ◀

## ENCONTRANDO SÉRIES DE MACLAURIN POR MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Os seguintes exemplos ilustram algumas técnicas algébricas que são úteis, às vezes, para encontrar séries de Taylor.

**▶ Exemplo 5** Encontre os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de função $f(x) = e^{-x^2}\,\text{arc tg}\,x$.

$$\begin{array}{l} 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} - \cdots \\ \times \quad x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots \\ \hline x - x^3 + \dfrac{x^5}{2} - \cdots \\ \quad - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{3} - \dfrac{x^7}{6} + \cdots \\ \qquad \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{5} + \cdots \\ \hline x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{31}{30}x^5 - \cdots \end{array}$$

***Solução*** Usando as séries de $e^{-x^2}$ e arc tg $x$ obtidas nos Exemplos 2 e 3, temos

$$e^{-x^2} \operatorname{arc\,tg} x = \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right)$$

Multiplicando, como mostrado na margem, obtemos

$$e^{-x^2} \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{31}{30}x^5 - \cdots$$

Podem ser obtidos mais termos na série incluindo mais termos nos fatores. Além disso, podemos provar que a série obtida por esse método converge em cada ponto na interseção dos intervalos de convergência dos fatores (e, possivelmente, em um intervalo maior). Assim, podemos ter certeza de que a série obtida converge em todo $x$ do intervalo $-1 \le x \le 1$ (por quê?). ◀

$$\begin{array}{l} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \cdots \;\Big|\; 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cdots \\ \hline x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24} - \cdots \qquad x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \cdots \\ \hline \quad \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} + \cdots \\ \quad \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{6} + \cdots \\ \hline \qquad \dfrac{2x^5}{15} + \cdots \end{array}$$

**Exemplo 6** Encontre os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de tg $x$.

***Solução*** Usando os três primeiros termos na série de Maclaurin de sen $x$ e cos $x$, podemos expressar tg $x$ como

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Dividindo, como mostrado na margem, obtemos

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \quad ◀$$

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Se o leitor dispuser de um CAS, use o recurso de multiplicar e dividir polinômios para efetuar as contas dos Exemplos 5 e 6.

## MODELANDO LEIS FÍSICAS COM SÉRIES DE TAYLOR

As séries de Taylor fornecem uma importante maneira de modelar leis físicas. Para ilustrar a ideia, consideremos o problema de modelar o período de um pêndulo simples (Figura 9.10.1). Conforme explicado no Exercício 5 da Seção Estabelecendo Conexões do Capítulo 7, no Volume 1, o período $T$ de um tal pêndulo é dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}\, d\phi \tag{7}$$

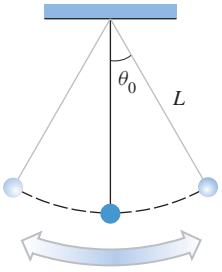



**Figura 9.10.1**

onde

$L$ = comprimento da haste

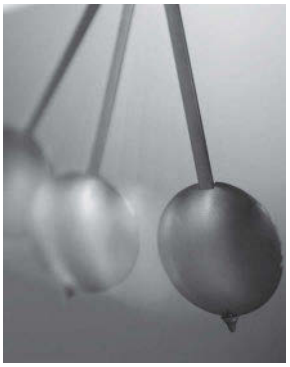
$g$ = aceleração da gravidade

$k = \operatorname{sen}(\theta_0/2)$, onde $\theta_0$ é o ângulo inicial do deslocamento em relação à vertical

A integral, que é chamada de ***integral elíptica completa de primeira espécie***, não pode ser expressa em termos de funções elementares e é frequentemente aproximada por método numéricos. Infelizmente, os valores numéricos são tão específicos que, muitas vezes, dão pouca luz sobre princípios físicos gerais. Entretanto, se expandirmos o integrando (4) em uma série de Maclaurin e integrarmos termo a termo, poderemos gerar uma série infinita que poderá ser usada para construir vários modelos matemáticos para o período $T$, que propiciam um maior entendimento do comportamento do pêndulo.

Para obter a série de Maclaurin do integrando, substituimos $x$ por $-k^2 \operatorname{sen}^2 \phi$ na série binomial de $1/\sqrt{1+x}$, que foi deduzida no Exemplo 4($b$) da Seção 9.9. Fazendo isso, podemos reescrever (7) como

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sen}^2 \phi + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!}k^4 \operatorname{sen}^4 \phi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 3!}k^6 \operatorname{sen}^6 \phi + \cdots\right] d\phi \tag{8}$$



© ACE STOCK LIMITED/Alamy
*O entendimento do movimento de um pêndulo desempenhou um papel crucial no avanço da medição precisa do tempo, com o desenvolvimento do relógio de pêndulo no século XVII.*

Se integrarmos termo a termo, então poderemos produzir uma série de Maclaurin que convirja para o período $T$. Entretanto, um dos casos mais importantes do movimento do pêndulo simples ocorre quando o deslocamento inicial é pequeno; nesse caso, todos os deslocamentos subsequentes são pequenos, e podemos supor que $k = \operatorname{sen}(\theta_0/2) \approx 0$. Nesse caso, esperamos que a convergência da série de Maclaurin para $T$ seja rápida, e podemos aproximar a soma da série cancelando todos menos o termo constante de (8). Isso resulta em

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{9}$$

que é chamado de ***modelo de primeira ordem*** de $T$ ou o modelo para ***pequenas vibrações***. Esse modelo pode ser aperfeiçoado usando mais termos da série. Por exemplo, se usarmos os dois primeiros termos da série de Maclaurin, obteremos o ***modelo de segunda ordem***

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right) \tag{10}$$

(verifique).

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.10 (*Ver página 689 para respostas.*)

**1.** A série de Maclaurin de $e^{-x^2}$ obtida com a substituição de $x$ por $-x^2$ na série

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

é $e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}$ _____.

**2.** $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right] =$ _____ + _____ $x$ + _____ $x^2$ + _____ $x^3 + \cdots$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}$ _____

**3.** $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k+1}\right)$

$= \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \cdots\right)$

$=$ _____ + _____ $x$ + _____ $x^2 + \cdots$

**4.** Suponha que f(1) = 4 e $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}(x-1)^k$

(a) $f''(1) =$ _____

(b) $f(x) =$ _____ + _____ $(x-1)$ + _____ $(x-1)^2$ + _____ $(x-1)^3 + \cdots$

$=$ _____ + $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}$ _____

## EXERCÍCIOS 9.10 C CAS

**1.** Em cada parte, obtenha a série de Maclaurin de função fazendo uma substituição apropriada na série de Maclaurin de $1/(1-x)$. Inclua o termo geral na sua resposta e dê o raio de convergência da série.

(a) $\dfrac{1}{1+x}$ (b) $\dfrac{1}{1-x^2}$ (c) $\dfrac{1}{1-2x}$ (d) $\dfrac{1}{2-x}$

**2.** Em cada parte, obtenha a série de Maclaurin da função fazendo uma substituição apropriada na série de Maclaurin de $\ln(1+x)$. Inclua o termo geral na sua resposta e dê o raio de convergência da série.

(a) $\ln(1-x)$ (b) $\ln(1+x^2)$
(c) $\ln(1+2x)$ (d) $\ln(2+x)$

**3.** Em cada parte, obtenha os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin da função, fazendo uma substituição apropriada em uma das séries binomiais obtidas no Exemplo 4 da Seção 9.9.

(a) $(2+x)^{-1/2}$ (b) $(1-x^2)^{-2}$

**4.** (a) Use a série de Maclaurin de $1/(1-x)$ para encontrar a série de Maclaurin de $1/(a-x)$, onde $a \neq 0$, e dê o raio de convergência da série.

(b) Use a série binomial de $1/(1+x)^2$ obtida no Exemplo 4 da Seção 9.9 para encontrar os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin de $1/(a+x)^2$, onde $a \neq 0$, e dê o raio de convergência da série.

**5-8** Obtenha os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin da função, fazendo uma substituição apropriada numa série de Maclaurin conhecida e efetuando qualquer operação algébrica que for necessária. Dê o raio de convergência da série. ■

**5.** (a) $\operatorname{sen} 2x$ (b) $e^{-2x}$ (c) $e^{x^2}$ (d) $x^2 \cos \pi x$

**6.** (a) $\cos 2x$ (b) $x^2 e^x$ (c) $xe^{-x}$ (d) $\operatorname{sen}(x^2)$

**7.** (a) $\dfrac{x^2}{1+3x}$ (b) $x \operatorname{senh} 2x$ (c) $x(1-x^2)^{3/2}$

**8.** (a) $\dfrac{x}{x-1}$ (b) $3 \cosh(x^2)$ (c) $\dfrac{x}{(1+2x)^3}$

**9-10** Determine os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin da função usando uma identidade trigonométrica apropriada ou uma propriedade dos logaritmos e, então, substitua em uma série de Maclaurin conhecida. ■

**9.** (a) $\operatorname{sen}^2 x$ (b) $\ln[(1+x^3)^{12}]$

**10.** (a) $\cos^2 x$ (b) $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

**11.** (a) Use uma série de Maclaurin conhecida para determinar a série de Taylor de $1/x$ em torno de $x = 1$, expressando essa função como

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)}$$

(b) Determine o intervalo de convergência da série de Taylor.

**12.** Use o método do Exercício 11 para determinar a série de Taylor de $1/x$ em torno de $x = x_0$ e dê o intervalo de convergência da série de Taylor.

**13-14** Determine os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin multiplicando as séries de Maclaurin dos fatores. ■

**13.** (a) $e^x \operatorname{sen} x$ (b) $\sqrt{1+x}\ln(1+x)$

**14.** (a) $e^{-x^2}\cos x$ (b) $(1+x^2)^{4/3}(1+x)^{1/3}$

**15-16** Determine os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin da função, dividindo séries de Maclaurin apropriadas. ■

**15.** (a) $\sec x \left(= \dfrac{1}{\cos x}\right)$ (b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}$

**16.** (a) $\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}$ (b) $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$

**17.** Use as séries de Maclaurin de $e^x$ e $e^{-x}$ para deduzir as séries de Maclaurin de senh $x$ e cosh $x$. Inclua na sua resposta o termo geral e estabeleça o raio de convergência de cada série.

**18.** Use as séries de Maclaurin de senh $x$ e cosh $x$ para obter os quatro primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de tgh $x$.

**19-20** Determine os cinco primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin usando frações parciais e uma série de Maclaurin conhecida. ■

**19.** $\dfrac{4x-2}{x^2-1}$ **20.** $\dfrac{x^3+x^2+2x-2}{x^2-1}$

**21-22** Confirme a fórmula de derivação diferenciando termo a termo a série de Maclaurin apropriada. ■

**21.** (a) $\dfrac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$ (b) $\dfrac{d}{dx}[\ln(1+x)] = \dfrac{1}{1+x}$

**22.** (a) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{senh} x] = \cosh x$ (b) $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{arc\,tg} x] = \dfrac{1}{1+x^2}$

**23-24** Confirme a fórmula de integração integrando termo a termo a série de Maclaurin apropriada. ■

**23.** (a) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$

**24.** (a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x) + C$

**25.** Considere a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)(k+2)}$$

Determine os intervalos de convergência dessa série e da série obtida derivando essa série termo a termo.

**26.** Considere a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k} x^k$$

Determine os intervalos de convergência dessa série e da série obtida integrando essa série termo a termo.

**27.** (a) Use a série de Maclaurin de $1/(1-x)$ para determinar a série de Maclaurin de

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

(b) Use a série de Maclaurin obtida na parte (a) para determinar $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

(c) O que podemos dizer sobre o valor de $f^{(n)}(0)$?

**28.** Seja $f(x) = x^2 \cos 2x$. Use o método do Exercício 27 para determinar $f^{(99)}(0)$.

**29-30** O limite de uma forma indeterminada quando $x \to x_0$ pode, às vezes, ser determinado expandindo as funções envolvidas em série de Taylor em torno de $x = x_0$ e tomando o limite dessa série termo a termo. Use esse método para determinar o limite nestes exercícios. ■

**29.** (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x - x}{x^3}$

**30.** (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sqrt{1+x} - \operatorname{sen} 2x}{x}$

**31-34** Use séries de Maclaurin para aproximar a integral com três casas decimais de precisão. ■

**31.** $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

**32.** $\int_0^{1/2} \operatorname{arc\,tg}(2x^2)\,dx$

**33.** $\int_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^4}\,dx$

**34.** $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2+1}}$

## ENFOCANDO CONCEITOS

**35.** (a) Encontre a série de Maclaurin de $e^{x^4}$. Qual é o raio de convergência?

(b) Explique duas maneiras diferentes de usar a série de Maclaurin de $e^{x^4}$ para encontrar a série de $x^3e^{x^4}$. Confirme que ambos os métodos produzem a mesma série.

**36.** (a) Diferencie a série de Maclaurin de $1/(1-x)$ e use o resultado para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{com } -1 < x < 1$$

(b) Integre a série de Maclaurin de $1/(1-x)$ e use o resultado para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \quad \text{com } -1 < x < 1$$

(c) Use o resultado da parte (b) para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x) \quad \text{com } -1 < x < 1$$

(d) Mostre que a série na parte (c) converge se $x = 1$.

(e) Use a observação que segue o Exemplo 3 para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x) \quad \text{com } -1 < x \le 1$$

**37.** Use os resultados do Exercício 36 para encontrar a soma de cada série.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(4^k)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(4^2)} + \frac{1}{3(4^3)} + \frac{1}{4(4^4)} + \cdots$

**38.** Use os resultados do Exercício 36 para encontrar a soma de cada série.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e-1)^k}{ke^k} = \frac{e-1}{e} + \frac{(e-1)^2}{2(e^2)} - \frac{(e-1)^3}{3(e^3)} + \cdots$

**39.** (a) Use a relação

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,senh} x + C$$

para determinar os quatro primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin de arc senh $x$.

(b) Expresse a série em notação sigma.

(c) Qual é o raio de convergência?

**40.** (a) Use a relação

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

para determinar os quatro primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de arc sen $x$.

(b) Expresse a série em notação sigma.

(c) Qual é o raio de convergência?

**41.** Mostramos pela Fórmula (19) da Seção 8.2 que se há $y_0$ unidades de radiocarbono-14 presentes no instante $t = 0$, então o número de unidades presentes $t$ anos depois será de

$$y(t) = y_0 e^{-0,000121t}$$

(a) Expresse $y(t)$ como uma série de Maclaurin.

(b) Use os dois primeiros termos da série para mostrar que o número de unidades presentes depois de 1 ano é de aproximadamente $(0,999879)\,y_0$.

(c) Compare esse valor com o produzido pela fórmula para $y(t)$.

C **42.** Suponha que, a um pêndulo simples com um comprimento de $L = 1$ metro, seja dado um deslocamento inicial de $\theta_0 = 5°$ em relação à vertical.

(a) Aproxime o período do pêndulo usando a Fórmula (9) para o modelo de primeira ordem. [Use $g = 9{,}8\text{m/s}^2$.]

(b) Aproxime o período do pêndulo usando a Fórmula (10) para o modelo de segunda ordem.

(c) Use a integração numérica de um CAS para aproximar o período do pêndulo pela Fórmula (7) e compare-o com os valores obtidos nas partes (a) e (b).

**43.** Use os três primeiros termos diferentes de zero na Fórmula (8) e a fórmula do seno de Wallis que está no final deste livro na Tabela de Integrais (Fórmula 122) para obter um modelo para o período de um pêndulo simples.

**44.** Lembre-se de que a força da gravidade exercida pela Terra sobre um objeto é chamada *peso* do objeto (ou, mais precisamente, *peso terrestre*). Se um objeto de massa $m$ estiver na superfície da Terra (nível médio do mar), então a magnitude de seu peso é $mg$, onde $g$ é a aceleração devido à gravidade na superfície da Terra. Uma fórmula mais geral para a magnitude da força gravitacional que a Terra exerce sobre um objeto de massa $m$ é

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

onde $R$ é o raio da Terra e $h$ é a altura que o objeto está em relação à superfície da Terra.

(a) Use a série binomial de $1/(1+x)^2$ obtida no Exemplo 4 da Seção 9.9 para expressar $F$ como uma série de Maclaurin em potências de $h/R$.

(b) Mostre que, se $h = 0$, então $F = mg$.

(c) Mostre que, se $h/R \approx 0$, então $F \approx mg - (2mgh/R)$. [*Observação*: A quantidade $2mgh/R$ pode ser interpretada como um "termo de correção" para o peso, quando se leva em conta a altura do objeto em relação à superfície da Terra.]

(d) Se supormos que a Terra seja uma esfera de raio $R = 4.000$ milhas em média ao nível do mar, qual é a porcentagem

aproximada de mudança no peso de uma pessoa variando do nível do mar ao topo do Monte Evereste (29.028 pés)?

**45.** (a) Mostre que a função de Bessel $J_0(x)$ dada pela Fórmula (4) da Seção 9.8 satisfaz a equação diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ (Essa é a ***equação de Bessel de ordem zero***.)
(b) Mostre que a função de Bessel $J_1(x)$ dada pela Fórmula (5) da Seção 9.8 satisfaz a equação diferencial $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ (Essa é a ***equação de Bessel de primeira ordem***.)
(c) Mostre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

**46.** Prove: Se as séries de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ tiverem a mesma soma em um intervalo $(-r, r)$, então $a_k = b_k$ com qualquer valor de $k$.

**47.** **Texto** Calcule o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

de duas maneiras: usando a Regra de L'Hôpital e substituindo sen $x$ por sua série de Maclaurin. Discuta como o uso da série fornece informação qualitativa sobre como é aproximado o valor de um limite indeterminado.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 9.10

**1.** $(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{k!}$ **2.** 1; $-1$; 1; $-1$; $(-1)^k x^k$ **3.** 1; $\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{4}{3}$ **4.** (a) $-\dfrac{1}{2}$ (b) 4; 1; $-\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{18}$; 4; $(-1)^{k+1} \dfrac{(x-1)^k}{k \cdot (k!)}$

## EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 9

**1.** Qual é a diferença entre uma sequência infinita e uma série infinita?

**2.** O que se entende pela soma de uma série infinita?

**3.** (a) O que é uma série geométrica? Dê alguns exemplos de séries geométricas convergentes e divergentes.
(b) O que é uma série $p$? Dê alguns exemplos de séries $p$ convergentes e divergentes.

**4.** Enuncie condições sob as quais uma série alternada certamente convirja.

**5.** (a) O que significa dizer que uma série infinita converge absolutamente?
(b) Qual relação existe entre convergência e convergência absoluta de uma série infinita?

**6.** Enuncie o Teorema da Estimativa do Resto e descreva alguns de seus usos.

**7.** Se uma série de potências em $x - x_0$ tiver raio de convergência $R$, o que pode ser dito sobre o conjunto de valores de $x$ nos quais a série converge?

**8.** (a) Escreva a fórmula da série de Maclaurin de $f$ em notação sigma.
(b) Escreva a fórmula da série de Taylor de $f$ em torno de $x = x_0$ em notação sigma.

**9.** As seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas? Se for verdadeira, enuncie um teorema para justificar sua conclusão. Se for falsa, então dê um contraexemplo.
(a) Se $\sum u_k$ converge, então $u_k \to 0$ quando $k \to +\infty$
(b) Se $u_k \to 0$ quando $k \to +\infty$, então $\sum u_k$ convergirá.
(c) Se $f(n) = a_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e se $a_n \to L$ quando $n \to +\infty$, então $f(x) \to L$ quando $x \to +\infty$.
(d) Se $f(n) = a_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e se $f(x) \to L$ quando $x \to +\infty$, então $a_n \to L$ quando $n \to +\infty$.
(e) Se $0 < a_n < 1$, então $\{a_n\}$ convergirá.
(f) Se $0 < u_k < 1$, então $\sum u_k$ convergirá.
(g) Se $\sum u_k$ e $\sum v_k$ convergirem, então $\sum (u_k + v_k)$ divergirá.
(h) Se $\sum u_k$ e $\sum v_k$ divergirem, então $\sum (u_k - v_k)$ convergirá.
(i) Se $0 \le u_k \le v_k$ e $\sum v_k$ convergir, então $\sum u_k$ convergirá.
(j) Se $0 \le u_k \le v_k$ e $\sum u_k$ divergir, então $\sum v_k$ divergirá.
(k) Se uma série infinita convergir, então ela convergirá absolutamente.
(l) Se uma série infinita divergir absolutamente, então ela divergirá.

**10.** Decida se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
(a) A função $f(x) = x^{1/3}$ tem uma série de Maclaurin.
(b) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \cdots = 1$
(c) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots = 1$

**11.** Encontre o termo geral da sequência, começando com $n = 1$, determine se a sequência converge e, caso convirja, encontre seu limite.
(a) $\dfrac{3}{2^2 - 1^2}, \dfrac{4}{3^2 - 2^2}, \dfrac{5}{4^2 - 3^2}, \ldots$
(b) $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, -\dfrac{4}{9}, \ldots$

**12.** Suponha que a sequência $\{a_k\}$ seja definida recursivamente por

$$a_0 = c, \quad a_{k+1} = \sqrt{a_k}$$

Supondo que a sequência convirja, determine seu limite se
(a) $c = \frac{1}{2}$ (b) $c = \frac{3}{2}$.

**13.** Mostre que a sequência é estritamente monótona a partir de um certo termo.
(a) $\{(n - 10)^4\}_{n=0}^{+\infty}$ (b) $\left\{\dfrac{100^n}{(2n)!(n!)}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

**14.** (a) Dê um exemplo de uma sequência limitada que diverge.
(b) Dê um exemplo de uma sequência monótona que diverge.

**15-20** Use qualquer método para determinar se a série converge. ■

**15.** (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5^k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5^k+1}$

**16.** (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k+4}{k^2+k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{k+2}{3k-1}\right)^k$

**17.** (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3+2k+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3+k)^{2/5}}$

**18.** (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k\sqrt{k}}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{4/3}}{8k^2+5k+1}$

**19.** (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{\sqrt{k}+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(1/k)}{k^2}$

**20.** (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-1/2}}{2+\operatorname{sen}^2 k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1}$

**21.** Determine uma fórmula para o erro exato que resulta quando a soma da série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty}(1/5)^k$ for aproximada pela soma dos 100 primeiros termos da série.

**22.** Suponha que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k = 2-\frac{1}{n}$. Determine

(a) $u_{100}$ (b) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}u_k$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}u_k$.

**23.** Em cada parte, determine se a série converge; se convergir, determine sua soma.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^k}-\frac{2}{3^k}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}[\ln(k+1)-\ln k]$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}[\operatorname{arc\,tg}(k+1)-\operatorname{arc\,tg} k]$

**24.** Pode ser provado que

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$$

Em cada parte, use esses limites e o teste da raiz para determinar se a série converge.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^k}{k!}$

**25.** Sejam $a$, $b$ e $p$ constantes positivas. Com quais valores de $p$ a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(a+bk)^p}$ converge?

**26.** Determine o intervalo de convergência de

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{b^k} \quad (b>0)$$

**27.** (a) Mostre que $k^k \geq k!$.

(b) Use o teste da comparação para mostrar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k^{-k}$ converge.

(c) Use o teste da raiz para mostrar que a série converge.

**28.** A série $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\frac{5}{9}+\cdots$ converge? Justifique sua resposta.

**29.** (a) Determine os cinco primeiros polinômios de Maclaurin da função $p(x)=1-7x+5x^2+4x^3$.

(b) Faça uma afirmação geral sobre o polinômio de Maclaurin de um polinômio de grau $n$.

**30.** Mostre que a aproximação

$$\operatorname{sen} x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

é precisa em até 4 casas decimais se $0\leq x\leq \pi/4$.

**31.** Use uma série de Maclaurin e propriedades das séries alternadas para mostrar que $|\ln(1+x)-x|\leq x^2/2$ se $0<x<1$.

**32.** Use uma série de Maclaurin para aproximar a integral

$$\int_0^1\frac{1-\cos x}{x}\,dx$$

com três casas decimais de precisão.

**33.** Nas partes (a) a (d), determine a soma da série associando-a com alguma série de Maclaurin.

(a) $2+\dfrac{4}{2!}+\dfrac{8}{3!}+\dfrac{16}{4!}+\cdots$

(b) $\pi-\dfrac{\pi^3}{3!}+\dfrac{\pi^5}{5!}-\dfrac{\pi^7}{7!}+\cdots$

(c) $1-\dfrac{e^2}{2!}+\dfrac{e^4}{4!}-\dfrac{e^6}{6!}+\cdots$

(d) $1-\ln 3+\dfrac{(\ln 3)^2}{2!}-\dfrac{(\ln 3)^3}{3!}+\cdots$

**34.** Em cada parte, escreva os quatro primeiros termos da série e, então, determine o raio de convergência.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}x^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}x^{2k+1}$

**35.** Use uma série de Taylor apropriada de $\sqrt[3]{x}$ para aproximar $\sqrt[3]{28}$ com três casas decimais de precisão e verifique sua resposta comparando-a com aquela produzida por uma calculadora.

**36.** Derive a série de Maclaurin de $xe^x$ e use o resultado para mostrar que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{k!}=2e$$

**37.** Use as séries de Maclaurin de sen $x$ e cos $x$ dadas abaixo para encontrar os quatro primeiros termos não nulos da série de Maclaurin das funções dadas.

$$\operatorname{sen} x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(a) $\operatorname{sen} x\cos x$ (b) $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

## CAPÍTULO 9 ESTABELECENDO CONEXÕES

**1.** Conforme mostra a figura a seguir, suponha que as retas $L_1$ e $L_2$ formem um ângulo $\theta$, $0 < \theta < \pi/2$, em seu ponto de interseção $P$. Um ponto $P_0$ é escolhido em $L_1$ a $a$ unidades de $P$. Começando em $P_0$ um caminho em ziguezague é construído rebatendo sucessivamente entre $L_1$ e $L_2$ ao longo da perpendicular de uma reta para a outra. Obtenha as seguintes somas em termos de $\theta$ e de $a$

(a) $P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots$

(b) $P_0P_1 + P_2P_3 + P_4P_5 + \cdots$

(c) $P_1P_2 + P_3P_4 + P_5P_6 + \cdots$

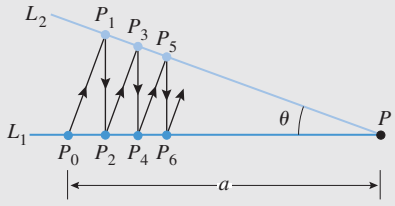



**Figura Ex-1**

**2.** (a) Obtenha $A$ e $B$ tais que

$$\frac{6^k}{(3^{k+1} - 2^{k+1})(3^k - 2^k)} = \frac{2^k A}{3^k - 2^k} + \frac{2^k B}{3^{k+1} - 2^{k+1}}$$

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar uma forma fechada para a enésima soma parcial da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^{k+1} - 2^{k+1})(3^k - 2^k)}$$

e, então, encontre a soma da série.

***Fonte:*** Este exercício foi adaptado de um problema que apareceu na Forty-Fifth Annual William Lowell Putnam Competition.

**3.** Mostre que a série $p$ alternada

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{k^p} + \cdots$$

converge absolutamente se $p > 1$, converge condicionalmente se $0 < p \leq 1$ e diverge se $p \leq 0$.

**4.** Como ilustrado na figura a seguir, um besouro começa a andar a partir de um ponto $A$ sobre um fio com 180 cm de comprimento. Ele vai até o fim do fio, então para e anda no sentido oposto ao longo de uma metade do comprimento do fio, para novamente e anda no sentido oposto ao longo de um terço do comprimento do fio, para novamente e anda no sentido oposto por um quarto do comprimento do fio e assim por diante, até que para pela milésima vez.

(a) Dê cotas superior e inferior da distância entre o besouro e o ponto $A$ quando ele finalmente para. [*Sugestão*: Como afirmado no Exemplo 2 da Seção 9.6, suponha que a soma da série harmônica alternada seja ln 2.]

(b) Dê cotas superior e inferior da distância total que o besouro percorre até finalmente parar. [*Sugestão*: Use a desigualdade (2) da Seção 9.4.]

**Figura Ex-4**

**5.** Na Seção 6.6 do Volume 1, definimos a energia cinética $K$ de uma partícula com massa $m$ e velocidade $v$ por $K = \frac{1}{2}mv^2$ [ver a Fórmula (7) daquela seção]. Nessa fórmula, a massa $m$ é considerada constante e $K$ é denominada ***energia cinética newtoniana***. Entretanto, na teoria da relatividade de Albert Einstein, a massa $m$ cresce com a velocidade, e a energia $K$ é dada pela fórmula

$$K = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1\right]$$

na qual $m_0$ é a massa da partícula quando sua velocidade for zero e $c$ é a velocidade da luz. Isso é chamado de ***energia cinética relativística***. Use uma série binomial apropriada para mostrar que se a velocidade for pequena comparada com a velocidade da luz (i.e., $v/c \approx 0$), então as energias newtoniana e relativista são praticamente as mesmas.

**6.** Na Seção 8.4, estudamos o movimento de um objeto em queda que tem massa $m$ e é retardado pela resistência do ar. Mostramos que se a velocidade inicial for $v_0$ e a força de resistência $F_R$ for proporcional à velocidade, isto é, $F_R = -cv$, então a velocidade do objeto no instante $t$ será

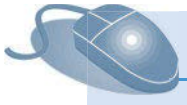
$$v(t) = e^{-ct/m}\left(v_0 + \frac{mg}{c}\right) - \frac{mg}{c}$$

onde $g$ é a aceleração em razão da gravidade [ver Fórmula (16) da Seção 8.4].

(a) Use uma série de Maclaurin para mostrar que se $ct/m \approx 0$, então a velocidade pode ser aproximada por

$$v(t) \approx v_0 - \left(\frac{cv_0}{m} + g\right)t$$

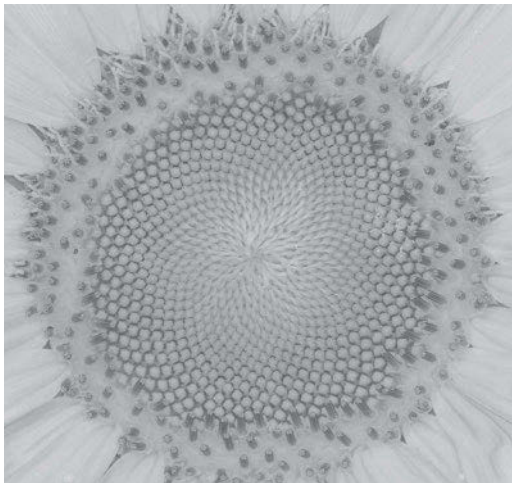
(b) Melhore a aproximação na parte (a).



## EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO

Para aprender como os ecologistas usam modelos matemáticos que têm por base o processo da iteração para estudar o aumento e o declínio de populações animais, confira o módulo intitulado **Iteração e Sistemas Dinâmicos** em

www.grupoa.com.br



Gilbert S. Grant/Photo Researchers, Inc.

# 10 CURVAS PARAMÉTRICAS E POLARES; SEÇÕES CÔNICAS

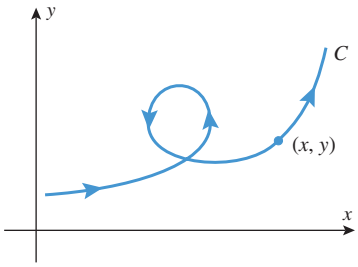
*Com as ideias desenvolvidas neste capítulo podemos descrever convenientemente curvas matemáticas como as espirais no centro de um girassol.*

Neste capítulo, estudaremos maneiras alternativas de expressar curvas no plano. Inicialmente, estudaremos curvas paramétricas, que são curvas descritas em termos de componentes que são funções. Esse estudo incluirá métodos para encontrar retas tangentes a curvas paramétricas. Em seguida, introduziremos sistemas de coordenadas polares e discutiremos métodos para encontrar retas tangentes a curvas polares, comprimento de arco de curvas polares e áreas de regiões englobadas por curvas polares. Continuando, apresentaremos uma revisão das propriedades básicas das seções cônicas: parábolas, elipses e hipérboles. Finalmente, consideraremos seções cônicas no contexto de coordenadas polares e discutiremos algumas aplicações à Astronomia.

## 10.1 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS; RETAS TANGENTES E COMPRIMENTO DE CURVAS PARAMÉTRICAS

*Os gráficos de funções devem passar pelo teste da reta vertical, uma limitação que exclui curvas com autointersecções e até mesmo algumas curvas básicas como os círculos. Nesta seção, vamos estudar um método alternativo de descrição algébrica de curvas que não está sujeito a uma restrição tão severa como o teste da reta vertical. Em seguida, deduziremos fórmulas utilizadas para encontrar inclinações, retas tangentes e comprimentos de arcos dessas curvas paramétricas. Concluímos esta seção com uma investigação de uma curva paramédica clássica conhecida como a cicloide.*

### EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS




Uma partícula em movimento com trajetória $C$

**Figura 10.1.1**

Suponha que uma partícula move-se ao longo de uma curva $C$ no plano $xy$, de tal modo que suas coordenadas $x$ e $y$, como funções do tempo, são

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

Dizemos que estas são as ***equações paramétricas*** do movimento da partícula e nos referimos a $C$ como a ***trajetória*** da partícula ou o ***gráfico*** das equações (Figura 10.1.1). A variável $t$ é denominada ***parâmetro*** das equações.

► **Exemplo 1** Esboce a trajetória no intervalo $0 \leq t \leq 10$ da partícula cujas equações paramétricas do movimento são

$$x = t - 3 \operatorname{sen} t, \quad y = 4 - 3 \cos t \tag{1}$$

***Solução*** Uma forma de esboçar a trajetória é escolher uma sucessão representativa de instantes, marcar os pontos com as coordenadas correspondentes $(x, y)$ e, depois, conectá-los por uma curva lisa. A trajetória na Figura 10.1.2 foi obtida dessa forma a partir da Tabela 10.1.1, na qual as coordenadas aproximadas da partícula são dadas em incrementos de 1 unidade no tempo. Observe que na figura não há um eixo $t$; os valores de $t$ aparecem somente como legenda nos pontos plotados e, mesmo assim, são geralmente omitidos, a não ser que seja particularmente importante enfatizar a localização da partícula em instantes específicos. ◀

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Leia o manual de seu recurso gráfico para aprender a fazer gráficos de equações paramétricas e, então, gere a trajetória do Exemplo 1. Explore o comportamento da partícula além do instante $t = 10$.

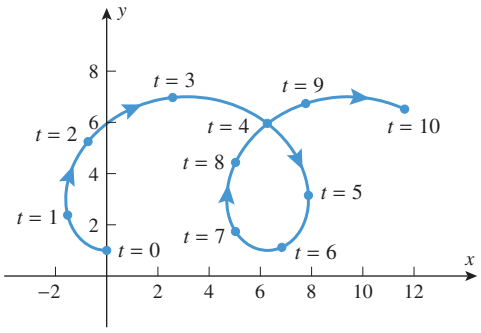



**Figura 10.1.2**

**Tabela 10.1.1**

| $t$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 1,0 |
| 1 | −1,5 | 2,4 |
| 2 | −0,7 | 5,2 |
| 3 | 2,6 | 7,0 |
| 4 | 6,3 | 6,0 |
| 5 | 7,9 | 3,1 |
| 6 | 6,8 | 1,1 |
| 7 | 5,0 | 1,7 |
| 8 | 5,0 | 4,4 |
| 9 | 7,8 | 6,7 |
| 10 | 11,6 | 6,5 |

Embora seja mais comum que as equações paramétricas apareçam em problemas de movimento com o tempo como parâmetro, elas também surgem em outros contextos. Assim, exceto quando o problema exigir que o parâmetro $t$ nas equações

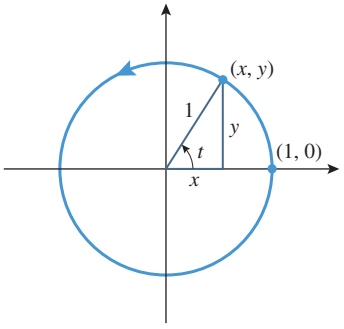
$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

represente o tempo, ele deve ser visto simplesmente como uma variável independente que varia sobre algum intervalo de números reais. (Na verdade, não há necessidade de usar a letra $t$ para o parâmetro; qualquer letra não reservada para outro propósito poderia ser usada.) Se nenhuma restrição sobre o parâmetro for estabelecida explicitamente ou estiver subentendida pelas equações, deve-se entender que ele varia de $-\infty$ a $+\infty$. Para indicar que um parâmetro $t$ está restrito a um intervalo $[a, b]$,vamos escrever

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (a \le t \le b)$$

**► Exemplo 2** Encontre o gráfico das equações paramétricas

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi) \tag{2}$$




$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t$
$(0 \le t \le 2\pi)$

**Figura 10.1.3**

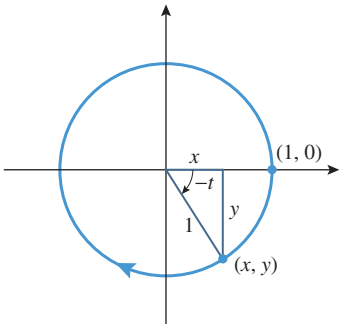
***Solução*** Uma maneira de encontrar o gráfico é eliminar o parâmetro $t$, notando que

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Assim, o gráfico está contido no círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Esse resultado pode também ser deduzido geometricamente, interpretando $t$ como o ângulo varrido por uma reta radial da origem ao ponto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ no círculo unitário (Figura 10.1.3). À medida que $t$ cresce de 0 até $2\pi$, o ponto descreve o círculo no sentido anti-horário, começando em (1, 0) quando $t = 0$ e completando uma revolução inteira quando $t = 2\pi$. Podem-se obter diferentes partes do círculo variando o intervalo no qual varia o parâmetro. Por exemplo:

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le \pi) \tag{3}$$

representa simplesmente o semicírculo superior na Figura 10.1.3. ◀




$x = \cos(-t),\ y = \operatorname{sen}(-t)$
$(0 \le t \le 2\pi)$

**Figura 10.1.4**

## ■ ORIENTAÇÃO

O sentido segundo o qual o gráfico de um par de equações paramétricas é percorrido à medida que o parâmetro cresce é denominado ***sentido do parâmetro crescente***, ou, então, ***orientação*** imposta à curva pelas equações. Dessa forma, fazemos uma distinção entre uma ***curva***, que é um conjunto de pontos, e uma ***curva paramétrica***, que é uma curva com uma orientação que lhe é imposta por um conjunto de equações paramétricas. Por exemplo, vimos no Exemplo 2 que o círculo representado parametricamente por (2) é percorrido no sentido anti-horário à medida que $t$ cresce; logo, tem *orientação anti-horária*. Conforme pode ser visto nas Figuras 10.1.2 e 10.1.3, a orientação de uma curva pode ser indicada por setas.

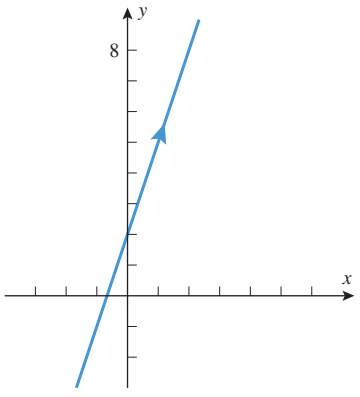
Para obter equações paramétricas para o círculo unitário com *orientação horária*, podemos substituir $t$ por $-t$ em (2) e usar as identidades $\cos(-t) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$. Isso dá lugar a

$$x = \cos t, \quad y = -\operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

Agora, o círculo é percorrido no sentido horário por um ponto que começa em (1, 0) quando $t = 0$ e completa uma revolução inteira quando $t = 2\pi$ (Figura 10.1.4).

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Quando se usa uma calculadora para fazer os gráficos de equações paramétricas, a orientação pode, frequentemente, ser determinada observando o sentido em que o gráfico é traçado na tela. Entretanto, muitos computadores fazem isso tão rapidamente que fica muito difícil discernir a orientação. Veja se o seu recurso gráfico permite confirmar que (3) tem uma orientação anti-horária.




$x = 2t - 3,\ y = 6t - 7$

**Figura 10.1.5**

**► Exemplo 3** Faça o gráfico da curva paramétrica

$$x = 2t - 3, \quad y = 6t - 7$$

eliminando o parâmetro e indique a orientação do gráfico.

***Solução*** Para eliminar o parâmetro, vamos resolver a primeira equação para $t$ como uma função de $x$, e então substituir essa expressão de $t$ na segunda equação:

$$t = \left(\tfrac{1}{2}\right)(x + 3)$$

$$y = 6\left(\tfrac{1}{2}\right)(x + 3) - 7$$

$$y = 3x + 2$$

Assim, o gráfico é uma reta com inclinação 3 e corte no eixo $y$ em 2. Para encontrar a orientação, devemos olhar as equações originais; o sentido de $t$ crescente pode ser deduzido observando que $x$ cresce quando $t$ cresce, *ou* observando que $y$ cresce quando $t$ cresce. Qualquer das duas informações nos diz que a reta é percorrida da esquerda para a direita, conforme indicado na Figura 10.1.5. ◄

**OBSERVAÇÃO**

Nem todas as equações paramétricas produzem curvas com orientações definidas; se as equações forem malcomportadas, então o ponto, ao percorrer a curva, pode pular esporadicamente ou mover-se para frente e para trás, sem determinar um sentido definido. Por exemplo, se

$$x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$$

então o ponto $(x, y)$ move-se ao longo da parábola $y = x^2$. Porém, o valor de $x$ varia periodicamente entre $-1$ e 1, e portanto o ponto $(x, y)$ também vai para frente e para trás ao longo da parábola entre os pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ (conforme mostra a Figura 10.1.6). Mais adiante no livro vamos discutir restrições que eliminam esse comportamento estranho, mas por ora simplesmente evitaremos tais complicações.

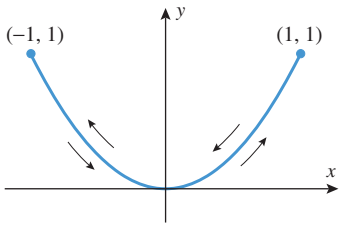



**Figura 10.1.6**

## ■ FUNÇÕES ORDINÁRIAS EXPRESSAS PARAMETRICAMENTE

Uma equação $y = f(x)$ pode ser expressa na forma paramétrica, introduzindo o parâmetro $t = x$; isso dá lugar às equações paramétricas

$$x = t, \quad y = f(t)$$

Por exemplo, a parte da curva $y = \cos x$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ pode ser expressa parametricamente como

$$x = t, \quad y = \cos t \quad (-2\pi \le t \le 2\pi)$$

(Figura 10.1.7).

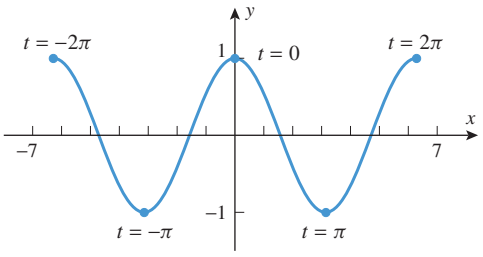



**Figura 10.1.7**

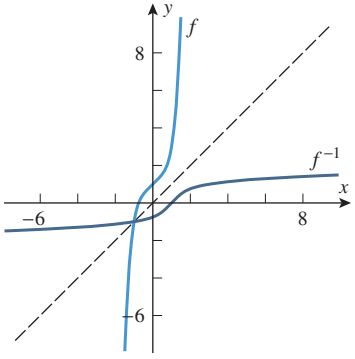



**Figura 10.1.8**

Se uma função $f$ for injetora, então essa função terá uma função inversa $f^{-1}$. Nesse caso, a equação $y = f^{-1}(x)$ será equivalente a $x = f(y)$. Podemos expressar o gráfico de $f^{-1}$ em forma paramétrica introduzindo o parâmetro $y = t$; isso fornece as equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = t$$

Por exemplo, a Figura 10.1.8 mostra o gráfico de $f(x) = x^5 + x + 1$ e sua inversa. O gráfico de $f$ pode ser representado parametricamente por

$$x = t, \quad y = t^5 + t + 1$$

e o gráfico de $f^{-1}$ pode ser representado parametricamente por

$$x = t^5 + t + 1, \quad y = t$$

## RETAS TANGENTES A CURVAS PARAMÉTRICAS

Estaremos interessados em curvas dadas por equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

nas quais $f(t)$ e $g(t)$ têm derivadas primeiras contínuas em relação a $t$. Pode-se provar que se $dx/dt \neq 0$, então $y$ é uma função diferenciável de $x$, caso em que a regra da cadeia implica que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \tag{4}$$

Essa fórmula permite encontrar $dy/dx$ diretamente das equações paramétricas sem eliminar o parâmetro.

**► Exemplo 4** Encontre a inclinação da reta tangente ao círculo unitário

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

no ponto em que $t = \pi/6$ (Figura 10.1.9).

***Solução*** A partir de (4), a inclinação em um ponto qualquer do círculo é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\cos t}{-\operatorname{sen} t} = -\operatorname{cotg} t \tag{5}$$

Assim, a inclinação em $t = \pi/6$ é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/6} = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} \quad \blacktriangleleft$$

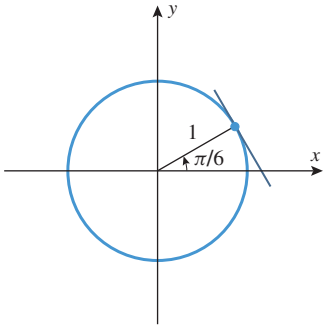
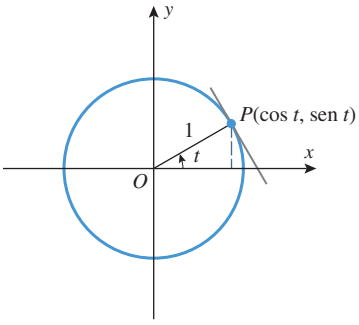



**Figura 10.1.9**

Note que a Fórmula (5) faz sentido geometricamente, pois o raio da origem para o ponto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ tem inclinação $m = \operatorname{tg} t$. Assim, a reta tangente em $P$, sendo perpendicular ao raio, tem inclinação

$$-\frac{1}{m} = -\frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\operatorname{cotg} t$$

(Figura 10.1.10).




O raio $OP$ tem inclinação $m = \operatorname{tg} t$.

**Figura 10.1.10**

Stanislovas Kairys/iStockphoto

*As equações paramétricas são a melhor maneira de descrever matematicamente o complicado voo de um avião de papel.*

Tem-se a partir da Fórmula (4) que a reta tangente a uma curva paramétrica será horizontal naqueles pontos em que $dy/dt = 0$ e $dx/dt \neq 0$, uma vez que $dy/dx = 0$ naqueles pontos. Duas situações distintas ocorrem quando $dx/dt = 0$. Nos pontos em que $dx/dt = 0$ e $dy/dt \neq 0$, o lado direito de (4) tem numerador não nulo e um denominador nulo; vamos convencionar que, nesses pontos, a curva tem ***inclinação infinita*** e uma ***reta tangente vertical***. Nos pontos em que $dx/dt$ e $dy/dt$ forem ambas nulas, o lado direito de (4) torna-se uma forma indeterminada; tais pontos são chamados de ***pontos singulares***. Nenhuma afirmativa geral pode ser feita sobre o comportamento da curva paramétrica em pontos singulares, que devem ser analisados caso a caso.

► **Exemplo 5** Em um desastroso voo inicial, um avião de papel experimental seguiu a trajetória

$$x = t - 3 \operatorname{sen} t, \quad y = 4 - 3 \cos t \quad (t \geq 0)$$

mas bateu contra uma parede no instante $t = 10$ (Figura 10.1.1).

(a) Em quais instantes o avião voou horizontalmente?

(b) Em quais instantes o avião voou verticalmente?

***Solução (a)*** O avião voava horizontalmente naqueles instantes em que $dy/dt = 0$ e $dx/dt \neq 0$. Para a trajetória dada, temos

$$\frac{dy}{dt} = 3 \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = 1 - 3 \cos t \tag{6}$$

Equacionando $dy/dt = 0$, obtemos a equação $3 \operatorname{sen} t = 0$ ou, mais simplesmente, $\operatorname{sen} t = 0$. Essa equação tem quatro soluções no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 10$:

$$t = 0, \quad t = \pi, \quad t = 2\pi, \quad t = 3\pi$$

Como $dx/dt = 1 - 3 \cos t \neq 0$ para esses valores de $t$ (verifique), o avião estava voando horizontalmente nos instantes

$$t = 0, \quad t = \pi \approx 3{,}14, \quad t = 2\pi \approx 6{,}28 \quad \text{e} \quad t = 3\pi \approx 9{,}42$$

o que está de acordo com a Figura 10.1.1.

***Solução (b)*** O avião voava verticalmente naqueles instantes em que $dx/dt = 0$ e $dx/dt \neq 0$. Equacionando $dx/dt = 0$ em (6), obtemos

$$1 - 3 \cos t = 0 \quad \text{ou} \quad \cos t = \tfrac{1}{3}$$

Essa equação tem três soluções no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 10$ (Figura 10.1.2):

$$t = \arccos \tfrac{1}{3}, \quad t = 2\pi - \arccos \tfrac{1}{3}, \quad t = 2\pi + \arccos \tfrac{1}{3}$$

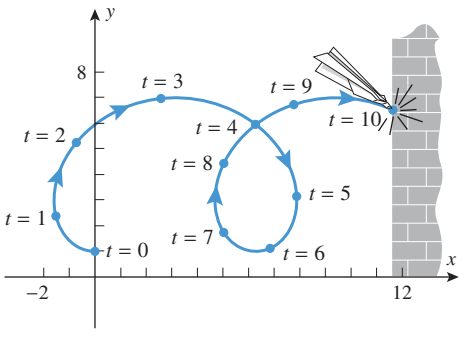



**Figura 10.1.11**

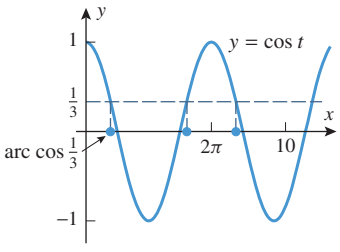
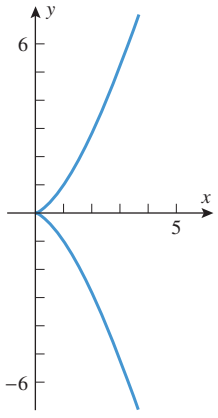



**Figura 10.1.12**

Como $dy/dt = 3 \operatorname{sen} t$ não se anula em nenhum desses pontos (por quê?), segue que o avião estava voando verticalmente nos instantes

$$t = \arccos \tfrac{1}{3} \approx 1{,}23, \quad t \approx 2\pi - 1{,}23 \approx 5{,}05, \quad t \approx 2\pi + 1{,}23 \approx 7{,}51$$

o que, de novo, está de acordo com a Figura 10.1.11. ◄




$x = t^2,\ y = t^3$
$(-\infty < t < +\infty)$

**Figura 10.1.13**

► **Exemplo 6** A curva representada parametricamente pelas equações

$$x = t^2, \quad y = t^3 \quad (-\infty < t < +\infty)$$

é denominada ***parábola semicúbica***. O parâmetro $t$ pode ser eliminado elevando $x$ ao cubo e $y$ ao quadrado, do que segue que $y^2 = x^3$. O gráfico dessa equação, mostrado na Figura 10.1.13, consiste em dois ramos: um superior, obtido fazendo o gráfico de $y = x^{3/2}$, e um inferior, obtido de $y = -x^{3/2}$. Os dois ramos encontram-se na origem, que corresponde a $t = 0$ nas equações paramétricas. A origem é um ponto singular, pois nela as derivadas $dx/dt = 2t$ e $dy/dt = 3t^2$ são nulas. ◄

► **Exemplo 7** Sem eliminar o parâmetro, encontre $dy/dx$ e $d^2y/dx^2$ nos pontos (1, 1) e (1, −1) na parábola semicúbica dada pelas equações paramétricas do Exemplo 6.

***Solução*** A partir de (4), temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t \qquad (t \neq 0) \tag{7}$$

e, de (4) aplicado a $y' = dy/dx$, temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{3/2}{2t} = \frac{3}{4t} \tag{8}$$

Como o ponto (1, 1) da curva corresponde a $t = 1$ nas equações paramétricas, segue por (7) e (8) que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{3}{4}$$

Analogamente, o ponto (1, −1) corresponde a $t = -1$ nas equações paramétricas, e novamente usando (7) e (8) obtemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-1} = -\frac{3}{4}$$

Observe que os valores obtidos para as derivadas estão de acordo com o gráfico na Figura 10.1.13, pois, no ponto (1, 1) do ramo superior, a reta tangente tem inclinação positiva e a curva é côncava para cima; e, no ponto (1, −1) do ramo inferior, a reta tangente tem inclinação negativa e a curva é côncava para baixo

Observe finalmente que foi possível aplicar as Fórmulas (7) e (8) para $t = 1$ e para $t = -1$, mesmo estando os pontos (1, 1) e (1, −1) em ramos diferentes. Em contrapartida, se tivéssemos escolhido efetuar os mesmos cálculos por eliminação do parâmetro, teríamos que obter fórmulas separadas para as derivadas, uma para $y = x^{3/2}$ e outra para $y = -x^{3/2}$. ◄

**ADVERTÊNCIA**

Embora seja verdade que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

não se pode concluir que $d^2y/dx^2$ seja o quociente de $d^2y/dt^2$ e $d^2x/dt^2$. Para ilustrar a falsidade dessa conclusão, mostre que, no caso da curva paramétrica do Exemplo 7, temos

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} \neq \left.\frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}\right|_{t=1}$$

## COMPRIMENTO DE ARCO DE CURVAS PARAMÉTRICAS

O resultado a seguir fornece uma fórmula para obter o comprimento de arco de uma curva a partir das equações paramétricas dessa curva. Sua dedução é análoga à da Fórmula (3) na Seção 6.4 e será omitida.

As Fórmulas (4) e (5) na Seção 6.4 podem ser vistas como casos especiais de (9). Por exemplo, a Fórmula (4) naquela seção pode ser obtida a partir de (9) escrevendo $y = f(x)$ parametricamente como

$$x = t, \quad y = f(t)$$

e a Fórmula (5) pode ser obtida escrevendo $x = g(y)$ parametricamente como

$$x = g(t), \quad y = t$$

**10.1.1 FÓRMULA DO COMPRIMENTO DE ARCO PARA CURVAS PARAMÉTRICAS** Se nenhum segmento da curva representada pelas equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (a \le t \le b)$$

for traçado mais de uma vez, quando $t$ cresce de $a$ para $b$, e se $dx/dt$ e $dy/dt$ forem funções contínuas em $a \le t \le b$, então o comprimento de arco $L$ da curva é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{9}$$

**▶ Exemplo 8** Use (9) para encontrar a circunferência de um círculo de raio $a$ a partir das equações paramétricas

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

***Solução***

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \operatorname{sen} t)^2 + (a \cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a\, dt = at \Big]_0^{2\pi} = 2\pi a \quad \blacktriangleleft$$

## ■ CICLOIDES (O POMO DA DISCÓRDIA)

Os resultados desta seção podem ser usados para investigar uma curva conhecida como uma ***cicloide***. Essa curva, que é uma das mais importantes da história da Matemática, pode ser gerada por um ponto de um círculo que rola ao longo de uma reta (Figura 10.1.14). Essa curva tem uma história fascinante que vamos comentar adiante; primeiramente, iremos mostrar como obter as equações paramétricas para ela. Para isso, vamos supor que a roda tenha um raio $a$ e que irá rolar ao longo do eixo $x$ positivo de um sistema de cordenadas. Seja $P(x, y)$ o ponto da beirada que irá descrever a cicloide, e vamos supor $P$ inicialmente na origem. Consideraremos como nosso parâmetro o ângulo $\theta$ varrido pela reta radial até $P$, à medida que a roda rola (Figura 10.1.14). É padrão aqui considerar $\theta$ positivo, mesmo que gerado por uma rotação horária.

O movimento de $P$ é uma combinação do movimento do centro da roda, paralelo ao eixo $x$, e a rotação de $P$ em torno do centro. À medida que a reta radial varre um ângulo, o ponto $P$ percorre um arco de comprimento $a\theta$, e a roda move-se por uma distância $a\theta$ ao longo do eixo $x$. Assim, conforme sugere a Figura 10.1.15, o centro move-se para o ponto $(a\theta, a)$, e as coordenadas de $P$ são

$$x = a\theta - a \operatorname{sen} \theta, \quad y = a - a \cos \theta \tag{10}$$

Essas são equações da cicloide em termos do parâmetro $\theta$.

Uma das razões da importância da cicloide na história da Matemática é que o estudo de suas propriedades ajudou a estimular o desenvolvimento de versões iniciais de derivação e integração. O trabalho com a cicloide foi executado por alguns dos mais famosos nomes da Matemática do século XVII, entre os quais Johann e Jakob Bernoulli, Descartes, L'Hôpital, Newton e Leibniz. A curva foi denominada "cicloide" pelo matemático e astrônomo italiano Galileu, que passou mais de 40 anos investigando suas propriedades. Um dos primeiros problemas interessantes era o de construir retas tangentes à cicloide. Esse problema foi resolvido primeiro por Descartes e, depois, por Fermat, que fora desafiado por Descartes com essa questão. Uma solução moderna desse problema segue diretamente das equações paramétricas (10) e da Fórmula (4). Por exemplo, usando a Fórmula (4), é simples mostrar que os pontos de corte da cicloide com o eixo $x$ são cúspides e que há uma tangente à cicloide que é horizontal no ponto médio entre dois cortes adjacentes com o eixo $x$ (Exercício 60).

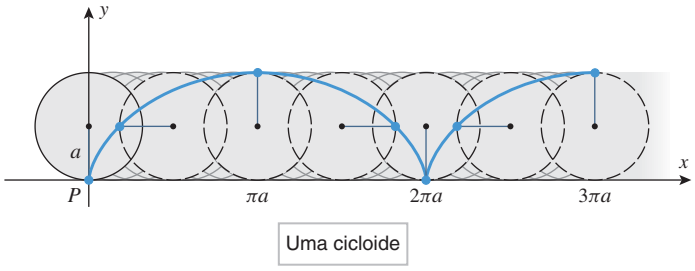



Figura 10.1.14

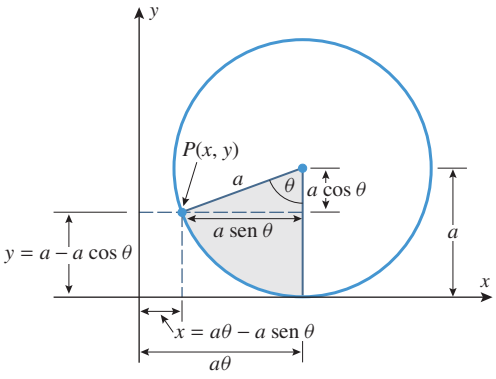



Figura 10.1.15

Outro problema antigo era o de determinar o comprimento de arco de um arco da cicloide. Isso foi resolvido em 1658 pelo famoso matemático e arquiteto britânico Sir Christopher Wren, que mostrou que o comprimento de arco de um arco da cicloide é exatamente oito vezes o raio do círculo gerador. [Para uma solução desse problema usando a Fórmula (9), veja o Exercício 71.]

A cicloide também tem importância histórica por fornecer a solução de dois problemas matemáticos famosos: o ***problema da braquistócrona*** (em grego, "o menor tempo") e o ***problema da tautócrona*** (em grego, "tempos iguais"). O problema da braquistócrona consiste em determinar a forma de um fio ao longo do qual uma conta pode deslizar de um ponto $P$ a $Q$, não diretamente abaixo, *no menor tempo*. O problema da tautócrona consiste em determinar a forma de um fio ligando $P$ a $Q$ de tal forma que duas contas que saiam de quaisquer dois pontos entre $P$ e $Q$ cheguem em $Q$ *no mesmo intervalo de tempo*. A solução de ambos os problemas vem a ser uma cicloide invertida (Figura 10.1.16).

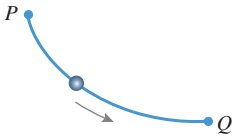
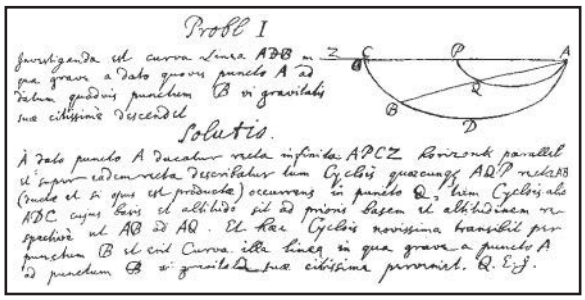



Figura 10.1.16

Em junho de 1696, Johann Bernoulli propôs o problema da braquistócrona como um desafio para outros matemáticos. A princípio, alguém poderia conjecturar que a forma do fio deveria ser a de uma linha reta, uma vez que essa forma resulta na menor distância de $P$ a $Q$. Porém, a cicloide invertida permite que a conta caia mais rapidamente no começo, adquirindo velocidade inicial suficiente para atingir $Q$ no menor tempo, mesmo que percorrendo uma distância maior. O problema foi resolvido por Newton, Leibniz e L'Hôpital, bem como por Johann Bernoulli e por seu irmão mais velho, Jakob; tal questão já havia sido formulada e resolvida *incorretamente* anos antes por Galileu, que pensou ser a resposta um arco circular. O fato é que Johann ficou tão impressionado com a solução dada pelo seu irmão Jakob que ele passou a alegar que a solução era dele. (Essa foi somente uma das muitas disputas relacionadas à cicloide, o que acabou levando-a a ser conhecida como o "pomo da discórdia".) Uma solução do problema da braquistócrona leva à equação diferencial

$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) y = 2a \tag{11}$$

em que $a$ é uma constante positiva. Deixaremos como um exercício (Exercício 72) mostrar que a cicloide fornece uma solução dessa equação diferencial.




A solução do problema da braquistócrona por Newton, com sua própria caligrafia.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.1 (Ver página 705 para respostas.)

1. Encontre equações paramétricas de um círculo de raio 2 centrado em (3, 5).
2. O gráfico da curva descrita pelas equações paramétricas $x = 4t - 1$, $y = 3t + 2$ é uma reta com inclinação _____ e corte no eixo $y$ dado por _____.
3. Suponha que uma curva paramétrica $C$ seja dada pelas equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ com $0 \le t \le 1$. Encontre equações paramétricas para $C$ que invertam o sentido de percurso da curva percorrida quando o parâmetro cresce de 0 a 1.
4. Para encontrar $dy/dx$ diretamente das equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

podemos usar a fórmula $dy/dx =$ _____

5. Seja $L$ o comprimento da curva

$$x = \ln t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (1 \le t \le \pi)$$

Uma expressão integral para $L$ é _____.

## EXERCÍCIOS 10.1 Recurso Gráfico C CAS

1. (a) Por eliminação do parâmetro, esboce a trajetória no intervalo de tempo $0 \le t \le 5$ de uma partícula cujas equações paramétricas do movimento são

$$x = t - 1, \quad y = t + 1$$

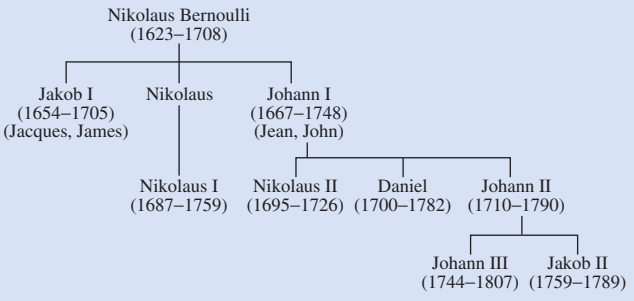
(b) Indique em seu esboço o sentido do movimento.
(c) Faça uma tabela das coordenadas $x$ e $y$ da partícula nos instantes $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
(d) Marque na curva a posição da partícula nos instantes de (c) e rotule as posições com os valores de $t$.

**Johann** (à esquerda) e **Jakob** (à direita) **Bernoulli** Membros de uma extraordinária família suíça, que inclui várias gerações de destacados matemáticos e cientistas. Nikolaus Bernoulli (1623–1708), um farmacêutico, fugiu de Antuérpia para escapar de perseguição religiosa, estabelecendo-se em Basel, na Suíça. Lá, teve três filhos: Jakob I (também chamado de Jacques ou James), Nikolaus e Johann I (também chamado de Jean ou John). Os algarismos romanos são usados para distinguir os vários membros da família com o mesmo nome (consulte a árvore da família ao fim do quadro). Depois de Newton e de Leibniz, os irmãos Bernoulli, Jakob I e Johann I, são considerados por alguns como os mais importantes fundadores do Cálculo. Jakob I era autodidata em Matemática. Seu pai o queria estudando Teologia, mas ele se voltou para a Matemática e, em 1686, tornou-se professor na Universidade de Basel. Quando começou a trabalhar em Matemática, nada sabia a respeito dos trabalhos de Newton e de Leibniz. Posteriormente, passou a conhecer os resultados de Newton, mas uma vez que muito pouco do trabalho de Leibniz foi publicado, muitos de seus resultados foram duplicados por Jakob.

O irmão mais novo de Jakob, Johann I, foi incentivado por seu pai a entrar para o comércio. Porém, voltou-se para a Medicina e estudou Matemática sob a orientação do irmão mais velho. Mais tarde, tornou-se professor de Matemática em Gröningen, na Holanda, e, então, com a morte do irmão em 1705, sucedeu-lhe como professor de Matemática em Basel. Durante suas vidas, os irmãos Jakob I e Johann I cultivaram uma paixão mútua por criticar o trabalho um do outro, o que, frequentemente, transformava-se em grandes disputas. Leibniz tentou mediar essas dicussões, mas Jakob, melindrado com o intelecto superior de Leibniz, acusava-o de tomar partido de Johann e, assim, acabava por constranger Leibniz nas brigas. Os irmãos, com frequência, trabalhavam sobre o mesmo problema, colocado como desafio mútuo. Johann, interessado em ganhar fama, usava, muitas vezes, meios inescrupulosos para figurar como o criador dos resultados do irmão. Jakob, ocasionalmente, revidava. Dessa forma, é, muitas vezes, difícil determinar quem merece os créditos por muitos resultados. Entretanto, ambos deram grandes contribuições ao desenvolvimento do Cálculo. Além de seu trabalho em Cálculo, Jakob ajudou a estabelecer os princípios fundamentais em Probabilidade, inclusive a Lei dos Grandes Números, pedra fundamental da teoria moderna da Probabilidade.

Entre os outros membros da família Bernoulli, Daniel, filho de Johann I, é o mais famoso. Ele foi professor de Matemática na Academia de S. Petersburgo, na Rússia; posteriormente, foi professor de Anatomia e, mais tarde, de Física, em Basel. Daniel trabalhou com Cálculo e Probabilidade, mas é mais conhecido por seu trabalho em Física. Uma lei básica do fluxo de fluidos, chamada de princípio de Bernoulli, tem tal nome em sua homenagem. Ele ganhou por 10 vezes o prêmio anual da Academia Francesa por seus trabalhos sobre cordas vibrantes, marés e teoria cinética dos gases.

Johann II sucedeu seu pai como professor de Matemática em Basel. Suas pesquisas enfocaram a teoria do calor e do som. Nikolaus I foi matemático e erudito em leis, tendo trabalhado em Probabilidade e em séries. Recomendado por Leibniz, foi nomeado professor de Matemática em Pádua; depois, seguiu para Basel como professor de Lógica e, posteriormente, de Direito. Nikolaus II foi professor de Jurisprudência na Suíça e, mais tarde, professor de Matemática na Academia de S. Petersburgo. Johann III foi professor de Matemática e Astronomia em Berlim, e Jakob II sucedeu seu tio Daniel como professor de Matemática na Academia de S. Petersburgo. Realmente, uma família incrível!



**2.** (a) Por eliminação do parâmetro, esboce a trajetória no intervalo de tempo $0 \le t \le 1$ de uma partícula cujas equações paramétricas do movimento são

$$x = \cos(\pi t), \quad y = \operatorname{sen}(\pi t)$$

(b) Indique o sentido do movimento em seu esboço.
(c) Faça uma tabela das coordenadas $x$ e $y$ da partícula nos instantes $t = 0$; 0,25; 0,5; 0,75 e 1.
(d) Marque a posição da partícula sobre a curva nos instantes dados em (c) e rotule essas posições com os valores de $t$.

**3-12** Esboce a curva por eliminação do parâmetro e indique o sentido de $t$ crescente. ■

**3.** $x = 3t - 4, \quad y = 6t + 2$

**4.** $x = t - 3, \quad y = 3t - 7 \quad (0 \le t \le 3)$

**5.** $x = 2\cos t, \quad y = 5\operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

**6.** $x = \sqrt{t}, \quad y = 2t + 4$

**7.** $x = 3 + 2\cos t, \quad y = 2 + 4\operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

**8.** $x = \sec t, \quad y = \operatorname{tg} t \quad (\pi \le t \le 3\pi/2)$

**9.** $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (-\pi/2 \le t \le \pi/2)$

**10.** $x = 4t + 3, \quad y = 16t^2 - 9$

**11.** $x = 2\operatorname{sen}^2 t, \quad y = 3\cos^2 t \quad (0 \le t \le \pi/2)$

**12.** $x = \sec^2 t, \quad y = \operatorname{tg}^2 t \quad (-\pi/2 < t < \pi/2)$

**13-18** Encontre as equações paramétricas da curva e confira seu trabalho gerando a curva com um recurso gráfico. ■

**13.** Um círculo de raio 5, centrado na origem e orientado no sentido horário.

**14.** A parte do círculo $x^2 + y^2 = 1$ que está no terceiro quadrante orientada no sentido anti-horário.

**15.** Uma reta vertical intercectando o eixo $x$ em $x = 2$, orientada para cima.

**16.** A elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$, orientada no sentido anti-horário.

**17.** A parte da parábola $x = y^2$ ligando $(1, -1)$ e $(1, 1)$, orientada de baixo para cima.

**18.** O círculo de raio 4, centrado em $(1, -3)$, orientado no sentido anti-horário.

**19.** (a) Use seu recurso gráfico para gerar a trajetória de uma partícula cujas equações do movimento no intervalo de tempo $0 \le t \le 5$ são

$$x = 6t - \tfrac{1}{2}t^3, \quad y = 1 + \tfrac{1}{2}t^2$$

(b) Faça uma tabela das coordenadas $x$ e $y$ da partícula nos instantes $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
(c) Em que instantes a partícula está sobre o eixo $y$?
(d) Durante qual intervalo de tempo temos $y < 5$ ?
(e) Em que instante a coordenada $x$ da partícula atinge um máximo?

**20.** (a) Use um recurso gráfico para gerar a trajetória de um aviãozinho de papel cujas equações do movimento para $t \ge 0$ são

$$x = t - 2\operatorname{sen} t, \quad y = 3 - 2\cos t$$

(b) Supondo que o avião voe em uma sala na qual o chão está em $y = 0$, explique por que ele não se arrebenta no chão. [Para simplificar, ignore o tamanho físico do avião, tratando-o como uma partícula.]
(c) Qual deve ser a altura do forro da sala para garantir que o avião não toque ou se arrebente nele?

**21-22** Faça o gráfico da equação usando um recurso gráfico. ■

**21.** (a) $x = y^2 + 2y + 1$
(b) $x = \operatorname{sen} y, \ -2\pi \le y \le 2\pi$

**22.** (a) $x = y + 2y^3 - y^5$
(b) $x = \operatorname{tg} y, \ -\pi/2 < y < \pi/2$

## ENFOCANDO CONCEITOS

**23.** Em cada parte, combine as equações paramétricas com uma das curvas rotuladas de (I) a (VI) e explique seu raciocínio.
(a) $x = \sqrt{t}, \ y = \operatorname{sen} 3t$ (b) $x = 2\cos t, \ y = 3\operatorname{sen} t$
(c) $x = t\cos t, \ y = t\operatorname{sen} t$
(d) $x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$
(e) $x = \dfrac{t^3}{1+t^2}, \ y = \dfrac{2t^2}{1+t^2}$
(f) $x = \frac{1}{2}\cos t, \ y = \operatorname{sen} 2t$

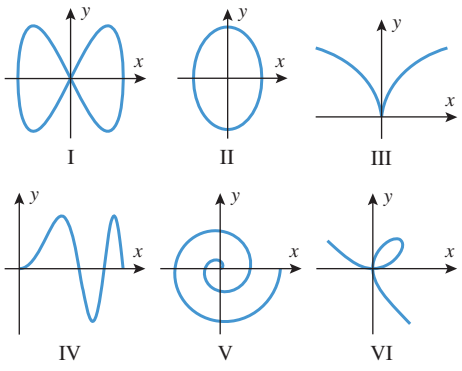



**Figura Ex-23**

**24.** (a) Identifique a orientação das curvas do Exercício 23.
(b) Explique por que a curva paramétrica

$$x = t^2, \quad y = t^4 \quad (-1 \le t \le 1)$$

não tem uma orientação definida.

**25.** (a) Suponha que o segmento de reta do ponto $P(x_0, y_0)$ ao ponto $Q(x_1, y_1)$ seja representado parametricamente por

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \quad y = y_0 + (y_1 - y_0)t \qquad (0 \le t \le 1)$$

e que $R(x, y)$ é o ponto no segmento de reta correspondente a um valor especificado de $t$ (*ver* a figura a seguir). Mostre que $t = r/q$, onde $r$ é a distância de $P$ a $R$ e $q$ é a distância de $P$ a $Q$.

(b) Que valor de $t$ representa o ponto médio entre $P$ e $Q$?
(c) Que valor de $t$ representa o ponto que está a 3/4 do caminho de $P$ a $Q$?

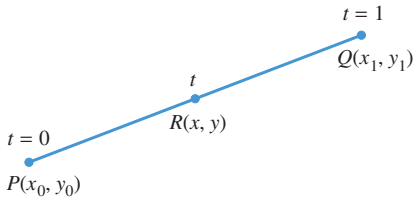



**Figura Ex-25**

**26.** Encontre as equações paramétricas para o segmento de reta que liga os pontos $P(2, -1)$ e $Q(3, 1)$ e use o resultado do Exercício 25 para encontrar:
(a) o ponto médio entre $P$ e $Q$.
(b) o ponto que está a 1/4 do caminho entre $P$ e $Q$.
(c) o ponto que está a 3/4 do caminho entre $P$ e $Q$.

**27.** (a) Mostre que o segmento de reta ligando os pontos $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$ pode ser representado parametricamente por

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}, \qquad (t_0 \le t \le t_1)$$
$$y = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

(b) Qual é o sentido da orientação do segmento?
(c) Encontre as equações paramétricas do segmento de reta traçado de $(3, -1)$ até $(1, 4)$ com $t$ variando de 1 a 2 e confira seu resultado com um recurso gráfico.

**28.** (a) Eliminando o parâmetro, mostre que se $a$ e $c$ não forem nulos, então o gráfico das equações paramétricas

$$x = at + b, \quad y = ct + d \quad (t_0 \le t \le t_1)$$

será um segmento de reta.
(b) Esboce a curva paramétrica

$$x = 2t - 1, \quad y = t + 1 \quad (1 \le t \le 2)$$

e indique o sentido de sua orientação.
(c) O que pode ser dito sobre a reta da parte (a) se $a$ ou $c$ (mas não ambos) for nulo?
(d) Se $a$ e $c$ forem nulos, o que representam as equações?

**29-32** Use um recurso gráfico e equações paramétricas para exibir os gráficos de $f$ e $f^{-1}$ na mesma tela. ■

**29.** $f(x) = x^3 + 0{,}2x - 1, \quad -1 \le x \le 2$

**30.** $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + x, \quad -5 \le x \le 5$

**31.** $f(x) = \cos(\cos 0{,}5x), \quad 0 \le x \le 3$

**32.** $f(x) = x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 6$

**33-36 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**33.** A equação $y = 1 - x^2$ pode ser descrita parametricamente por $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos^2 t$.

**34.** O gráfico das equações paramétricas $x = f(t)$, $y = t$ é a reflexão do gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo $x$.

**35.** A derivada de $y$ em relação a $x$ da curva paramétrica $x = x(t)$, $y = 3t^4 - 2t^3$ pode ser dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12t^3 - 6t^2}{x'(t)}$$

**36.** A curva representada pelas equações paramétricas

$$x = t^3, \quad y = t + t^6 \quad (-\infty < t < +\infty)$$

é côncava para baixo com $t < 0$.

**37.** As curvas paramétricas podem ser definidas por partes, usando fórmulas diferentes para diferentes valores do parâmetro. Esboce a curva que é representada por partes pelas equações paramétricas.

$$\begin{cases} x = 2t, \quad y = 4t^2 & \left(0 \le t \le \frac{1}{2}\right) \\ x = 2 - 2t, \quad y = 2t & \left(\frac{1}{2} \le t \le 1\right) \end{cases}$$

**38.** Encontre as equações paramétricas para o retângulo da figura abaixo, supondo que ele é traçado no sentido anti-horário quando $t$ varia de 0 a 1, começando em $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ quando $t = 0$. [*Sugestão*: Represente o retângulo por partes, fazendo $t$ variar de 0 até $\frac{1}{4}$ no primeiro lado, de $\frac{1}{4}$ até $\frac{1}{2}$ no segundo e assim por diante.]

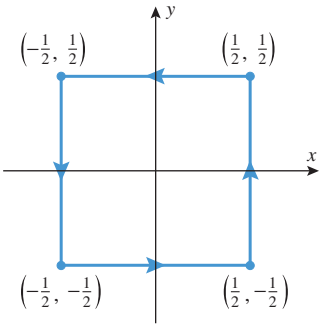



**Figura Ex-38**

**39.** (a) Encontre as equações paramétricas da elipse centrada na origem e com os cortes nos eixos dados por (4, 0),(−4, 0), (0, 3) e (0, −3).
(b) Encontre as equações paramétricas da elipse que resulta transladando a elipse de (a) de forma que seu centro esteja em (−1, 2).
(c) Confirme seus resultados de (a) e (b) usando um recurso gráfico.

**40.** Iremos mostrar, mais adiante no livro, que se um projétil é disparado ao nível do solo, com uma velocidade inicial de $v_0$ metros por segundo, a um ângulo $\alpha$ com a horizontal, e sendo desprezada a resistência do ar, então sua posição após $t$ segundos do lançamento, em relação ao sistema de coordenadas da figura abaixo é:

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

onde $g \approx 9{,}8$ m/s$^2$.
(a) Mostre que a trajetória é uma parábola por meio da eliminação do parâmetro.
(b) Esboce a trajetória quando $\alpha = 30°$ e $v_0 = 1.000$ m/s.
(c) Usando a trajetória esboçada em (*b*) quão alto o projétil sobe?

(d) Usando a trajetória esboçada em (*b*), quanto o projétil viaja horizontalmente?

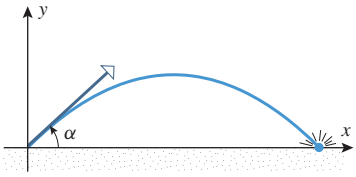



**Figura Ex-40**

## ENFOCANDO CONCEITOS

**41.** (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva paramétrica $x = t/2$, $y = t^2 + 1$ em $t = -1$ e $t = 1$ sem eliminar o parâmetro.
(b) Verifique suas respostas da parte (a) eliminando o parâmetro e diferenciando uma função apropriada de $x$.

**42.** (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva paramétrica $x = 3\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$ em $t = \pi/4$ e $t = 7\pi/4$ sem eliminar o parâmetro.
(b) Verifique suas respostas da parte (a) eliminando o parâmetro e diferenciando uma função apropriada de $x$.

**43.** Para a curva paramétrica do Exercício 1, faça uma conjectura sobre o sinal de $d^2y/dx^2$ em $t = -1$ e $t = 1$ e confirme sua conjectura sem eliminar o parâmetro.

**44.** Para a curva paramétrica do Exercício 2, faça uma conjectura sobre o sinal de $d^2y/dx^2$ em $t = \pi/4$ e $t = 7\pi/4$ e confirme sua conjectura sem eliminar o parâmetro.

**45-50** Encontre $dy/dx$ e $d^2y/dx^2$ no ponto dado sem eliminar o parâmetro. ■

**45.** $x = \sqrt{t}$, $y = 2t + 4$; $t = 1$

**46.** $x = \frac{1}{2}t^2 + 1$, $y = \frac{1}{3}t^3 - t$; $t = 2$

**47.** $x = \sec t$, $y = \operatorname{tg} t$; $t = \pi/3$

**48.** $x = \operatorname{senh} t$, $y = \cosh t$; $t = 0$

**49.** $x = \theta + \cos\theta$, $y = 1 + \operatorname{sen}\theta$; $\theta = \pi/6$

**50.** $x = \cos\phi$, $y = 3\operatorname{sen}\phi$; $\phi = 5\pi/6$

**51.** (a) Encontre a equação da reta tangente à curva

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}$$

em $t = 1$, sem eliminar o parâmetro.
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a) eliminando o parâmetro.

**52.** (a) Encontre a equação da reta tangente à curva

$$x = 2t + 4, \quad y = 8t^2 - 2t + 4$$

em $t = 1$, sem eliminar o parâmetro.
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a) eliminando o parâmetro.

**53-54** Encontre todos valores de $t$ nos quais a curva paramétrica tem (a) uma reta tangente horizontal e (b) uma reta tangente vertical. ■

**53.** $x = 2\operatorname{sen} t$, $y = 4\cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$

**54.** $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 7$, $y = t^2 + t + 1$

**55.** Em meados da década de 1850, em seu estudo sobre oscilações que combinam dois movimentos senoidais perpendiculares, o físico francês Jules Antoine Lissajous (1822-1880) ficou interessado nas equações paramétricas da forma

$$x = \operatorname{sen} at, \quad y = \operatorname{sen} bt$$

Se $a/b$ for um número racional, então o efeito combinado das oscilações será um movimento periódico ao longo de uma trajetória denominada ***curva de Lissajous***.
(a) Use um recurso computacional para gerar o gráfico completo das curvas de Lissajous correspondentes a $a = 1$, $b = 2$; $a = 2$, $b = 3$; $a = 3$, $b = 4$ e $a = 4$, $b = 5$.
(b) A curva de Lissajous

$$x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} 2t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

cruza-se na origem (veja Figura Ex-55). Encontre as equações das duas retas tangentes na origem.

**56.** Conforme mostra a figura abaixo, a ***cicloide alongada***

$$x = 2 - \pi\cos t, \quad y = 2t - \pi\operatorname{sen} t \quad (-\pi \le t \le \pi)$$

cruza a si mesma em um ponto do eixo $x$. Encontre equações para as duas retas tangentes nesse ponto.

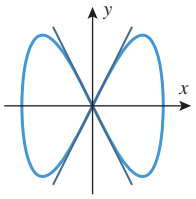



**Figura Ex-55**

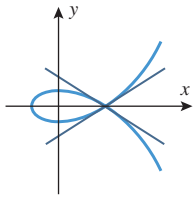



**Figura Ex-56**

**57.** Mostre que a curva $x = t^2$, $y = t^3 - 4t$ cruza a si mesma no ponto (4, 0) e encontre equações das duas retas tangentes à curva no ponto de interseção.

**58.** Mostre que a curva com equações paramétricas

$$x = t^2 - 3t + 5, \quad y = t^3 + t^2 - 10t + 9$$

cruza a si mesma no ponto (3, 1) e encontre equações das duas retas tangentes à curva no ponto de interseção.

**59.** (a) Usando um recurso computacional, gere o gráfico da curva paramétrica

$$x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

e faça uma conjectura sobre os valores de $t$ nos quais ocorrem pontos singulares.
(b) Confirme sua conjectura da parte (a) calculando as derivadas apropriadas.

**60.** Verifique que a cicloide descrita pela Fórmula (10) tem cúspides nos pontos de corte com o eixo $x$ e retas tangentes horizontais nos pontos médios entre dois cortes adjacentes com o eixo $x$ (veja a Figura 10.1.14).

**61.** (a) Qual é a inclinação da reta tangente no instante $t$ à trajetória do avião de papel do Exemplo 5?
(b) Qual foi, aproximadamente, o ângulo de inclinação do avião quando bateu na parede?

**62.** Suponha que uma abelha percorra a trajetória

$$x = t - 2\cos t, \quad y = 2 - 2\operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 10)$$

(a) Em quais instantes a abelha estava voando horizontalmente?
(b) Em quais instantes a abelha estava voando verticalmente?

**63.** Considere a família de curvas descritas pelas equações paramétricas

$$x = a\cos t + h, \quad y = b\operatorname{sen} t + k \quad (0 \le t < 2\pi)$$

em que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Descreva as curvas dessa família se
(a) $h$ e $k$ forem fixados, mas $a$ e $b$ puderem variar.
(b) $a$ e $b$ forem fixados, mas $h$ e $k$ puderem variar.
(c) $a = 1$ e $b = 1$, mas $h$ e $k$ variam com $h = k + 1$.

**64.** (a) Use um recurso gráfico para estudar como as curvas da família

$$x = 2a\cos^2 t, \quad y = 2a\cos t \operatorname{sen} t \quad (-2\pi < t < 2\pi)$$

variam quando $a$ varia de 0 a 5.
(b) Confirme suas conclusões algebricamente.
(c) Escreva um parágrafo curto descrevendo suas conclusões.

**65-70** Encontre o comprimento de arco exato da curva dada no intervalo indicado. ■

**65.** $x = t^2, \quad y = \frac{1}{3}t^3 \quad (0 \le t \le 1)$

**66.** $x = \sqrt{t} - 2, \quad y = 2t^{3/4} \ (1 \le t \le 16)$

**67.** $x = \cos 3t, \quad y = \operatorname{sen} 3t \quad (0 \le t \le \pi)$

**68.** $x = \operatorname{sen} t + \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t - \cos t \quad (0 \le t \le \pi)$

**69.** $x = e^{2t}(\operatorname{sen} t + \cos t), \quad y = e^{2t}(\operatorname{sen} t - \cos t) \ (-1 \le t \le 1)$

**70.** $x = 2 \operatorname{arc\,sen} t, \quad y = \ln(1 - t^2) \quad (0 \le t \le \frac{1}{2})$

**71.** (a) Use as equações paramétricas na Fórmula (9) para mostrar que o comprimento $L$ de um arco de uma cicloide é dado pela integral

$$L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta$$

(b) Use um CAS para mostrar que $L$ é 8 vezes o raio da roda que gera a cicloide (veja a figura a seguir).

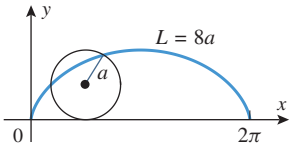



**Figura Ex-71**

**72.** Use as equações paramétricas na Fórmula (10) para verificar que a cicloide fornece uma solução da equação diferencial

$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) y = 2a$$

em que $a$ é uma constante positiva.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**73.** Uma atração de um parque de diversões ilustrada na figura a seguir consiste em dois braços rotativos conectados de comprimento 1: um braço interno que gira no sentido anti-horário a 1 radiano por segundo e um braço externo que pode ser programado para rodar tanto no sentido horário a 2 radianos por segundo (a volta mexida) quanto no sentido anti-horário a 2 radianos por segundo (a volta calipso). O centro da gaiola do passageiro está na extremidade do braço externo.
(a) Mostre que, na volta mexida, o centro da gaiola tem equações paramétricas

$$x = \cos t + \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$$

(b) Encontre equações paramétricas para o centro da gaiola na volta calipso e use um recurso gráfico para confirmar que o centro da gaiola descreve a curva mostrada na figura.
(c) Será que um passageiro percorre a mesma distância em uma revolução na volta calipso que em uma revolução na volta mexida? Justifique sua conclusão.

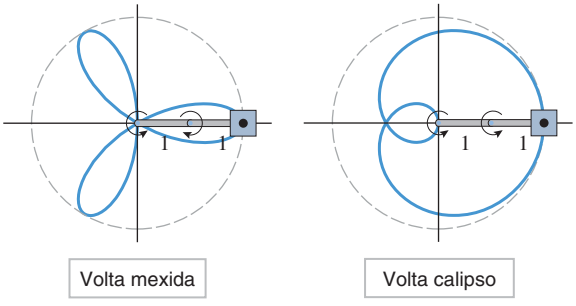



**Figura Ex-73**

**74.** (a) Se uma corda for desenrolada de um círculo fixado mantendo-a tensa (isto é, tangente ao círculo), então a extremidade da corda descreve uma curva denominada ***involuta de um círculo***. Mostre que, se o círculo tiver centro na origem e raio $a$ e a extremidade da corda estiver inicialmente no ponto $(a, 0)$, a involuta pode ser expressa parametricamente como

$$x = a(\cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta), \quad y = a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$

onde $\theta$ é o ângulo mostrado na parte $(a)$ da figura a seguir.
(b) Supondo que um cachorro na parte $(b)$ da figura abaixo desenrole sua correia mantendo-a tensa, para quais valores de $\theta$ no intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$ o cachorro estará andando na direção Norte? Sul? Leste? Oeste?
(c) Use um recurso gráfico computacional para gerar a curva traçada pelo cachorro e mostre que ela está de acordo com a sua resposta na parte (b).

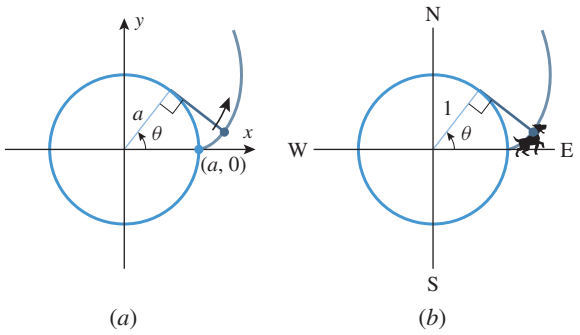



**Figura Ex-74**

**75-80** Se $f'(t)$ e $g'(t)$ forem funções contínuas e se nenhum segmento da curva

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (a \le t \le b)$$

for traçado mais do que uma vez, então pode ser mostrado que a área da superfície gerada pela revolução dessa curva em torno do eixo $x$ é

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

e a área da superfície gerada pela revolução dessa curva em torno do eixo $y$ é

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

[As deduções são análogas às usadas para obter as Fórmulas (4) e (5) na Seção 6.5, do Volume 1.] Use essas fórmulas nestes exercícios. ■

**75.** Determine a área da superfície gerada fazendo girar a curva $x = t^2$, $y = 3t$ $(0 \le t \le 2)$ em torno do eixo $x$.

**76.** Determine a área da superfície gerada fazendo girar a curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ em torno do eixo $x$.

**77.** Determine a área da superfície gerada fazendo girar a curva $x = \cos^2 t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ em torno do eixo $y$.

**78.** Determine a área da superfície gerada fazendo girar a curva $x = 6t$, $y = 4t^2$ $(0 \le t \le 1)$ em torno do eixo $y$.

**79.** Fazendo girar o semicírculo

$$x = r\cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le \pi)$$

em torno do eixo $x$, mostre que a área da superfície de uma esfera de raio $r$ é $4\pi r^2$.

**80.** As equações

$$x = a\phi - a \operatorname{sen} \phi,\ y = a - a\cos\phi \quad (0 \le \phi \le 2\pi)$$

representam um arco de uma cicloide. Mostre que a área da superfície gerada pela revolução dessa curva em torno do eixo $x$ é dada por $S = 64\pi a^2/3$.

**81.** **Texto** Consulte alguma obra de referência apropriada e escreva um ensaio sobre o matemático norte-americano Nathaniel Bowditch (1773-1838) e suas investigações relativas às ***curvas de Bowditch*** (mais conhecidas como curvas de Lissajous; ver Exercício 55).

**82.** **Texto** Quais são algumas das vantagens de expressar uma curva parametricamente em vez de no formato $y = f(x)$?

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.1

**1.** $x = 3 + 2\cos t$, $y = 5 + 2 \operatorname{sen} t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ **2.** $\frac{3}{4}$; 2,75 **3.** $x = f(1 - t)$, $y = g(1 - t)$ **4.** $\dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

**5.** $\displaystyle\int_1^{\pi} \sqrt{(1/t)^2 + \cos^2 t}\, dt$

# 10.2 COORDENADAS POLARES

*Até agora, especificamos a localização de um ponto no plano por meio de suas coordenadas relativas a dois eixos perpendiculares. Porém, às vezes, um ponto em movimento tem uma afinidade especial com algum ponto fixo, tal como um planeta em uma órbita sob a atração central do Sol. Nesses casos, a trajetória da partícula fica mais bem descrita por sua direção angular e sua distância de um ponto fixo. Nesta seção, discutiremos um novo tipo de sistema de coordenadas, que é baseado nessa ideia.*

## ■ SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Um ***sistema de coordenadas polares*** em um plano consiste em um ponto $O$ fixo, chamado de ***polo*** (ou ***origem***) e de um raio que parte do polo, chamado de ***eixo polar***. Em tal sistema de coordenadas, podemos associar a cada ponto $P$ no plano um par de ***coordenadas polares*** $(r, \theta)$, onde $r$ é a distância de $P$ ao polo e $\theta$ é o ângulo entre o eixo polar e o raio $OP$ (Figura 10.2.1). O número

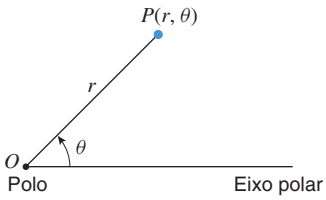



**Figura 10.2.1**

$r$ é chamado de ***coordenada radial*** de $P$, enquanto que $\theta$ é a ***coordenada angular*** (ou ***ângulo polar***) de $P$. Na Figura 10.2.2, os pontos $(6, \pi/4)$, $(5, 2\pi/3)$, $(3, 5\pi/4)$ e $(4, 11\pi/6)$ estão plotados em um sistema de coordenadas polares. Se $P$ for o polo, então $r = 0$, mas nesse caso não há uma definição clara do ângulo polar. Vamos convencionar que qualquer ângulo possa ser usado nesse caso; isto é, $(0, \theta)$ são as coordenadas polares do polo com qualquer escolha de $\theta$.

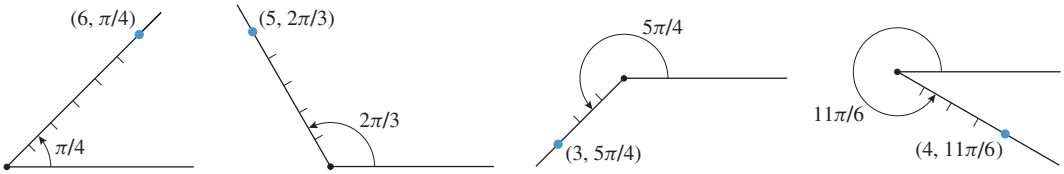



**Figure 10.2.2**

As coordenadas polares de um ponto não são únicas. Por exemplo, as coordenadas polares

$$(1, 7\pi/4), \quad (1, -\pi/4) \quad \text{e} \quad (1, 15\pi/4)$$

representam todas o mesmo ponto (Figura 10.2.3).

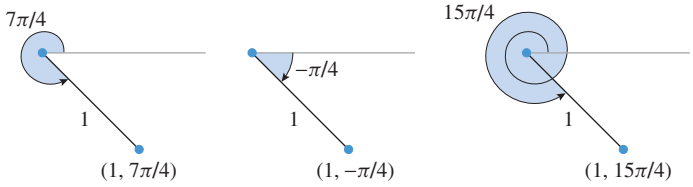



**Figura 10.2.3**

Em geral, se um ponto $P$ tiver coordenadas polares $(r, \theta)$, então

$$(r, \theta + 2n\pi) \quad \text{e} \quad (r, \theta - 2n\pi)$$

também são coordenadas polares de $P$ com qualquer $n$ inteiro não negativo. Assim, todo ponto tem uma infinidade de coordenadas polares.

Conforme definido acima, a coordenada radial $r$ de um ponto $P$ é não negativa, pois representa a distância de $P$ ao polo. No entanto, seria conveniente que $r$ pudesse ser negativo. Para motivar uma definição apropriada, seja $P$ o ponto com coordenadas polares $(3, 5\pi/4)$. De acordo com a Figura 10.2.4, podemos atingir este ponto rodando o eixo polar por um ângulo de $5\pi/4$ e movendo-se 3 unidades a partir do polo ao longo do lado final do ângulo; ou, então, podemos atingir $P$ rodando o eixo polar por um ângulo de $\pi/4$ e movendo-se 3 unidades a partir do polo ao longo da extensão do lado final. Isso sugere que o ponto $(3, 5\pi/4)$ também possa ser denotado por $(-3, \pi/4)$, onde o sinal de menos serve para indicar que o ponto está sobre a *extensão* do lado final do ângulo, em vez de estar no próprio lado final do ângulo.

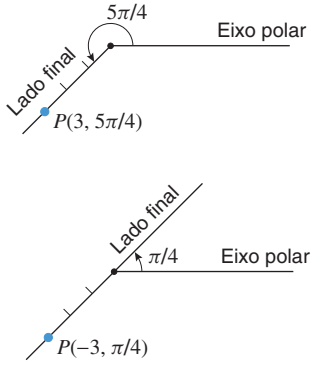



**Figura 10.2.4**

Em geral, o lado final de um ângulo de $\theta + \pi$ é a extensão do lado final de $\theta$, portanto definimos as coordenadas radiais negativas convencionando que

$$(-r, \theta) \quad \text{e} \quad (r, \theta + \pi)$$

são coordenadas polares do mesmo ponto.

## RELAÇÕES ENTRE COORDENADAS POLARES E RETANGULARES

É frequentemente útil sobrepor ao sistema de coordenadas polares um sistema de coordenadas retangulares $xy$ de tal forma que o eixo $x$ positivo coincida com o eixo polar. Se isso for feito, cada ponto $P$ terá coordenadas retangulares $(x, y)$, bem como coordenadas

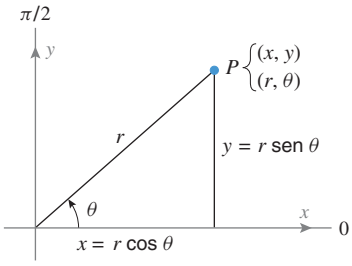



**Figura 10.2.5**

polares $(r, \theta)$. Conforme sugere a Figura 10.2.5, essas coordenadas estão relacionadas pelas equações

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{1}$$

Essas equações permitem encontrar $x$ e $y$ quando forem dados $r$ e $\theta$. Entretanto, para encontrar $r$ e $\theta$ a partir de $x$ e $y$, é preferível usar as identidades $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ e $\text{tg}\,\theta = \text{sen}\,\theta/\cos\theta$ para reescrever (1) como

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \tag{2}$$

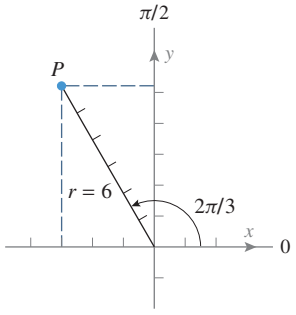



**Figura 10.2.6**

**▶ Exemplo 1** Encontre as coordenadas retangulares do ponto $P$ cujas coordenadas polares são $(6, 2\pi/3)$ (Figura 10.2.6).

***Solução*** Substituindo as coordenadas polares $r = 6$ e $\theta = 2\pi/3$ em (1), obtemos

$$x = 6\cos\frac{2\pi}{3} = 6\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$y = 6\sin\frac{2\pi}{3} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

Portanto, as coordenadas retangulares de $P$ são $(-3, 3\sqrt{3})$. ◀

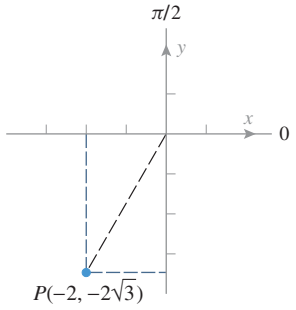



**Figura 10.2.7**

**▶ Exemplo 2** Encontre as coordenadas polares do ponto $P$ cujas coordenadas retangulares são $(-2, -2\sqrt{3})$ (Figura 10.2.7).

***Solução*** Vamos encontrar as coordenadas polares $(r, \theta)$ de $P$ que satisfazem as condições $r > 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$. Da primeira equação em (2),

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16$$

logo, $r = 4$. Da segunda equação em (2),

$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$$

Disso e do fato de $(-2, -2\sqrt{3})$ estar no segundo quadrante, tem-se que o ângulo que satisfaz $0 \le \theta < 2\pi$ é $\theta = 4\pi/3$. Assim, as coordenadas polares de $P$ são $(4, 4\pi/3)$. Todas as demais coordenadas polares de $P$ podem ser expressas como

$$\left(4, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi\right) \quad \text{ou} \quad \left(-4, \frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$$

onde $n$ é um inteiro. ◀

## GRÁFICOS EM COORDENADAS POLARES

Consideremos agora o problema de traçar o gráfico de equações em $r$ e $\theta$, nas quais supomos que $\theta$ seja medido em radianos. Alguns exemplos de tais equações são

$$r = 1, \quad \theta = \pi/4, \quad r = \theta, \quad r = \text{sen}\,\theta, \quad r = \cos 2\theta$$

Em um sistema de coordenadas retangulares, o gráfico de uma equação em $x$ e $y$ consiste em todos os pontos cujas coordenadas $(x, y)$ satisfazem a equação. Em coordenadas polares, porém, os pontos têm um número infinito de coordenadas, de modo que um dado ponto pode ter algumas coordenadas polares que satisfazem uma equação, enquanto que outras não. Dada

uma equação em $r$ e $\theta$, definimos o ***gráfico em coordenadas polares*** dessa equação como todos os pontos nos quais *pelo menos um* par de coordenadas $(r, \theta)$ satisfaz a equação.

**► Exemplo 3** Esboce os gráficos de

$$\text{(a) } r = 1 \qquad \text{(b) } \theta = \frac{\pi}{4}$$

em coordenadas polares.

***Solução (a)*** Dado qualquer valor de $\theta$, o ponto $(1, \theta)$ está a uma unidade do polo. Como $\theta$ é arbitrário, o gráfico é um círculo de raio 1 com centro no polo (Figura 10.2.8*a*).

***Solução (b)*** Dado qualquer valor de $r$, o ponto $(r, \pi/4)$ está sobre uma reta que faz um ângulo de $\pi/4$ com o eixo polar. (Figura 10.2.8*b*). Valores positivos de $r$ correspondem a pontos sobre a reta no primeiro quadrante, enquanto que valores negativos de $r$ correspondem a pontos no terceiro quadrante. Assim, sem nenhuma restrição sobre $r$, o gráfico é a reta toda. Observe, contudo, que imposta a condição $r \geq 0$, o gráfico será, então, somente o raio no primeiro quadrante. ◄

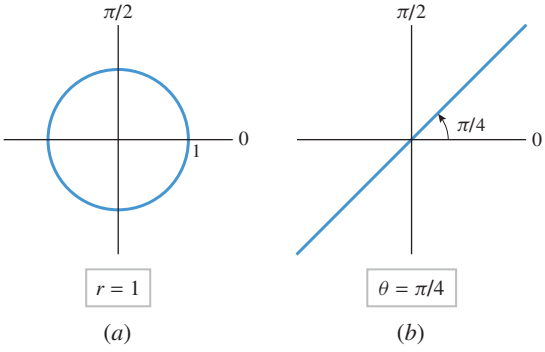



**Figura 10.2.8**

Especialmente importantes são as equações $r = f(\theta)$ que expressam $r$ como função de $\theta$. Uma maneira de fazer o gráfico de tal equação é escolher alguns valores típicos de $\theta$, calcular os correspondentes valores de $r$ e, então, esboçar os pares $(r, \theta)$ resultantes em um sistema de coordenadas polares. Os próximos dois exemplos ilustram esse processo.

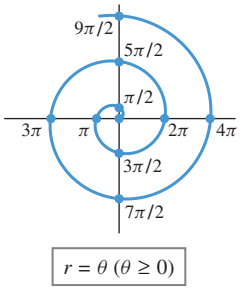



**Figura 10.2.9**

**► Exemplo 4** Esboce o gráfico de $r = \theta$ $(\theta \geq 0)$ em coordenadas polares plotando pontos escolhidos.

***Solução*** Observe que $\theta$ cresce à medida que $r$ cresce; assim, o gráfico é uma curva que se afasta em espiral do polo quando $\theta$ cresce. Um esboço razoavelmente preciso da espiral pode ser obtido plotando os pontos que correspondam a valores de $\theta$ que sejam múltiplos de $\pi/2$, lembrando que o valor de $r$ é sempre igual ao valor de $\theta$ (Figura 10.2.9). ◄

Faça o gráfico da espiral $r = \theta$ $(\theta \leq 0)$. Compare seu gráfico com o da Figura 10.2.9.

**► Exemplo 5** Esboce o gráfico da equação $r = \text{sen } \theta$ em coordenadas polares plotando pontos.

***Solução*** A Tabela 10.2.1 mostra as coordenadas de pontos do gráfico com incrementos de $\pi/6$.

Esses pontos estão plotados na Figura 10.2.10. Observe que, no entanto, há 13 pontos na tabela, mas somente 6 pontos distintos foram plotados. Isso ocorre porque os pares a par-

tir de $\theta = \pi$ resultam em duplicatas dos pontos precedentes. Por exemplo, $(-1/2, 7\pi/6)$ e $(1/2, \pi/6)$ representam o mesmo ponto. ◄

**Tabela 10.2.1**

| $\theta$ (radianos) | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r = \operatorname{sen}\theta$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $(r, \theta)$ | $(0, 0)$ | $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ | $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ | $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ | $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ | $\left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ | $(0, \pi)$ | $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$ | $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4\pi}{3}\right)$ | $\left(-1, \frac{3\pi}{2}\right)$ | $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$ | $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$ | $(0, 2\pi)$ |

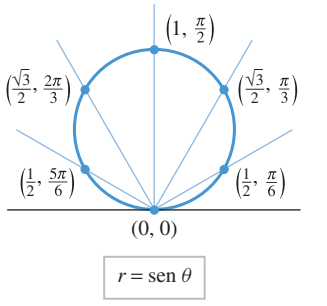



**Figura 10.2.10**

Observe que os pontos da Figura 10.2.10 aparentam estar dispostos em um círculo. Podemos confirmar isso expressando a equação polar $r = \operatorname{sen}\theta$ em termos de $x$ e $y$. Para isso, multiplicamos por $r$ a equação, obtendo

$$r^2 = r\operatorname{sen}\theta$$

o que, a partir das Fórmulas (1) e (2), pode ser reescrito como

$$x^2 + y^2 = y$$

Reescrevendo essa equação como $x^2 + y^2 - y = 0$ e completando o quadrado, obtemos

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

que é um círculo de centro $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e raio $\frac{1}{2}$ no plano $xy$.

Muitas vezes, é útil ver a equação $r = f(\theta)$ como uma equação em coordenadas retangulares (em vez de polares) e traçar seu gráfico em um sistema de coordenadas $\theta r$. Por exemplo, a Figura 10.2.11 mostra o gráfico de $r = \operatorname{sen}\theta$ em coordenadas retangulares $\theta r$. Esse gráfico realmente pode ajudar a visualizar como foi gerado o gráfico polar da Figura 10.2.10:

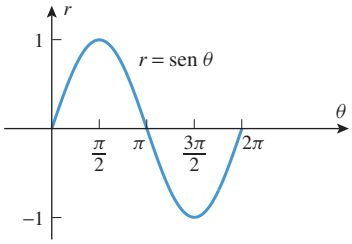



**Figura 10.2.11**

- Em $\theta = 0$, temos $r = 0$, o que corresponde ao polo $(0, 0)$ do gráfico polar.
- À medida que $\theta$ varia de 0 a $\pi/2$, o valor de $r$ cresce de 0 para 1, logo o ponto $(r, \theta)$ move-se ao longo do círculo do polo ao ponto no alto, em $(1, \pi/2)$.
- À medida que $\theta$ varia de $\pi/2$ até $\pi$, o valor de $r$ decresce de 1 para 0, logo o ponto $(r, \theta)$ move-se ao longo do círculo desde o ponto mais alto de volta ao polo.
- À medida que $\theta$ varia de $\pi$ a $3\pi/2$, os valores de $r$ são negativos, variando de 0 até $-1$. Assim, o ponto $(r, \theta)$ move-se ao longo do círculo do polo ao ponto mais alto em $(1, \pi/2)$, que é o mesmo que $(-1, 3\pi/2)$. Isso duplica o movimento que ocorreu em $0 \le \theta \le \pi/2$.
- À medida que $\theta$ varia de $3\pi/2$ a $2\pi$, o valor de $r$ varia de $-1$ a 0. Assim, o ponto $(r, \theta)$ move-se ao longo do círculo do ponto mais alto para o polo, duplicando o movimento que ocorreu em $\pi/2 \le \theta \le \pi$.

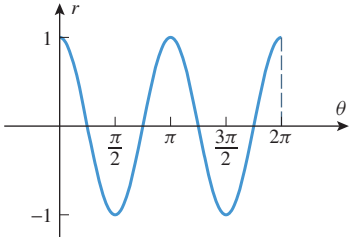
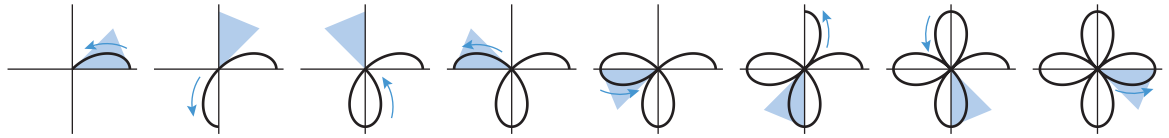



**Figura 10.2.12**

► **Exemplo 6** Esboce o gráfico de $r = \cos 2\theta$ em coordenadas polares.

***Solução*** Em vez de esboçar pontos, vamos usar o gráfico de $r = \cos 2\theta$ em coordenadas retangulares (Figura 10.2.12) para visualizar como é gerado o gráfico polar dessa equação. A análise e o gráfico polar resultantes estão mostrados na Figura 10.2.13. Essa curva é chamada de *rosácea de quatro pétalas*. ◄



| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ varia de 1 a 0 quando $\theta$ varia de 0 a $\pi/4$. | $r$ varia de 0 a $-1$ quando $\theta$ varia de $\pi/4$ a $\pi/2$. | $r$ varia de $-1$ a 0 quando $\theta$ varia de $\pi/2$ a $3\pi/4$. | $r$ varia de 0 a 1 quando $\theta$ varia de $3\pi/4$ a $\pi$. | $r$ varia de 1 a 0 quando $\theta$ varia de $\pi$ a $5\pi/4$. | $r$ varia de 0 a $-1$ quando $\theta$ varia de $5\pi/4$ a $3\pi/2$. | $r$ varia de $-1$ a 0 quando $\theta$ varia de $3\pi/2$ a $7\pi/4$. | $r$ varia de 0 a 1 quando $\theta$ varia de $7\pi/4$ a $2\pi$. |

**Figura 10.2.13**

## TESTES DE SIMETRIA

Observe que o gráfico polar de $r = \cos 2\theta$, na Figura 10.2.13, é simétrico em relação aos eixos $x$ e $y$. Essa simetria poderia ter sido antecipada a partir do seguinte teorema, sugerido pela Figura 10.2.14 (omitiremos a prova).

**10.2.1 TEOREMA** ***(Testes de Simetria)***

(*a*) *Uma curva em coordenadas polares é simétrica em relação ao eixo x se, substituindo $\theta$ por $-\theta$, obtivermos uma equação equivalente* (*Figura 10.2.14a*).

(*b*) *Uma curva em coordenadas polares é simétrica em relação ao eixo y se, substituindo $\theta$ por $\pi - \theta$, obtivermos uma equação equivalente* (*Figura 10.2.14b*).

(*c*) *Uma curva em coordenadas polares é simétrica em relação à origem se, substituindo $\theta$ por $\theta + \pi$, ou substituindo r por $-r$, obtivermos uma equação equivalente* (*Figura 10.2.14c*).

A recíproca de cada parte do Teorema 10.2.1 é falsa. Veja o Exercício 79.

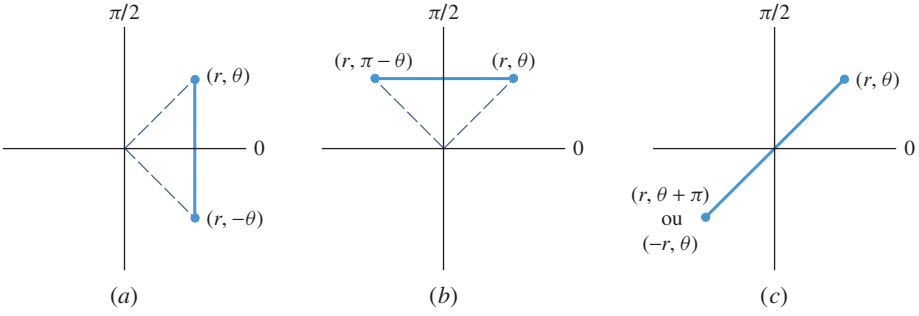



**Figura 10.2.14**

► **Exemplo 7** Use o Teorema 10.2.1 para confirmar que o gráfico de $r = \cos 2\theta$ na Figura 10.2.13 é simétrico em relação aos eixos $x$ e $y$.

Um gráfico que é simétrico em relação a ambos os eixos, $x$ e y, também é simétrico em relação à origem. Use o Teorema 10.2.1(*c*) para verificar que a curva do Exemplo 7 é simétrica em relação à origem.

***Solução*** Para testar a simetria em relação ao eixo $x$, substituimos $\theta$ por $-\theta$. Disso resulta

$$r = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$$

Assim, a equação não se modifica quando substituimos $\theta$ por $-\theta$.

Para testar a simetria em relação ao eixo $y$, substituímos $\theta$ por $\pi - \theta$. Disso resulta

$$r = \cos 2(\pi - \theta) = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$$

Assim, a equação não se modifica quando substituimos $\theta$ por $\pi - \theta$. ◄

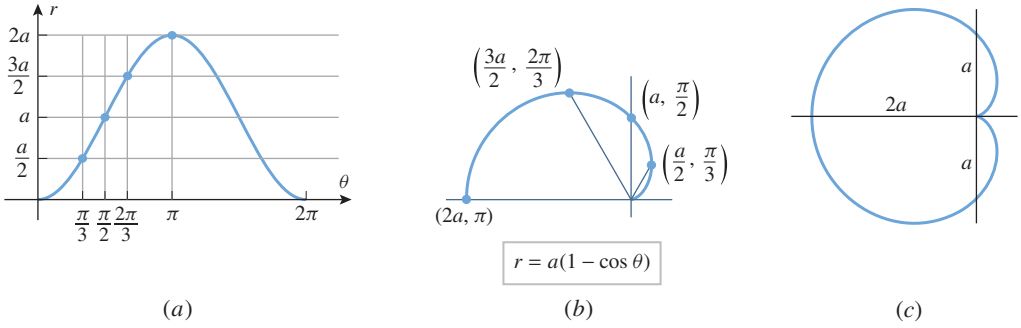
**► Exemplo 8** Esboce o gráfico de $r = a(1 - \cos\theta)$ em coordenadas polares, supondo que $a$ seja uma constante positiva.

***Solução*** Observe primeiramente que, trocando $\theta$ por $-\theta$, não alteramos a equação, portanto sabemos antecipadamente que o gráfico é simétrico em relação ao eixo polar. Fazendo, então, a parte superior do gráfico da curva, a inferior pode ser obtida por reflexão pelo eixo polar.

Como no exemplo anterior, vamos primeiro fazer o gráfico em coordenadas retangulares. Esse gráfico, mostrado na Figura 10.2.15*a,* pode ser obtido reescrevendo a equação dada como $r = a - a\cos\theta$. Esse gráfico em coordenadas retangulares $\theta r$ pode ser obtido refletindo o gráfico de $r = a\cos\theta$ pelo eixo $x$ para obter o gráfico de $r = -a\cos\theta$ e, a seguir, transladando o gráfico $a$ unidades para obter o gráfico de $r = a - a\cos\theta$. Podemos, agora, ver que:

- Quando $\theta$ varia de 0 a $\pi/3$, $r$ cresce de 0 até $a/2$.
- Quando $\theta$ varia de $\pi/3$ a $\pi/2$, $r$ cresce de $a/2$ até $a$.
- Quando $\theta$ varia de $\pi/2$ a $2\pi/3$, $r$ cresce de $a$ até $3a/2$.
- Quando $\theta$ varia de $2\pi/3$ a $\pi$, $r$ cresce de $3a/2$ até $2a$.

Isso produz a curva polar mostrada na Figura 10.2.15*b*. O restante da curva pode ser obtido continuando a análise precedente de $\pi$ até $2\pi$, ou, conforme observado anteriormente, refletindo pelo eixo $x$ a parte já feita (Figura 10.2.15*c*). Essa curva em forma de coração é denominada ***cardioide*** (a palavra grega *kardia* significa "coração"). ◄




(*a*) (*b*) (*c*)

**Figura 10.2.15**

**► Exemplo 9** Esboce o gráfico de $r^2 = 4\cos 2\theta$ em coordenadas polares.

***Solução*** Essa equação não expressa $r$ como uma função de $\theta$, uma vez que, resolvendo para $r$ em termos de $\theta$, obtemos duas funções:

$$r = 2\sqrt{\cos 2\theta} \quad \text{e} \quad r = -2\sqrt{\cos 2\theta}$$

Desse modo, para obter o gráfico da equação $r^2 = 4\cos 2\theta$, devemos fazer separadamente o gráfico dessas duas funções e, então, combiná-los.

Vamos começar com o gráfico de $r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$. Observe primeiramente que essa equação não muda se substituirmos $\theta$ por $-\theta$ ou se substituirmos $\theta$ por $\pi - \theta$. Assim, o gráfico é simétrico em relação aos eixos $x$ e $y$. Isso significa que todo o gráfico pode ser obtido fazendo-se o gráfico da parte no primeiro quadrante, refletindo-se essa parte pelo eixo $y$ para obter a parte no segundo quadrante e refletindo-se, então, essas duas partes pelo eixo $x$ para obter as partes no terceiro e quarto quadrantes.

Para começar a análise, vamos fazer o gráfico da equação $r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$ em coordenadas retangulares $\theta r$ (ver Figura 10.2.16*a*). Observe que há falhas no gráfico nos intervalos $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$ e $5\pi/4 < \theta < 7\pi/4$, pois cos $2\theta$ torna-se negativo para esses valores de $\theta$. A partir desse gráfico, vemos que:

- À medida que $\theta$ varia de 0 a $\pi/4$, $r$ decresce de 2 para 0.
- À medida que $\theta$ varia de $\pi/4$ a $\pi/2$, não são gerados pontos no gráfico polar.

Isso dá a parte do gráfico mostrada na Figura 10.2.16*b*. Conforme observado anteriormente, podemos completar o gráfico por uma reflexão pelo eixo $y$ seguida de uma reflexão pelo eixo $x$ (Figura 10.2.16*c*). O gráfico resultante em formato de hélice é denominado ***lemniscata*** (da palavra grega *lemniscos*, para um laço de fita que se parece com o número oito). Deixamos a cargo do leitor verificar que a equação $r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$ tem o mesmo gráfico que $r = -2\sqrt{\cos 2\theta}$, porém traçado de forma diagonalmente oposta. Assim, o gráfico da equação $r^2 = 4 \cos 2\theta$ consiste em duas lemniscatas idênticas sobrepostas. ◀

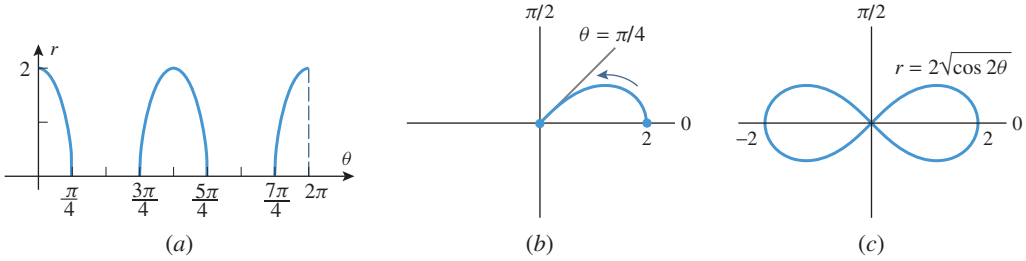



**Figura 10.2.16**

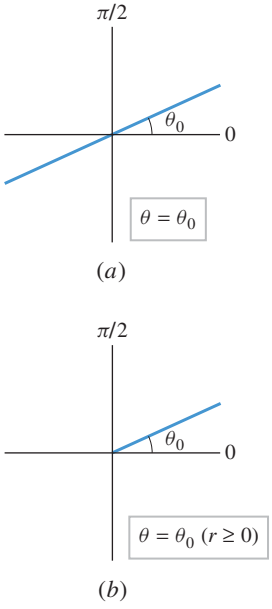



**Figura 10.2.17**

## FAMÍLIAS DE RETAS E RAIOS ATRAVÉS DO POLO

Se $\theta_0$ for um ângulo fixo, então, dado qualquer valor de $r$, o ponto $(r, \theta_0)$ estará sobre uma reta que forma com o eixo polar um ângulo $\theta = \theta_0$; reciprocamente, todo ponto sobre esta reta tem um par de coordenadas da forma $(r, \theta_0)$. Assim, a equação $\theta = \theta_0$ representa a reta que passa pelo polo e forma um ângulo $\theta_0$ com o eixo polar (Figura 10.2.17*a*). Se exigirmos que $r$ seja não negativo, então o gráfico da equação $\theta = \theta_0$ é o raio que emana do polo e forma um ângulo de $\theta_0$ com o eixo polar (Figura 10.2.17*b*). Desse modo, enquanto $\theta_0$ varia, a equação $\theta = \theta_0$ produz uma família de retas através do polo ou de raios através do polo, dependendo das restrições sobre $r$.

## FAMÍLIAS DE CÍRCULOS

Vamos considerar três famílias de círculos supondo que $a$ seja uma constante positiva.

$$r = a \qquad r = 2a \cos\theta \qquad r = 2a \operatorname{sen}\theta \tag{3–5}$$

A equação $r = a$ representa um círculo de raio $a$ com centro no polo (Figura 10.2.18*a*). Assim, variando $a$, essa equação produz uma família de círculos com centro no polo. Para as famílias (4) e (5), lembre-se, da Geometria plana, de que um triângulo inscrito em um círculo com um diâmetro do círculo como um de seus lados, deve ser um triângulo retângulo. Assim, conforme indicado nas Figuras 10.2.18*b* e 10.2.18*c*, a equação $r = 2a \cos\theta$ representa um círculo de raio $a$, com centro sobre o eixo $x$ e tangente na origem ao eixo $y$; da mesma forma, a equação $r = 2a \operatorname{sen}\theta$ representa um círculo de raio $a$, com o centro sobre o eixo $y$ e tangente ao eixo $x$ na origem. Portanto, variando $a$, as Equações (4) e (5) produzem as famílias ilustradas nas Figuras 10.2.18*d* e 10.2.18*e*.

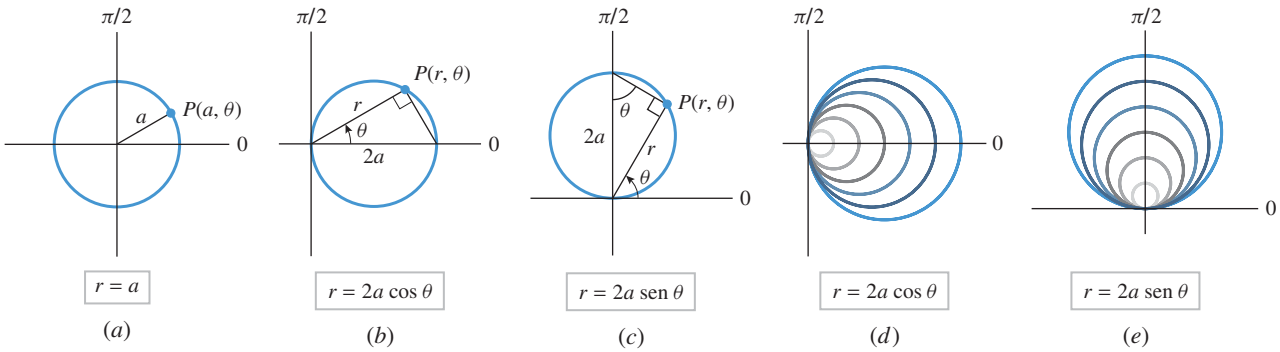



**Figura 10.2.18**

Observe que, substituindo $\theta$ por $-\theta$, a equação $r = 2a \cos \theta$ não muda, enquanto que substituir $\theta$ por $\pi - \theta$ não muda a equação $r = 2a \operatorname{sen} \theta$. Isso explica por que os círculos nas Figuras 10.2.18*d* são simétricos em relação ao eixo $x$ e os da Figura 10.2.18*e* são simétricos em relação ao eixo $y$.

Qual será o aspecto de uma rosácea de uma pétala?

## FAMÍLIAS DE ROSÁCEAS

Em coordenadas polares, as equações da forma

$$r = a \operatorname{sen} n\theta \qquad r = a \cos n\theta \tag{6–7}$$

em que $a > 0$ e $n$ é um inteiro positivo, representam famílias de curvas em forma de flor chamadas de ***rosáceas*** (Figura 10.2.19). A rosácea consiste em $n$ pétalas de raio $a$ igualmente espaçadas se $n$ for ímpar e, se $n$ for par, $2n$ pétalas de raio $a$ igualmente espaçadas. Pode-se mostrar que uma rosácea com um número par de pétalas é traçada exatamente uma vez quando $\theta$ varia no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$, e uma rosácea com um número ímpar de pétalas é traçada exatamente uma vez quando $\theta$ varia no intervalo $0 \leq \theta < \pi$ (Exercício 78). Uma rosácea de quatro pétalas e raio 1 teve seu gráfico feito no Exemplo 6.

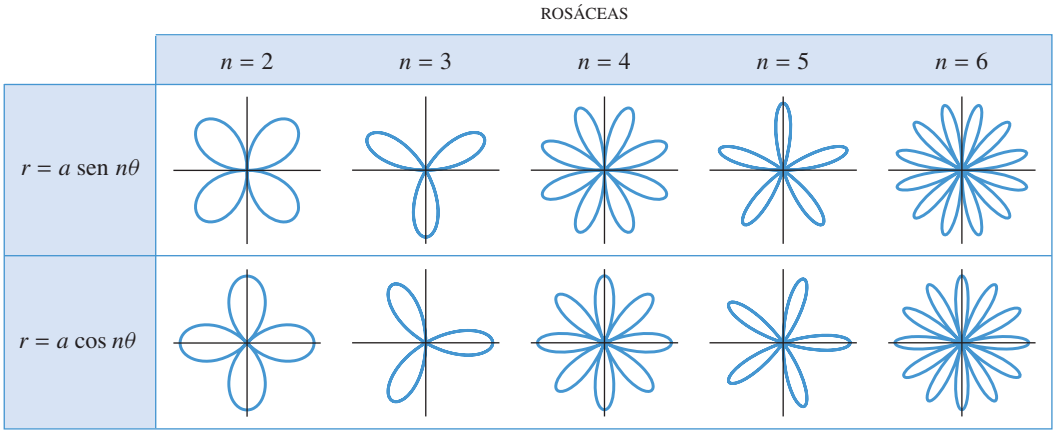



**Figura 10.2.19**

## FAMÍLIAS DE CARDIOIDES E LIMAÇONS

As equações de qualquer um dos quatro tipos

$$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta \qquad r = a \pm b \cos \theta \tag{8–9}$$

em que $a > 0$ e $b > 0$, representam curvas polares chamadas ***limaçons*** (do latim *limax*, para uma criatura parecida com uma lesma). Há quatro formas possíveis para os limaçons, que são determinadas pela razão $a/b$ (Figura 10.2.20). Se $a = b$ (o caso $a/b = 1$), então o limaçon é denominado ***cardioide***, em razão da semelhança com o aspecto de um coração, conforme notado no Exemplo 8.

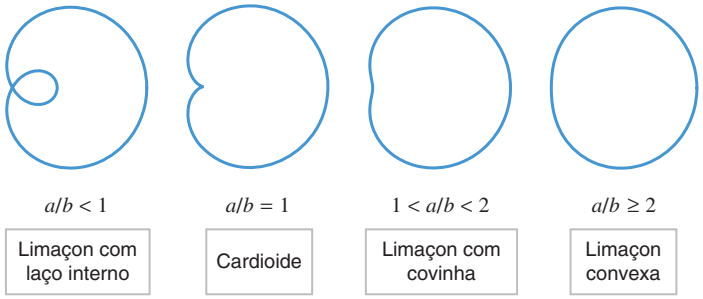



**Figura 10.2.20**

► **Exemplo 10** A Figura 10.2.21 mostra a família de limaçons $r = a + \cos\theta$ na qual a constante $a$ varia em passos de 0,25 desde 0,25 até 2,50. Conforme observa-se na Figura 10.2.20, os limaçons evoluem desde o tipo com laço até o tipo convexo. À medida que $a$ cresce a partir de 0,25, o laço vai ficando cada vez menor até que a cardioide é atingida quando $a = 1$. Quando $a$ cresce mais ainda, leva os limaçons a evoluírem para o tipo com covinha até o tipo convexo. ◄

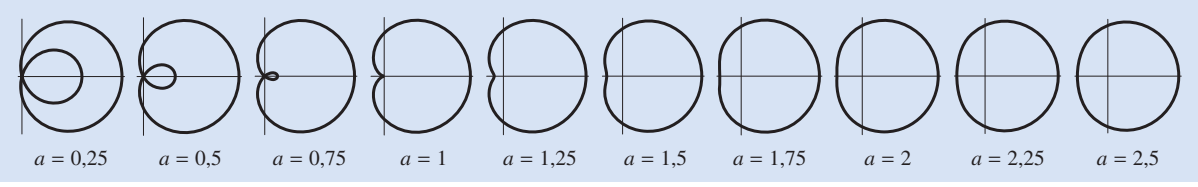



**Figura 10.2.21**

## ■ FAMÍLIAS DE ESPIRAIS

Uma ***espiral*** é uma curva que se enrola em torno de um ponto central. Em geral, as espirais têm versões "destras" e "canhotas", que se enrolam em sentidos opostos, dependendo das restrições sobre o ângulo polar e dos sinais das constantes que aparecem em suas equações. Alguns dos tipos mais comuns de espirais estão mostrados na Figura 10.2.22 para valores não negativos de $\theta$, $a$ e $b$.

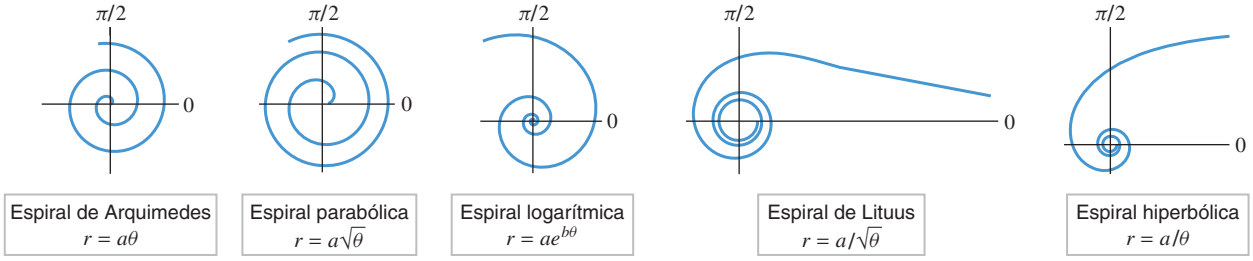


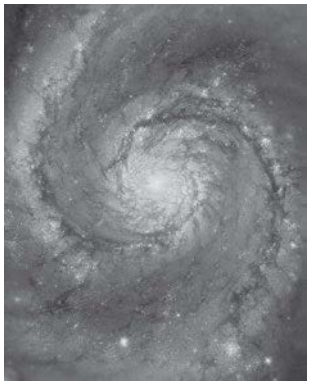

**Figura 10.2.22**

## ■ ESPIRAIS NA NATUREZA

Vários tipos de espirais ocorrem na natureza. Por exemplo, o caramujo de argonauta que tem câmaras forma uma espiral logarítmica, e uma corda de marinheiro enrolada forma uma espiral de Arquimedes. As espirais também ocorrem em flores, nas presas de certos animais e no formato de galáxias.

© Michael Siu/iStockphoto
*O caramujo de argonauta com câmara mostra uma espiral logarítimica. O animal vive na câmara mais para fora.*

© Michael Thompson/iStockphoto
*Uma corda de marinheiro enrolada formando uma espiral de Arquimedes.*



Cortesia NASA & The Hubble Heritage Team
*Uma galáxia espiral.*

## GERANDO CURVAS POLARES COM RECURSOS COMPUTACIONAIS

Para as curvas polares que são muito complicadas para o cálculo à mão, devem ser usados recursos gráficos computacionais. Embora a maioria dos recursos seja capaz de fazer gráficos de curvas polares diretamente, há alguns que são incapazes. No entanto, se um recurso gráfico computacional puder ser usado para fazer gráficos de curvas paramétricas, então ele pode ser usado para fazer o gráfico de uma curva polar $r = f(\theta)$, convertendo-se esta equação para a forma paramétrica. Isso pode ser feito substituindo-se $f(\theta)$ no lugar de $r$ em (1). Obtém-se

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta \tag{10}$$

que é um par de equações paramétricas para a curva polar em termos do parâmetro $\theta$.

**► Exemplo 11** Expresse a equação polar

$$r = 2 + \cos\frac{5\theta}{2}$$

parametricamente e gere o gráfico polar a partir das equações paramétricas usando um recurso gráfico.

***Solução*** Substituindo a equação dada para $r$ em $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, obtemos as equações paramétricas

$$x = \left[2 + \cos\frac{5\theta}{2}\right]\cos\theta, \quad y = \left[2 + \cos\frac{5\theta}{2}\right]\operatorname{sen}\theta$$

Em seguida, precisamos encontrar um intervalo no qual variar $\theta$ para obter todo o gráfico. Para encontrar tal intervalo, buscamos o menor número de revoluções que devem ocorrer até $r$ começar a repetir. Algebricamente, isso equivale a encontrar o menor valor positivo de $n$ tal que

$$2 + \cos\left(\frac{5(\theta + 2n\pi)}{2}\right) = 2 + \cos\frac{5\theta}{2}$$

ou

$$\cos\left(\frac{5\theta}{2} + 5n\pi\right) = \cos\frac{5\theta}{2}$$

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Use um recurso gráfico computacional para reproduzir a curva da Figura 10.2.23. Se o recurso gráfico requer $t$ como parâmetro, o leitor deve trocar $\theta$ por $t$ em (10) para gerar o gráfico.

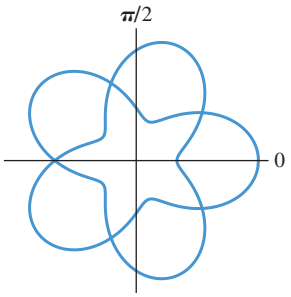



Figura 10.2.23

Para essa equação ser válida, a quantidade $5n\pi$ deve ser um múltiplo par de $\pi$; o menor valor $n$ para o qual isso ocorre é $n = 2$. Assim, o gráfico inteiro será traçado em duas revoluções, significando que ele pode ser gerado das equações paramétricas

$$x = \left[2 + \cos\frac{5\theta}{2}\right]\cos\theta, \quad y = \left[2 + \cos\frac{5\theta}{2}\right]\operatorname{sen}\theta \qquad (0 \le \theta \le 4\pi)$$

Assim, obtemos o gráfico na Figura 10.2.23. ◄

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.2 (Ver página 719 para respostas.)

**1.** (a) As coordenadas retangulares $(x, y)$ podem ser recuperadas das coordenadas polares $(r, \theta)$ por meio das equações $x =$ _____ e $y =$ _____.
(b) As coordenadas polares $(r, \theta)$ podem ser recuperadas das coordenadas retangulares $(x, y)$ por meio das equações $r^2 =$ _____ e $\operatorname{tg}\theta =$ _____.

**2.** Obtenha as coordenadas retangulares dos pontos cujas coordenadas polares são dadas.
(a) $(4, \pi/3)$ (b) $(2, -\pi/6)$
(c) $(6, -2\pi/3)$ (d) $(4, 5\pi/4)$

**3.** Em cada parte, encontre coordenadas polares que satisfaçam as condições dadas para o ponto cujas coordenadas retangulares são $(1, \sqrt{3})$.
(a) $r \ge 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$
(b) $r \le 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$

**4.** Em cada parte, dê o nome que melhor descreve a curva polar: rosácea, reta, círculo, limaçon, cardioide, espiral, lemniscata ou nenhuma dessas.
(a) $r = 1 - \theta$ (b) $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$
(c) $r = \operatorname{sen} 2\theta$ (d) $r = \cos^2\theta$
(e) $r = \operatorname{cossec}\theta$ (f) $r = 2 + 2\cos\theta$
(g) $r = -2\operatorname{sen}\theta$

## EXERCÍCIOS 10.2 Recurso Gráfico

**1-2** Esboce os pontos em coordenadas polares. ■

**1.** (a) $(3, \pi/4)$ (b) $(5, 2\pi/3)$ (c) $(1, \pi/2)$
(d) $(4, 7\pi/6)$ (e) $(-6, -\pi)$ (f) $(-1, 9\pi/4)$

**2.** (a) $(2, -\pi/3)$ (b) $(3/2, -7\pi/4)$ (c) $(-3, 3\pi/2)$
(d) $(-5, -\pi/6)$ (e) $(2, 4\pi/3)$ (f) $(0, \pi)$

**3-4** Determine as coordenadas retangulares dos pontos cujas coordenadas polares estão dadas. ■

**3.** (a) $(6, \pi/6)$ (b) $(7, 2\pi/3)$ (c) $(-6, -5\pi/6)$
(d) $(0, -\pi)$ (e) $(7, 17\pi/6)$ (f) $(-5, 0)$

**4.** (a) $(-2, \pi/4)$ (b) $(6, -\pi/4)$ (c) $(4, 9\pi/4)$
(d) $(3, 0)$ (e) $(-4, -3\pi/2)$ (f) $(0, 3\pi)$

**5.** Em cada parte, é dado um ponto em coordenadas retangulares. Encontre dois pares de coordenadas polares para o ponto, um par satisfazendo $r \ge 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$ e um segundo par satisfazendo $r \ge 0$ e $-2\pi < \theta \le 0$.
(a) $(-5, 0)$ (b) $(2\sqrt{3}, -2)$ (c) $(0, -2)$
(d) $(-8, -8)$ (e) $(-3, 3\sqrt{3})$ (f) $(1, 1)$

**6.** Em cada parte, encontre as coordenadas polares que satisfazem as condições dadas para os pontos cujas coordenadas retangulares são $(-\sqrt{3}, 1)$.
(a) $r \ge 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$
(b) $r \le 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$
(c) $r \ge 0$ e $-2\pi < \theta \le 0$
(d) $r \le 0$ e $-\pi < \theta \le \pi$

**7-8** Use um recurso computacional, quando for necessário, para aproximar as coordenadas polares dos pontos cujas coordenadas retangulares estão dadas. ■

**7.** (a) $(3, 4)$ (b) $(6, -8)$ (c) $(-1, \text{arc tg } 1)$

**8.** (a) $(-3, 4)$ (b) $(-3, 1{,}7)$ (c) $(2, \text{arc sen } \frac{1}{2})$

**9-10** Identifique a curva transformando a equação polar dada para coordenadas retangulares. ■

**9.** (a) $r = 2$ (b) $r\operatorname{sen}\theta = 4$
(c) $r = 3\cos\theta$ (d) $r = \dfrac{6}{3\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta}$

**10.** (a) $r = 5\sec\theta$ (b) $r = 2\operatorname{sen}\theta$
(c) $r = 4\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta$ (d) $r = \sec\theta\operatorname{tg}\theta$

**11-12** Expresse as equações dadas em coordenadas polares. ■

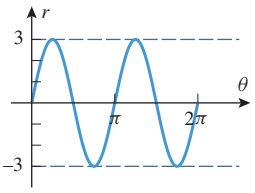
**11.** (a) $x = 3$ (b) $x^2 + y^2 = 7$
(c) $x^2 + y^2 + 6y = 0$ (d) $9xy = 4$

**12.** (a) $y = -3$ (b) $x^2 + y^2 = 5$
(c) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ (d) $x^2(x^2 + y^2) = y^2$

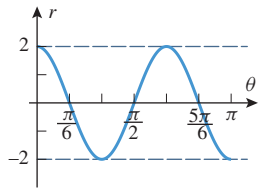
## ENFOCANDO CONCEITOS

**13-16** É dado um gráfico em um sistema de coordenadas retangulares $\theta r$. Esboce o gráfico correspondente em coordenadas polares. ■

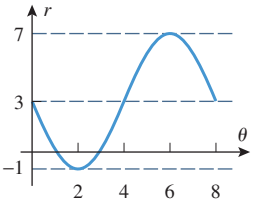
**13.**



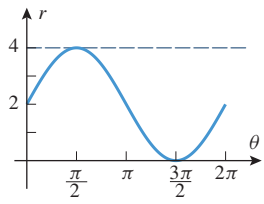

**14.**




**15.**

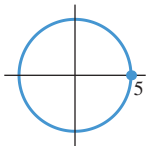



**16.**



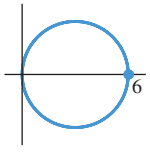

**17-20** Determine uma equação para o gráfico polar dado. [*Nota*: As indicações numéricas nos gráficos representam a distância à origem.] ■

**17.** (a)



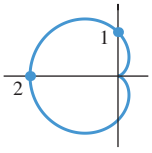

Círculo

(b)



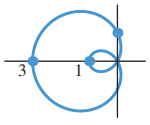

Círculo

(c)



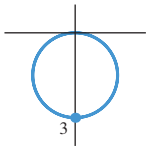

Cardioide

**18.** (a)



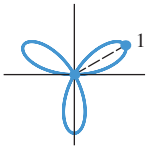

Limaçon

(b)



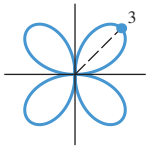

Círculo

(c)



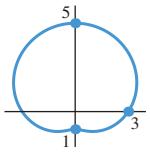

Rosácea de três pétalas

**19.** (a)



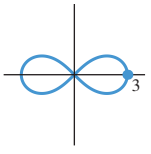

Rosácea de quatro pétalas

(b)



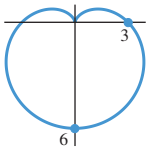

Limaçon

(c)



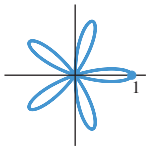

Lemniscata

**20.** (a)



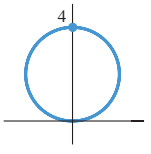

Cardioide

(b)




Rosácea de cinco pétalas

(c)




Círculo

**21-46** Esboce a curva em coordenadas polares. ■

**21.** $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ **22.** $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$ **23.** $r = 3$

**24.** $r = 4\cos\theta$ **25.** $r = 6\operatorname{sen}\theta$ **26.** $r - 2 = 2\cos\theta$

**27.** $r = 3(1 + \operatorname{sen}\theta)$ **28.** $r = 5 - 5\operatorname{sen}\theta$

**29.** $r = 4 - 4\cos\theta$ **30.** $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$

**31.** $r = -1 - \cos\theta$ **32.** $r = 4 + 3\cos\theta$

**33.** $r = 3 - \operatorname{sen}\theta$ **34.** $r = 3 + 4\cos\theta$

**35.** $r - 5 = 3\operatorname{sen}\theta$ **36.** $r = 5 - 2\cos\theta$

**37.** $r = -3 - 4\operatorname{sen}\theta$ **38.** $r^2 = \cos 2\theta$

**39.** $r^2 = 16\operatorname{sen} 2\theta$ **40.** $r = 4\theta \quad (\theta \geq 0)$

**41.** $r = 4\theta \quad (\theta \leq 0)$ **42.** $r = 4\theta$

**43.** $r = -2\cos 2\theta$ **44.** $r = 3\operatorname{sen} 2\theta$

**45.** $r = 9\operatorname{sen} 4\theta$ **46.** $r = 2\cos 3\theta$

**47-50 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

**47.** Os pares de coordenadas polares $(-1, \pi/3)$ e $(1, -2\pi/3)$ descrevem o mesmo ponto.

**48.** Se o gráfico de $r = f(\theta)$ traçado em coordenadas retangulares $\theta r$ for simétrico em relação ao eixo $r$, então o gráfico de $r = f(\theta)$ traçado em coordenadas polares será simétrico em relação ao eixo $x$.

**49.** A parte do gráfico polar de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ com valores de $\theta$ entre $\pi/2$ e $\pi$ está contida no segundo quadrante.

**50.** O gráfico do limaçon com covinhas passa pela origem polar.

**51-55** Determine o menor intervalo do parâmetro no qual pode ser gerado um gráfico completo da equação polar dada e, em seguida, use algum recurso computacional para gerar o gráfico polar. ■

**51.** $r = \cos\dfrac{\theta}{2}$ **52.** $r = \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$

**53.** $r = 1 - 2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{4}$ **54.** $r = 0{,}5 + \cos\dfrac{\theta}{3}$

**55.** $r = \cos\dfrac{\theta}{5}$

**56.** A figura a seguir mostra o gráfico da "curva da borboleta"

$$r = e^{\cos\theta} - 2\cos 4\theta + \operatorname{sen}^3\frac{\theta}{4}$$

Determine o menor intervalo do parâmetro com o qual pode ser gerada uma borboleta completa e, em seguida, confira sua resposta com algum recurso gráfico.

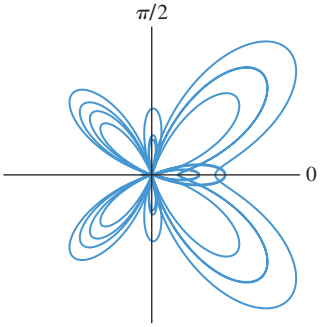
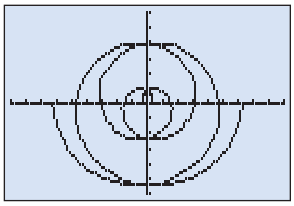



**Figura Ex-56**

**57.** A figura abaixo mostra a espiral de Arquimedes $r = \theta/2$ produzida por um recurso gráfico computacional.
(a) Qual é o intervalo de valores de $\theta$ usado para gerar o gráfico?
(b) Duplique o gráfico com seu próprio recurso gráfico computacional.



[−9, 9]× [−6, 6]
*x*Scl = 1, *y*Scl = 1

**Figura Ex-57**

**58.** Determine equações para as duas famílias de círculos na figura abaixo.

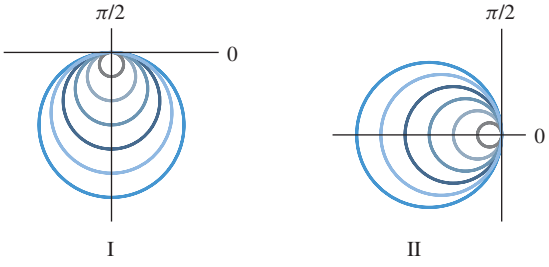



**Figura Ex-58**

**59.** (a) Mostre que, quando $a$ varia, a equação polar

$$r = a \sec\theta \quad (-\pi/2 < \theta < \pi/2)$$

descreve uma família de retas perpendiculares ao eixo polar.
(b) Mostre que, quando $b$ varia, a equação polar

$$r = b \operatorname{cossec}\theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

descreve uma família de retas paralelas ao eixo polar.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**60.** A figura a seguir mostra os gráficos da espiral de Arquimedes $r = \theta$ e da espiral parabólica $r = \sqrt{\theta}$. Qual é qual? Explique seu raciocínio.

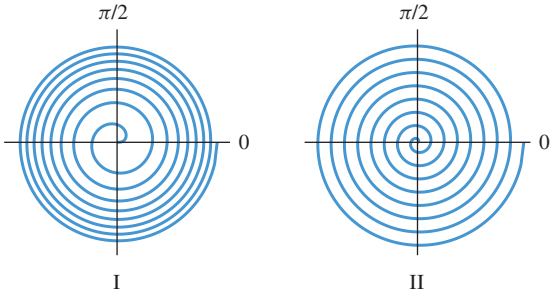



**Figura Ex-60**

**61-62** É dado um gráfico polar da equação $r = f(\theta)$ no intervalo indicado. Esboce o gráfico de

(a) $r = f(-\theta)$ (b) $r = f\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

(c) $r = f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ (d) $r = -f(\theta)$. ■

**61.** $0 \le \theta \le \pi/2$ **62.** $\pi/2 \le \theta \le \pi$

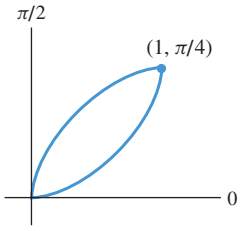



**Figura Ex-61**

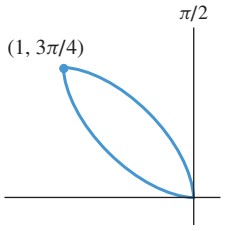



**Figura Ex-62**

**63-64** Use o gráfico polar do exercício indicado para esboçar o gráfico de

(a) $r = f(\theta) + 1$ (b) $r = 2f(\theta) - 1$. ■

**63.** Exercício 61 **64.** Exercício 62

**65.** Mostre que se o gráfico polar de $r = f(\theta)$ for girado no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo $\alpha$, então $r = f(\theta - \alpha)$ é uma equação para a curva girada. [*Sugestão*: Se $(r_0, \theta_0)$ for um ponto qualquer do gráfico original, então $(r_0, \theta_0 + \alpha)$ é um ponto no gráfico girado.]

**66.** Use o resultado do Exercício 65 para encontrar uma equação para a lemniscata que resulta quando aquela do Exemplo 9 for girada no sentido anti-horário por um ângulo de $\pi/2$.

**67.** Use o resultado do Exercício 65 para encontrar uma equação para a cardioide $r = 1 + \cos\theta$ após ela ter sido girada pelo ângulo dado e verifique sua resposta com um recurso computacional.

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\pi$ (d) $\frac{5\pi}{4}$

**68.** (a) Se $A$ e $B$ não forem nulos, mostre que o gráfico da equação polar

$$r = A \operatorname{sen}\theta + B\cos\theta$$

é um círculo. Encontre seu raio.
(b) Deduza as Fórmulas (4) e (5) da fórmula dada na parte (a).

**69.** Encontre o ponto mais alto da cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

**70.** Encontre o ponto mais à esquerda da parte superior da cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

**71.** Mostre que, em um sistema de coordenadas polares, a distância $d$ entre os pontos $(r_1, \theta_1)$ e $(r_2, \theta_2)$ é

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

**72-74** Use a fórmula obtida no Exercício 71 para encontra a distância entre os dois pontos dados em coordenadas polares. ■

**72.** $(3, \pi/6)$ e $(2, \pi/3)$

**73.** Pontas de pétalas sucessivas da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$. Confira sua resposta usando Geometria.

**74.** Pontas de pétalas sucessivas da rosácea de três pétalas $r = \operatorname{sen} 3\theta$. Confira sua resposta usando Trigonometria.

**75.** No final do século XVII, o astrônomo italiano Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) introduziu a família de curvas

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - b^4 - 4a^2x^2 = 0 \quad (a > 0, b > 0)$$

em seus estudos sobre os movimentos relativos da Terra e do Sol. Essas curvas são chamadas de ***ovais de Cassini*** e têm um dos três aspectos básicos mostrados na figura a seguir.

(a) Mostre que se $a = b$, então a equação polar da oval de Cassini é $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$, que é uma lemniscata.

(b) Use a fórmula do Exercício 71 para mostrar que a leminiscata em (a) é a curva traçada por um ponto que se move de tal forma que o produto de suas distâncias dos pontos polares $(a, 0)$ e $(a, \pi)$ é $a^2$.

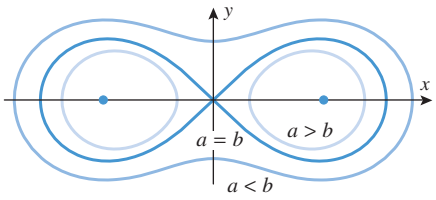



**Figura Ex-75**

**76-77** Assíntotas verticais e horizontais de curvas polares podem ser, às vezes, detectadas investigando o comportamento de $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ à medida que $\theta$ varia. Use essa ideia nestes exercícios. ■

**76.** Mostre que a ***espiral hiperbólica*** $r = 1/\theta$ $(\theta > 0)$ tem uma assíntota horizontal em $y = 1$, mostrando que $y \to 1$ e $x \to +\infty$ quando $\theta \to 0^+$. Confirme seu resultado gerando a espiral com um recurso computacional.

**77.** Mostre que a espiral $r = 1/\theta^2$ não tem quaisquer assíntotas horizontais.

**78.** Prove que a rosácea com um número par de pétalas é traçada exatamente uma vez quando $\theta$ varia sobre o intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$, e uma rosácea com um número ímpar de pétalas é traçada exatamente uma vez quando $\theta$ varia no intervalo $0 \le \theta < \pi$.

**79.** (a) Use um recurso gráfico computacional para confirmar que o gráfico de $r = 2 - \operatorname{sen}(\theta/2)$ $(0 \le \theta \le 4\pi)$ é simétrico em relação ao eixo $x$.

(b) Mostre que, substituindo $\theta$ por $-\theta$ na equação polar $r = 2 - \operatorname{sen}(\theta/2)$, não produzimos uma equação equivalente. Por que isso não contradiz a simetria demonstrada na parte (a)?

**80.** **Texto** Use um recurso gráfico para investigar como a família de curvas polares $r = 1 + a\cos n\theta$ é afetada pela variação dos valores de $a$ e $n$, em que $a$ é um número real positivo e $n$ um inteiro positivo. Escreva um parágrafo curto relatando suas conclusões.

**81.** **Texto** Qual seria o motivo da escolha do adjetivo "polar" no nome "coordenadas polares"?

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.2

**1.** (a) $r\cos\theta$; $r\operatorname{sen}\theta$ (b) $x^2 + y^2$; $y/x$ **2.** (a) $(2, 2\sqrt{3})$ (b) $(\sqrt{3}, -1)$ (c) $(-3, -3\sqrt{3})$ (d) $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$
**3.** (a) $(2, \pi/3)$ (b) $(-2, 4\pi/3)$ **4.** (a) espiral (b) limaçon (c) rosácea (d) nenhuma dessas (e) reta (f) cardioide (g) círculo

## 10.3 RETAS TANGENTES, COMPRIMENTO DE ARCO E ÁREA COM CURVAS POLARES

*Nesta seção, deduziremos as fórmulas necessárias para encontrar inclinações, retas tangentes e comprimentos de arco de curvas e polares. Em seguida, mostraremos como encontrar área de regiões delimitadas por curvas polares.*

### ■ RETAS TANGENTES A CURVAS POLARES

Nosso primeiro objetivo nesta seção é encontrar um método para obter as inclinações das retas tangentes a curvas polares da forma $r = f(\theta)$, em que $r$ é uma função diferenciável de $\theta$. Mostramos, na última seção, que uma curva dessa forma pode ser expressa parametricamente em termos do parâmetro $\theta$ substituindo $f(\theta)$ no lugar de $r$ nas equações $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$. Assim, temos

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= -f(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta = -r\,\text{sen}\,\theta + \frac{dr}{d\theta}\cos\theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta = r\cos\theta + \frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta\end{aligned} \tag{1}$$

Assim, se $dx/d\theta$ e $dy/d\theta$ forem contínuas e se $dx/d\theta \neq 0$, então $y$ é diferenciável como função de $x$ e a Fórmula (4) da Seção 10.1 com $\theta$ no lugar de $t$ dá lugar a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\cos\theta + \text{sen}\,\theta\dfrac{dr}{d\theta}}{-r\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}} \tag{2}$$

**▶ Exemplo 1** Encontre a inclinação da reta tangente ao círculo $r = 4\cos\theta$ no ponto em que $\theta = \pi/4$.

***Solução*** A partir de (2) com $r = 4\cos\theta$ e, portanto, $dr/d\theta = -4\,\text{sen}\,\theta$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos^2\theta - 4\,\text{sen}^2\,\theta}{-8\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} = -\frac{\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta}{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}$$

Usando as fórmulas de seno e cosseno de ângulo duplo, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos 2\theta}{\text{sen}\,2\theta} = -\,\text{cotg}\,2\theta$$

Assim, no ponto em que $\theta = \pi/4$, a inclinação da reta tangente é

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/4} = -\,\text{cotg}\,\frac{\pi}{2} = 0$$

o que implica que o círculo tem uma reta tangente horizontal no ponto em que $\theta = \pi/4$ (Figura 10.3.1) ◀

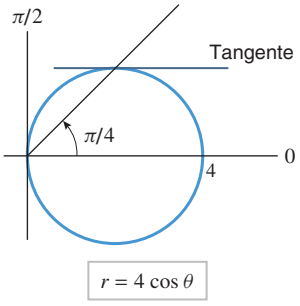



**Figura 10.3.1**

**▶ Exemplo 2** Encontre os pontos da cardioide $r = 1 - \cos\theta$ nos quais há uma reta tangente horizontal, uma reta tangente vertical ou um ponto singular.

***Solução*** Uma reta tangente horizontal irá ocorrer onde $dy/d\theta = 0$ e $dx/d\theta \neq 0$, uma reta tangente vertical onde $dy/d\theta \neq 0$ e $dx/d\theta = 0$ e um ponto singular onde $dy/d\theta = 0$ e $dx/d\theta = 0$. Poderíamos determinar essas derivadas a partir das fórmulas em (1). Uma abordagem alternativa, porém, é voltar aos princípios básicos e expressar parametricamente a cardioide, substituindo $r = 1 - \cos\theta$ nas fórmulas de conversão $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Dessa forma,

$$x = (1 - \cos\theta)\cos\theta, \quad y = (1 - \cos\theta)\,\text{sen}\,\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

Diferenciando essas equações em relação a $\theta$ e, então, simplificando, obtemos (verifique)

$$\frac{dx}{d\theta} = \text{sen}\,\theta(2\cos\theta - 1), \quad \frac{dy}{d\theta} = (1 - \cos\theta)(1 + 2\cos\theta)$$

Assim, $dx/\text{d}\theta = 0$ se $\text{sen}\,\theta = 0$ ou $\theta = \frac{1}{2}$, e $dy/d\theta = 0$ se $\cos\theta = 1$ ou $\theta = -\frac{1}{2}$. Deixamos a cargo do leitor resolver essas equações e mostrar que as soluções de $dx/d\theta = 0$ no intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$ são

$$\frac{dx}{d\theta} = 0: \quad \theta = 0, \ \frac{\pi}{3}, \ \pi, \ \frac{5\pi}{3}, \ 2\pi$$

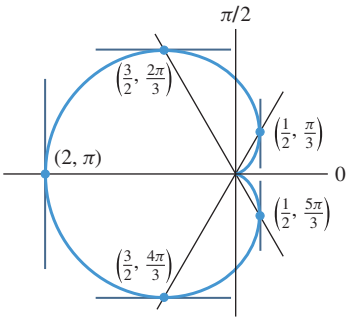



**Figura 10.3.2**

e as soluções de $dy/d\theta = 0$ no intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$ são

$$\frac{dy}{d\theta} = 0: \quad \theta = 0, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{3}, \quad 2\pi$$

Assim, as retas tangentes horizontais ocorrem em $\theta = 2\pi/3$ e $\theta = 4\pi/3$; retas tangentes verticais ocorrem em $\theta = \pi/3$, $\pi$ e $5\pi/3$; e os pontos singulares ocorrem em $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ (Figura 10.3.2). Note, entretanto, que $r = 0$ nos pontos singulares, logo há, realmente, apenas um único ponto singular sobre a cardioide: o polo. ◄

## RETAS TANGENTES A CURVAS POLARES NA ORIGEM

A Fórmula (2) revela algumas informações úteis sobre o comportamento de uma curva polar $r = f(\theta)$ que passa na origem. Se supusermos que $r = 0$ e $dr/d\theta \neq 0$ quando $\theta = \theta_0$, então tem-se a partir da Fórmula (2) que a inclinação da reta tangente à curva em $\theta = \theta_0$ é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 + \operatorname{sen}\theta_0 \dfrac{dr}{d\theta}}{0 + \cos\theta_0 \dfrac{dr}{d\theta}} = \frac{\operatorname{sen}\theta_0}{\cos\theta_0} = \operatorname{tg}\theta_0$$

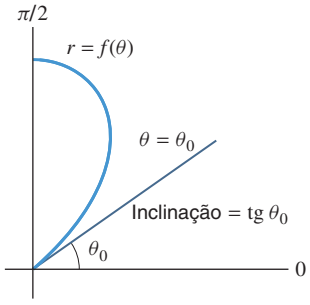



**Figura 10.3.3**

(Figura 10.3.3). Contudo, tg $\theta_0$ é também a inclinação da reta $\theta = \theta_0$, de modo que podemos concluir que essa reta é tangente à curva na origem. Dessa forma, estabelecemos o seguinte resultado.

**10.3.1** TEOREMA *Se a curva polar $r = f(\theta)$ passar na origem em $\theta = \theta_0$ e se $dr/d\theta \neq 0$ em $\theta = \theta_0$, então a reta $\theta = \theta_0$ será tangente à curva na origem.*

Esse teorema nos diz que as equações das retas tangentes na origem à curva $r = f(\theta)$ podem ser obtidas resolvendo a equação $f(\theta) = 0$. É importante lembrar, entretanto, que $r = f(\theta)$ poderia ser zero em mais de um valor de $\theta$, logo poderia haver mais do que uma reta tangente à origem. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

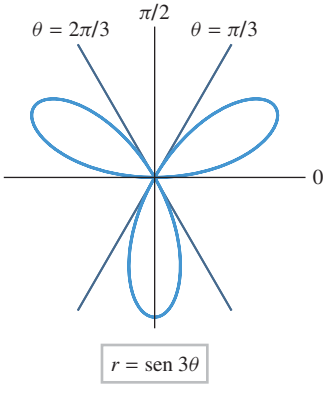



**Figura 10.3.4**

► **Exemplo 3** A rosácea de três pétalas $r = \operatorname{sen} 3\theta$, na Figura 10.3.4, tem três retas tangentes à origem, que podem ser encontradas resolvendo a equação

$$\operatorname{sen} 3\theta = 0$$

Mostrou-se no Exercício 78 da Seção 10.2 que a rosácea completa é descrita uma vez quando $\theta$ varia no intervalo $0 \le \theta < \pi$, logo precisaremos olhar apenas para as soluções desse intervalo. Deixamos a cargo do leitor confirmar que essas soluções são

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$$

Como $dr/d\theta = 3\cos 3\theta \neq 0$ nesses valores de $\theta$, essas três retas são tangentes à rosácea na origem, o que está de acordo com a figura. ◄

## COMPRIMENTO DE ARCO DE UMA CURVA POLAR

Uma fórmula para o comprimento de arco de uma curva polar $r = f(\theta)$ pode ser deduzida expressando a curva na forma paramétrica e aplicando a Fórmula (9) da Seção 10.1 para o comprimento de arco de uma curva paramétrica. Vamos deixar como exercício provar o que segue.

**10.3.2 FÓRMULA DO COMPRIMENTO DE ARCO PARA CURVAS POLARES** Se nenhum segmento da curva polar $r = f(\theta)$ for traçado mais de uma vez à medida que $\theta$ cresce de $\alpha$ até $\beta$ e se $dr/d\theta$ for contínua com $\alpha \le \theta \le \beta$, então o comprimento de arco $L$ de $\theta = \alpha$ até $\theta = \beta$ será dado por

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \tag{3}$$

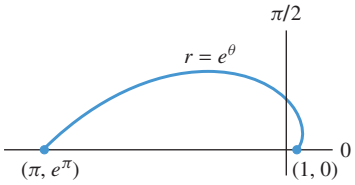


**Figura 10.3.5**

▶ **Exemplo 4** Encontre o comprimento de arco da espiral $r = e^\theta$ na Figura 10.3.5 entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

***Solução***

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^\pi \sqrt{(e^\theta)^2 + (e^\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{2}\, e^\theta\, d\theta = \sqrt{2}\, e^\theta \Big]_0^\pi = \sqrt{2}(e^\pi - 1) \approx 31{,}3 \quad \blacktriangleleft$$

▶ **Exemplo 5** Encontre o comprimento de arco total da cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

***Solução*** Uma cardioide é traçada uma vez quando $\theta$ varia de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$. Assim,

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + (-\operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta}\, d\theta \qquad \text{Fórmula do ângulo metade.}$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \left|\cos \tfrac{1}{2}\theta\right| d\theta$$

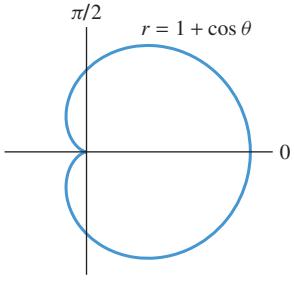


**Figura 10.3.6**

Como $\cos\frac{1}{2}\theta$ muda de sinal em $\pi$, devemos dividir a última integral em uma soma de duas: uma de 0 até $\pi$ e outra de $\pi$ a $2\pi$. Porém, a integral de $\pi$ a $2\pi$ é igual à de 0 até $\pi$, pois a cardioide é simétrica em relação ao eixo polar (Figura 10.3.6). Assim,

$$L = 2 \int_0^{2\pi} \left|\cos \tfrac{1}{2}\theta\right| d\theta = 4 \int_0^\pi \cos \tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 8 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta \Big]_0^\pi = 8 \quad \blacktriangleleft$$

## ■ ÁREA EM COORDENADAS POLARES

Começamos nossa investigação de área em coordenadas polares com um caso simples.

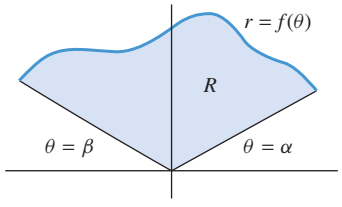


**Figura 10.3.7**

**10.3.3 PROBLEMA DA ÁREA EM COORDENADAS POLARES** Suponha que $\alpha$ e $\beta$ sejam ângulos que satisfaçam a condição

$$\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$$

e suponha que $f(\theta)$ seja contínua e não negativa com $\alpha \le \theta \le \beta$. Determine a área da região $R$ envolvida pela curva polar $r = f(\theta)$ e os raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ (Figura 10.3.7).

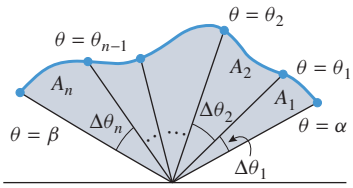



**Figura 10.3.8**

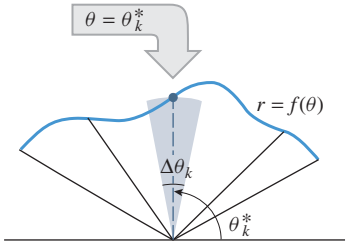



**Figura 10.3.9**

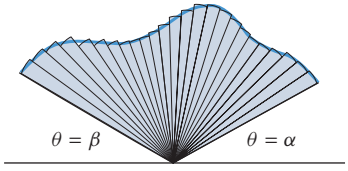



**Figura 10.3.10**

Em coordenadas retangulares, obtivemos áreas abaixo de curvas dividindo a região em um número crescente de faixas verticais, aproximando as faixas por retângulos e tomando um limite. Em coordenadas polares, os retângulos são muito desajeitados, e é melhor dividir a região em ***cunhas*** usando raios

$$\theta = \theta_1, \quad \theta = \theta_2, \ldots, \theta = \theta_{n-1}$$

tais que

$$\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < \beta$$

(Figura 10.3.8). Conforme mostra aquela figura, os raios dividem a região $R$ em $n$ cunhas com áreas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e ângulos centrais $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n$. A área da região inteira pode ser escrita como

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k \tag{4}$$

Se $\Delta\theta_k$ for pequeno, então podemos aproximar a área $A_k$ da $k$-ésima cunha pela área de um setor com ângulo central $\Delta\theta_k$ e raio $f(\theta_k^*)$, onde $\theta = \theta_k^*$ é qualquer raio situado na $k$-ésima cunha (Figura 10.3.9). Assim, a partir de (4) e da Fórmula (5) do Apêndice B, do Volume 1, para a área de um setor, obtemos

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k \approx \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2 \Delta\theta_k \tag{5}$$

Se agora aumentarmos $n$ de tal maneira que $\max \Delta\theta_k \to 0$, então os setores irão se tornar aproximações cada vez melhores das cunhas, e é razoável esperar que (5) aproxime o valor exato da área $A$ (Figura 10.3.10); isto é,

$$A = \lim_{\max \Delta\theta_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2 \Delta\theta_k = \int_{\alpha}^{\beta} \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2 \, d\theta$$

Observe que a discussão precedente pode ser facilmente adaptada ao caso em que $f(\theta)$ é não positiva com $\alpha \le \theta \le \beta$. Resumindo, temos o resultado a seguir.

**10.3.4 ÁREA EM COORDENADAS POLARES** Se $\alpha$ e $\beta$ forem ângulos que satisfaçam a condição

$$\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$$

e se $f(\theta)$ for contínua e não negativa ou não positiva com $\alpha \le \theta \le \beta$, então a área $A$ da região $R$ envolvida pela curva polar $r = f(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$ e os raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ é

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2 \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta \tag{6}$$

A parte mais difícil da aplicação de (6) é determinar os limites de integração. Isso pode ser feito da seguinte maneira:

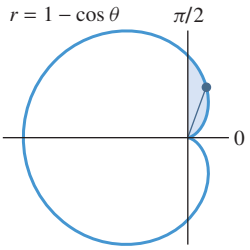
***Área em Coordenadas Polares: os Limites de Integração***

**Passo 1** Esboce a região $R$ cuja área queremos determinar.

**Passo 2** Desenhe uma "linha radial" arbitrária do polo até a curva $r = f(\theta)$ da fronteira.

**Passo 3** Pergunte: "Sobre qual intervalo de valores $\theta$ deve variar para que a reta radial varra a região $R$?"

**Passo 4** A sua resposta no Passo 3 determinará os limites inferior e superior da integração.




A região sombreada é varrida pela reta radial quando $\theta$ varia de 0 a $\pi/2$.

**Figura 10.3.11**

**▶ Exemplo 6** Determine a área da região do primeiro quadrante dentro da cardioide $r = 1 - \cos\theta$.

***Solução*** A região e uma reta radial típica estão mostradas na Figura 10.3.11. Para as retas radiais varrerem a região, $\theta$ deve variar de 0 a $\pi/2$. Assim, a partir de (6) com $\alpha = 0$ e $\beta = \pi/2$, obtemos

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta$$

Com a ajuda da identidade $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, isso pode ser reescrito como

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}\pi - 1 \quad \blacktriangleleft$$

**▶ Exemplo 7** Determine a área inteira interna à cardioide do Exemplo 6.

***Solução*** Para a reta radial varrer a cardioide inteira, $\theta$ deve variar de 0 a $2\pi$. Assim, a partir de (6), com $\alpha = 0$ e $\beta = 2\pi$,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 \, d\theta$$

Se procedermos como no Exemplo 6, isso reduz a

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

***Solução Alternativa*** *Uma vez que a cardioide é simétrica em relação ao eixo x*, podemos calcular a área da porção acima do eixo $x$ e dobrar o resultado. Na porção da cardioide acima do eixo $x$, $\theta$ varia de 0 a $\pi$, assim

$$A = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_0^{\pi} (1 - \cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{3\pi}{2} \quad \blacktriangleleft$$

## ■ USANDO A SIMETRIA

Embora a Fórmula (6) seja aplicável quando $r = f(\theta)$ for negativa, o cálculo de áreas pode, algumas vezes, ser simplificado usando a simetria para restringir os limites de integração a intervalos onde $r \geq 0$. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

**▶ Exemplo 8** Determine a área da região envolvida pela rosácea $r = \cos 2\theta$.

***Solução*** Referindo-se à Figura 10.2.13 e usando a simetria, a área no primeiro quadrante que é varrida com $0 \leq \theta \leq \pi/4$ é um oitavo da área total dentro da rosácea. Assim, pela Fórmula (6),

$$\begin{aligned} A &= 8 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta) \, d\theta \\ &= 2\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4\theta \Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Às vezes, a maneira mais natural de satisfazer a restrição $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ requerida pela Fórmula (6) é usar um valor negativo para $\alpha$. Por exemplo, suponha que estejamos interessados em encontrar a área da região sombreada na Figura 10.3.12*a*. O primeiro passo seria determinar as interseções da cardioide $r = 4 + 4\cos\theta$ com o círculo $r = 6$, uma vez que essa informação é necessária para os limites de integração. Para encontrar os pontos de interseção, podemos equacionar as duas expressões para $r$. Isso dá

$$4 + 4\cos\theta = 6 \quad \text{ou} \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

que é satisfeito pelos ângulos positivos

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

Entretanto, aqui surge um problema, pois as retas radiais para o círculo e a cardioide não varrem completamente a região sombreada mostrada na Figura 10.3.12*b* quando $\theta$ varia no intervalo $\pi/3 \leq \theta \leq 5\pi/3$. Há duas maneiras de contornar esse problema: uma é aproveitar-se da simetria, integrando no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/3$ e dobrar o resultado, e a segunda é usar um limite inferior negativo na integração e integrar no intervalo $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$ (Figura 10.3.12*c*). Os dois métodos estão ilustrados no próximo exemplo.

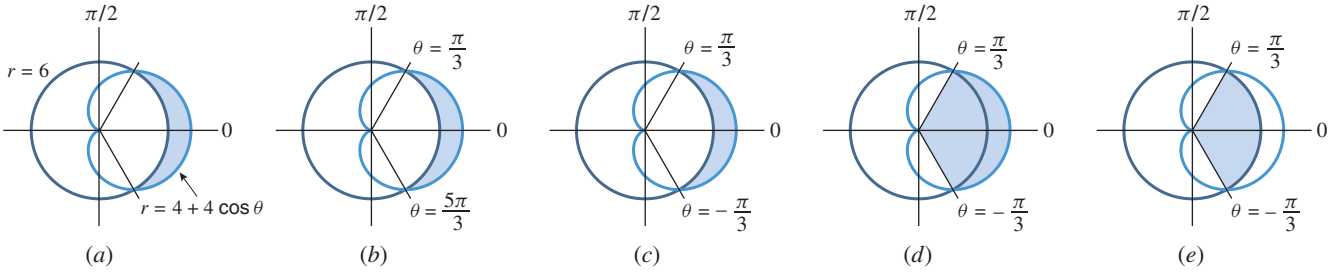



**Figura 10.3.12**

► **Exemplo 9** Determine a área da região que está dentro da cardioide $r = 4 + 4\cos\theta$ e fora do círculo $r = 6$.

***Solução Usando um Ângulo Negativo*** A área da região pode ser obtida subtraindo as áreas das Figuras 10.3.12*d* e 10.3.12*e*:

$$A = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}(4 + 4\cos\theta)^2\, d\theta - \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}(6)^2\, d\theta$$

Área dentro da cardioide menos área dentro do círculo.

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}[(4 + 4\cos\theta)^2 - 36]\, d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (16\cos\theta + 8\cos^2\theta - 10)\, d\theta$$

$$= \left[16\,\text{sen}\,\theta + (4\theta + 2\,\text{sen}\,2\theta) - 10\theta\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = 18\sqrt{3} - 4\pi$$

***Solução Usando Simetria*** Usando simetria, podemos calcular a área acima do eixo polar e dobrá-la. Isso dá (verifique)

$$A = 2\int_{0}^{\pi/3} \frac{1}{2}[(4 + 4\cos\theta)^2 - 36]\, d\theta = 2(9\sqrt{3} - 2\pi) = 18\sqrt{3} - 4\pi$$

que coincide com o resultado precedente. ◄

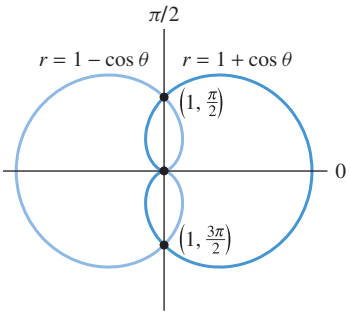



**Figura 10.3.13**

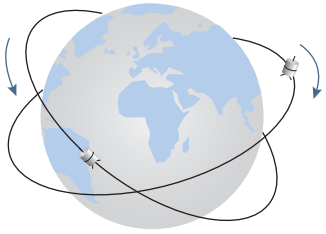



**Figura 10.3.14**

## INTERSEÇÕES DE GRÁFICOS POLARES

No último exemplo, encontramos a interseção da cardioide com o círculo equacionando suas expressões para $r$ e resolvendo em $\theta$. Contudo, como um ponto pode ser representado de diferentes maneiras em coordenadas polares, esse procedimento nem sempre produzirá todas as interseções. Por exemplo, as cardioides

$$r = 1 - \cos\theta \quad \text{e} \quad r = 1 - \cos\theta \tag{7}$$

se cortam em três pontos: o polo, o ponto $(1, \pi/2)$ e o ponto $(1, 3\pi/2)$ (Figura 10.3.13). Igualando os lados direitos das Equações (7), obtemos $1 - \cos\theta = 1 + \cos\theta$ ou $\cos\theta = 0$, de modo que

$$\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Substituindo quaisquer destes valores em (7), obtém-se $r = 1$, portanto encontramos apenas dois pontos distintos da interseção, $(1, \pi/2)$ e $(1, 3\pi/2)$; o polo não foi encontrado. Esse problema ocorre porque as duas cardioides passam pelo polo em diferentes valores de $\theta$: a cardioide $r = 1 - \cos\theta$ passa no polo em $\theta = 0$ e a cardioide $r = 1 + \cos\theta$ passa no polo em $\theta = \pi$.

O que ocorre com estas duas cardioides é análogo a dois satélites circulando em torno da Terra em órbitas que se intersectam (Figura 10.3.14). Os satélites não colidirão, a menos que eles atinjam o mesmo ponto no mesmo instante. Em geral, é uma boa ideia, quando da busca de interseções de curvas polares, fazer o gráfico das curvas para determinar o número de interseções que deveriam existir.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.3 (Ver página 729 para respostas.)

**1.** (a) Para obter $dy/dx$ diretamente da equação polar $r = f(\theta)$, podemos usar a fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = _____$$

(b) Use a fórmula da parte (a) para encontrar $dy/dx$ diretamente da equação polar $r = \operatorname{cossec}\theta$.

**2.** (a) Que condições sobre $f(\theta_0)$ e $f'(\theta_0)$ garantem que a reta $\theta = \theta_0$ seja tangente à curva polar $r = f(\theta)$ na origem?

(b) Obtenha os valores de $\theta_0$ em $[0, 2\pi]$ para os quais a reta $\theta = \theta_0$ seja tangente na origem à rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

**3.** (a) Para encontrar o comprimento de arco $L$ da curva polar $r = f(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$, podemos usar a fórmula $L =$ _____.

(b) A curva polar $r = \sec\theta$ $(0 \le \theta \le \pi/4)$ tem comprimento de arco $L =$ _____.

**4.** A área da região englobada por uma curva polar não negativa $r = f(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$ e as semirretas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ é dada pela integral definida _____.

**5.** Encontre a área do círculo $r = a$ usando integração.

## EXERCÍCIOS 10.3 Recurso Gráfico C CAS

**1-6** Encontre a inclinação da reta tangente à curva polar para o valor dado de $\theta$. ■

**1.** $r = 2 \operatorname{sen}\theta$; $\theta = \pi/6$

**2.** $r = 1 + \cos\theta$; $\theta = \pi/2$

**3.** $r = 1/\theta$; $\theta = 2$

**4.** $r = a \sec 2\theta$; $\theta = \pi/6$

**5.** $r = \operatorname{sen} 3\theta$; $\theta = \pi/4$

**6.** $r = 4 - 3 \operatorname{sen}\theta$; $\theta = \pi$

**7-8** Calcule as inclinações das retas tangentes indicadas nas figuras abaixo. ■

**7.** $r = 2 + 2 \operatorname{sen}\theta$

**8.** $r = 1 - 2 \operatorname{sen}\theta$

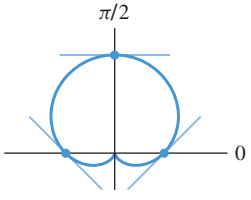



**Figura Ex-7**

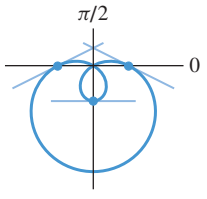



**Figura Ex-8**

**9-10** Encontre as coordenadas polares de todos os pontos nos quais a curva polar tem uma reta tangente vertical ou horizontal. ■

**9.** $r = a(1 + \cos\theta)$

**10.** $r = a \operatorname{sen}\theta$

**11-12** Use um recurso computacional para fazer uma conjectura sobre o número de pontos da curva polar nos quais há uma reta tangente horizontal e confirme sua conjectura encontrando as derivadas apropriadas. ■

**11.** $r = \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$ **12.** $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$

**13-18** Esboce a curva polar e encontre equações polares das retas tangentes à curva no polo. ■

**13.** $r = 2\cos 3\theta$ **14.** $r = 4\operatorname{sen}\theta$ **15.** $r = 4\sqrt{\cos 2\theta}$

**16.** $r = \operatorname{sen} 2\theta$ **17.** $r = 1 - 2\cos\theta$ **18.** $r = 2\theta$

**19-22** Use a Fórmula (3) para calcular o comprimento de arco da curva polar. ■

**19.** O círculo inteiro $r = a$

**20.** O círculo inteiro $r = 2a\cos\theta$

**21.** A cardioide inteira $r = a(1 - \cos\theta)$

**22.** $r = e^{3\theta}$ de $\theta = 0$ a $\theta = 2$

**23.** (a) Mostre que o comprimento de arco de uma pétala da rosácea $r = \cos n\theta$ é dado por

$$2\int_0^{\pi/(2n)} \sqrt{1 + (n^2 - 1)\operatorname{sen}^2 n\theta}\, d\theta$$

(b) Use a capacidade numérica de integração de uma calculadora para aproximar o comprimento de arco de uma pétala da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

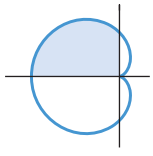
(c) Use a capacidade de integração numérica de uma calculadora para aproximar o comprimento de arco de uma pétala da rosácea de $2n$ pétalas, $r = \cos n\theta$, $n = 2, 3, 4, \ldots, 20$; então faça uma conjectura sobre o limite desses comprimentos de arco quando $n \to +\infty$.

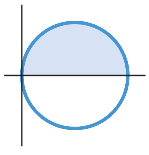
**24.** (a) Esboce a espiral $r = e^{-\theta/8}$ $(0 \le \theta < +\infty)$.

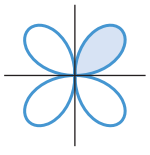
(b) Determine uma integral imprópria para o comprimento de arco total da espiral.

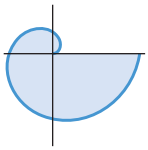
(c) Mostre que a integral converge e determine o comprimento de arco total da espiral.

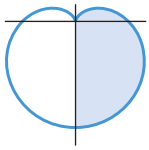
**25.** Escreva, mas não calcule, uma integral para a área de cada região sombreada.

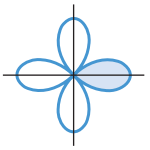
(a) 
$r = 1 - \cos\theta$

(b) 
$r = 2\cos\theta$

(c) 
$r = \operatorname{sen} 2\theta$

(d) 
$r = \theta$

(e) 
$r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

(f) 
$r = \cos 2\theta$

**26.** Encontre a área da região sombreada no Exercício 25(d)

**27.** Em cada parte, determine a área do círculo por integração

(a) $r = 2a\operatorname{sen}\theta$ (b) $r = 2a\cos\theta$

**28.** (a) Mostre que $r = 2\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta$ é um círculo.

(b) Determine a área do círculo usando uma fórmula geométrica e, então, usando integração.

**29-34** Determine a área da região descrita. ■

**29.** A região englobada pela cardioide $r = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$.

**30.** A região interna à cardioide $r = 1 + \cos\theta$ que está no primeiro quadrante.

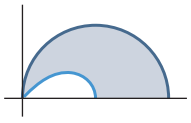
**31.** A região englobada pela rosácea $r = 4\cos 3\theta$.

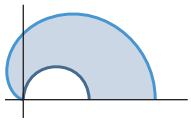
**32.** A região englobada pela rosácea $r = 2\operatorname{sen} 2\theta$.

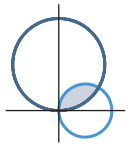
**33.** A região englobada pelo laço interno da limaçon $r = 1 + 2\cos\theta$ [*Sugestão*: $r \le 0$ sobre o intervalo de integração.]

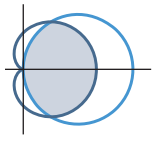
**34.** A região varrida pela reta radial a partir do polo à curva $r = 2/\theta$, quando $\theta$ varia no intervalo $1 \le \theta \le 3$.

**35-38** Determine a área da região sombreada. ■

**35.** 
$r = \sqrt{\cos 2\theta}$
$r = 2\cos\theta$

**36.** 
$r = 1 + \cos\theta$
$r = \cos\theta$

**37.** 
$r = 4\cos\theta$
$r = 4\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta$

**38.** 
$r = 1 + \cos\theta$
$r = 3\cos\theta$

**39-46** Determine a área da região descrita. ■

**39.** A região interna ao círculo $r = 3\operatorname{sen}\theta$ e externa à cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

**40.** A região externa à cardioide $r = 2 - 2\cos\theta$ e interna ao círculo $r = 4$.

**41.** A região interna à cardioide $r = 2 + 2\cos\theta$ e externa ao círculo $r = 3$.

**42.** A região que é comum aos círculos $r = 2\cos\theta$ e $r = 2\operatorname{sen}\theta$.

**43.** A região entre os laços do limaçon $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$.

**44.** A região interna à cardioide $r = 2 + 2\cos\theta$ e à direita da reta $r\cos\theta = \frac{3}{2}$.

**45.** A região interna ao círculo $r = 2$ e à direita da reta $r = \sqrt{2}\sec\theta$.

**46.** A região interna à rosácea $r = 2a\cos 2\theta$ e externa ao círculo $r = a\sqrt{2}$.

**47-50 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**47.** O eixo $x$ é tangente à curva polar $r = \cos(\theta/2)$ em $\theta = 3\pi$.

**48.** O comprimento de arco da curva polar $r = \sqrt{\theta}$ com variação $0 \le \theta \le \pi/2$ é dado por

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{1}{4\theta}}\, d\theta$$

**49.** A área de um setor de ângulo central $\theta$ tomado de um círculo de raio $r$ é $\theta r^2$.

**50.** A expressão

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - \sqrt{2}\cos\theta)^2\, d\theta$$

calcula a área englobada pelo laço interno do limaçon $r = 1 - \sqrt{2}\cos\theta$.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**51.** (a) Determine o erro: a área que está na parte interna da lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ é

$$A = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} a^2 \cos 2\theta\, d\theta$$
$$= \tfrac{1}{4} a^2 \operatorname{sen} 2\theta \Big]_0^{2\pi} = 0$$

(b) Determine a área correta.

(c) Determine a área interna à lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$ e externa ao círculo $r = \sqrt{2}$.

**52.** Determine a área interna da curva $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$.

**53.** Uma reta radial é desenhada da origem à espiral $r = a\theta$ ($a > 0$ e $\theta \ge 0$). Determine a área varrida durante a segunda revolução da reta radial que não foi varrida durante a primeira revolução.

**54.** Conforme ilustrado na figura a seguir, suponha que uma vareta com um dos extremos fixos no polo de um sistema de coordenadas polares gire no sentido anti-horário a uma taxa constante de 1 rad/s. No instante $t = 0$, um besouro sobre a vareta está a 10 mm do polo e está se movendo para fora ao longo da vareta com uma velocidade constante de 2 mm/s.

(a) Determine uma equação da forma $r = f(\theta)$ para o caminho percorrido pelo besouro, supondo que $\theta = 0$ quando $t = 0$.

(b) Determine a distância que o besouro percorre ao longo do caminho na parte (a) durante os 5 primeiros segundos. Arredonde a sua resposta para o décimo de um milésimo mais próximo.

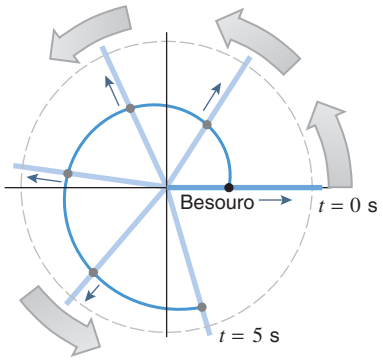



**Figura Ex-54**

C **55.** (a) Mostre que o Fólio de Descartes $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ pode ser expresso em coordenadas polares como

$$r = \frac{3\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta}$$

(b) Use um CAS para mostrar que a área interna do laço é $\frac{3}{2}$ (Figura 3.1.3*a*, do Volume 1).

C **56.** (a) Qual é a área envolvida por uma pétala da rosácea $r = a\cos n\theta$ se $n$ for um inteiro par?

(b) Qual é a área envolvida por uma pétala de rosácea $r = a\cos n\theta$ se $n$ for um inteiro ímpar?

(c) Use um CAS para mostrar que a área total envolvida pela rosácea $r = a\cos n\theta$ é $\pi a^2/2$ se o número de pétalas for par. [*Sugestão*: Veja o Exercício 78 da Seção 10.2]

(d) Use um CAS para mostrar que a área total envolvida pela rosácea $r = a\cos n\theta$ é $\pi a^2/4$ se o número de pétalas for ímpar.

**57.** Um dos mais famosos problemas na antiguidade grega era o da "quadratura do círculo", isto é, usando uma régua e um compasso, construir um quadrado cuja área fosse igual à de um círculo dado. Foi provado no século XIX que tal construção não era possível. Contudo, mostre que as áreas sombreadas na figura a seguir são iguais, portanto provamos a "quadratura da crescente".

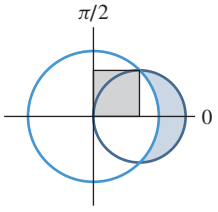



**Figura Ex-57**

**58.** Use um recurso gráfico para gerar o gráfico polar da equação $r = \cos 3\theta + 2$ e determine a área envolvida.

**59.** Use um recurso gráfico para gerar o gráfico do ***bifólio*** $r = 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$ e determine a área do laço superior.

**60.** Use a Fórmula (9) da Seção 10.1 para deduzir a Fórmula (3) do comprimento de arco de curvas polares.

**61.** Conforme ilustrado na figura abaixo, seja $P(r, \theta)$ um ponto da curva polar $r = f(\theta)$, seja $\psi$ o menor ângulo no sentido anti-

-horário que parte do raio estendido $OP$ até a reta tangente a $P$ e seja $\phi$ o ângulo de inclinação da reta tangente. Deduza a fórmula

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

substituindo $dy/dx$ por $\operatorname{tg}\phi$ na Fórmula (2) e aplicando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg}(\phi - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\phi\,\operatorname{tg}\theta}$$

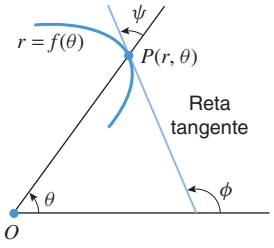



**Figura Ex-61**

**62-63** Use a fórmula para $\psi$ obtida no Exercício 61. ■

**62.** (a) Use a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

para mostrar que se $(r, \theta)$ for um ponto da cardioide

$$r = 1 - \cos\theta \qquad (0 \le \theta < 2\pi)$$

então $\psi = \theta/2$.

(b) Esboce a cardioide e mostre o ângulo $\psi$ nos pontos em que a cardioide cruza o eixo $y$.

(c) Determine o ângulo $\psi$ nos pontos em que a cardioide cruza o eixo $y$.

**63.** Mostre que para uma espiral logarítmica $r = ae^{b\theta}$, o ângulo da reta radial à reta tangente é constante ao longo da espiral (ver figura a seguir). [*Nota*: Por essa razão, espirais logarítmicas são, às vezes, chamadas de ***espirais equiangulares***.]

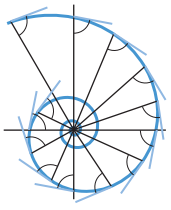


**Figura Ex-63**

**64.** (a) Na discussão associada com os Exercícios 75 a 80 da Seção 10.1, foram dadas fórmulas para a área da superfície de revolução que é gerada girando uma curva paramétrica em torno do eixo $x$ ou do eixo $y$. Use essas fórmulas para deduzir as seguintes fórmulas para as áreas de superfícies de revolução que são geradas girando a parte da curva polar $r = f(\theta)$, de $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$, em torno do eixo polar e em torno da reta $\theta = \pi/2$.

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi r \operatorname{sen}\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad \boxed{\text{Em torno de } \theta = 0}$$

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad \boxed{\text{Em torno de } \theta = \pi/2}$$

(b) Enuncie condições sob as quais essas fórmulas são verdadeiras.

**65-68** Esboce a superfície e use as fórmulas do Exercício 64 para determinar a área da superfície. ■

**65.** A superfície gerada girando o círculo $r = \cos\theta$ em torno da reta $\theta = \pi/2$.

**66.** A superfície gerada girando a espiral $r = e^\theta$ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ em torno da reta $\theta = \pi/2$.

**67.** A "maçã" gerada girando a parte superior da cardioide $r = 1 - \cos\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$ em torno do eixo polar.

**68.** A esfera de raio $a$ gerada girando o semicírculo $r = a$ do semiplano superior em torno do eixo polar.

**69.** **Texto**

(a) Mostre que se $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \pi$ e se $r_1$ e $r_2$ forem positivos, então a área $A$ de um triângulo de vértices $(0, 0)$, $(r_1, \theta_1)$ e $(r_2, \theta_2)$ será

$$A = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

(b) Use a fórmula obtida na parte (a) para descrever uma abordagem à resposta do Problema da Área 10.3.3 que utilize uma aproximação da região $R$ por triângulos em vez de cunhas circulares. Compatibilize sua abordagem com a Fórmula (6).

**70.** **Texto** Muitas vezes, para poder encontrar a área de uma região delimitada por duas curvas polares, é necessário determinar os pontos de interseção das duas curvas. Dê um exemplo ilustrando que os pontos de interseção das curvas $r = f(\theta)$ e $r = g(\theta)$ podem não coincidir com as soluções de $f(\theta) = g(\theta)$. Discuta algumas estratégias para determinar os pontos de interseção de curvas polares e forneça exemplos que ilustrem suas estratégias.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.3

**1.** (a) $\dfrac{r\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\,\dfrac{dr}{d\theta}}{-r\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\,\dfrac{dr}{d\theta}}$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = 0$ **2.** (a) $f(\theta_0) = 0$, $f'(\theta_0) \ne 0$ (b) $\theta_0 = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

**3.** (a) $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$ (b) 1 **4.** $\displaystyle\int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\, d\theta = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta$ **5.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} a^2\, d\theta = \pi a^2$

# 10.4 SEÇÕES CÔNICAS

*Nesta seção*, discutiremos algumas das propriedades geométricas básicas de parábolas, de elipses e de hipérboles. Essas curvas representam um papel importante no Cálculo e também surgem naturalmente em uma ampla variedade de aplicações em campos como movimento planetário, projeto de telescópios e antenas, posicionamento geodésico e a Medicina, para mencionar alguns.*

## SEÇÕES CÔNICAS

Círculos, elipses, parábolas e hipérboles são chamados de ***seções cônicas*** ou ***cônicas***, pois podem ser obtidos como a interseção de um plano com um cone circular (Figura 10.4.1). Se o plano passa no vértice do cone, então a interseção é um ponto, um par de retas coincidentes ou uma só reta. Estas são chamadas de ***seções cônicas degeneradas***.

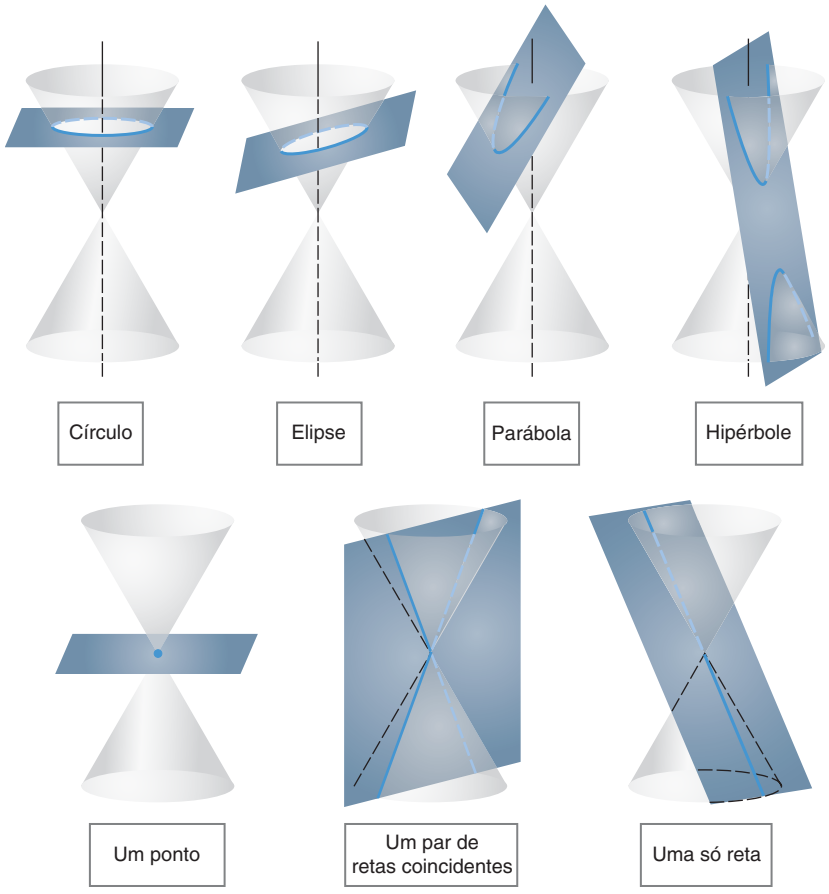



**Figura 10.4.1**

* Alguns alunos podem já estar familiarizados com o material desta seção; nesse caso, este mateiral pode ser tratado como revisão. Os professores que quiserem gastar tempo adicional numa revisão Pré-Cálculo, podem querer alocar mais do que uma aula a este material.

## DEFINIÇÕES DAS SEÇÕES CÔNICAS

Embora pudéssemos deduzir propriedades de parábolas, de elipses e de hipérboles definindo-as como interseções com um cone circular, será mais adequado ao Cálculo se começarmos com definições equivalentes que são baseadas em suas propriedades geométricas.

**10.4.1 DEFINIÇÃO** Uma ***parábola*** é o conjunto de todos os pontos no plano que são equidistantes de uma reta fixada e de um ponto fixado que não está na reta.

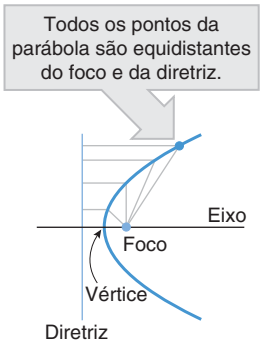



**Figura 10.4.2**

A reta é chamada de ***diretriz*** da parábola e o ponto é chamado de ***foco*** (Figura 10.4.2). Uma parábola é simétrica em relação à reta que passa pelo foco em ângulo reto com a diretriz. Tal reta, chamada de ***eixo*** ou ***eixo de simetria*** da parábola, intersecta a parábola em um ponto que é chamado de ***vértice.***

**10.4.2 DEFINIÇÃO** Uma ***elipse*** é o conjunto de todos os pontos no plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva dada, maior do que a distância entre os pontos fixados.

Os dois pontos fixados são chamados de ***focos*** da elipse, e o ponto médio do segmento que une os focos é chamado de ***centro*** (Figura 10.4.3*a*). Para ajudar a visualizar a Definição 10.4.2, imagine que as duas pontas de um barbante estejam pregadas nos focos e que um lápis descreva uma curva mantendo o barbante esticado (Figura 10.4.3*b*). A curva resultante será uma elipse, uma vez que a soma das distâncias aos focos é constante, a saber, o comprimento total do barbante. Note que, se os focos coincidirem, a elipse se reduz a um círculo. Para elipses outras que não sejam círculos, o segmento de reta através dos focos com extremidades na elipse é chamado de ***eixo maior*** (Figura 10.4.3*c*), e o segmento de reta através do centro com extremidades na elipse, e perpendicular ao eixo maior, é chamado de ***eixo menor***. As extremidades do eixo maior são chamadas de ***vértices***.

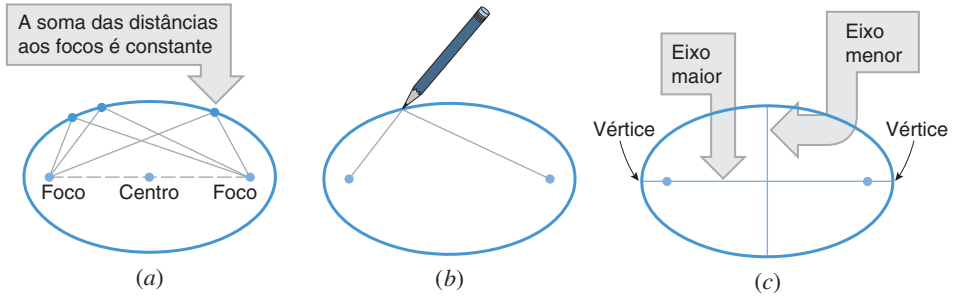



**Figura 10.4.3**

**10.4.3 DEFINIÇÃO** Uma ***hipérbole*** é o conjunto de todos os pontos no plano tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos distintos fixados é uma constante positiva dada, menor que a distância entre os dois pontos fixados.

Os dois pontos fixados são chamados de ***focos*** da hipérbole, e o termo "diferença" usado na definição deve ser entendido como a distância ao foco mais distante menos a distância ao foco mais próximo. Como resultado, os pontos da hipérbole formam dois ***ramos***, cada um dos quais "rodeando" o foco mais próximo (Figura 10.4.4*a*). O ponto médio do

segmento de reta que une os focos é chamado de ***centro*** da hipérbole, a reta que passa pelos focos é chamada de ***eixo focal***, e a reta que passa pelo centro e é perpendicular ao eixo focal é chamada de ***eixo conjugado***. A hipérbole intersecta o eixo focal em dois pontos, chamados de ***vértices***.

Associado com toda hipérbole existe um par de retas, chamadas de ***assíntotas*** da hipérbole. Essas retas cortam o centro da hipérbole e têm a propriedade que à medida que um ponto $P$ move-se ao longo da hipérbole afastando-se do centro, a distância vertical entre $P$ e uma das assíntotas tende a zero (Figura 10.4.4*b*)

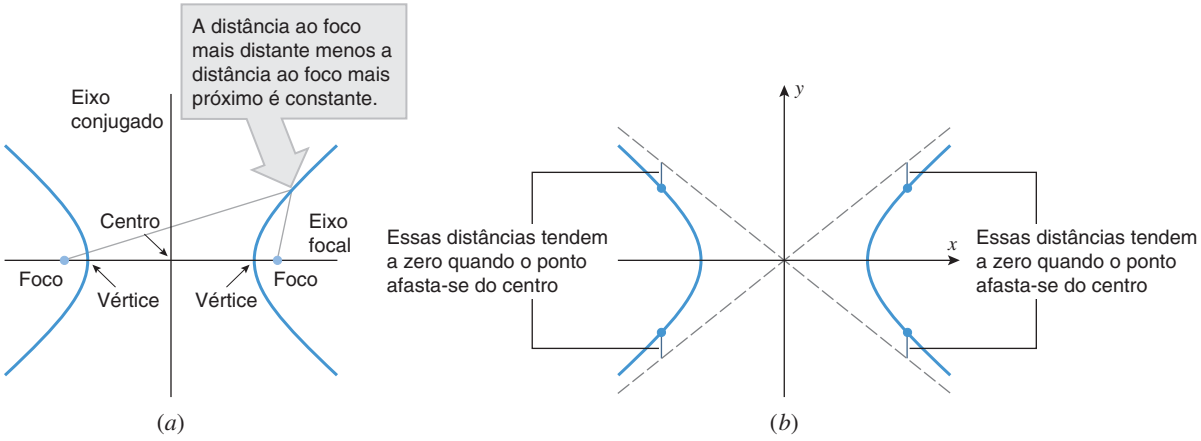



**Figura 10.4.4**

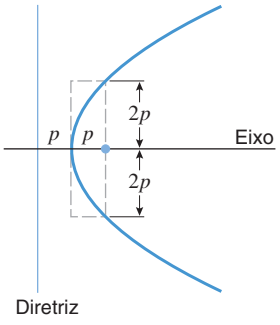



**Figura 10.4.5**

## EQUAÇÕES DE PARÁBOLAS EM POSIÇÃO PADRÃO

No estudo de parábolas, é tradicional denotar a distância entre o foco e o vértice por $p$. O vértice é equidistante do foco e da diretriz, logo a distância entre o vértice e a diretriz também é $p$; consequentemente, a distância entre o foco e a diretriz é $2p$ (Figura 10.4.5). Conforme ilustrado nessa figura, a parábola passa por dois dos cantos do retângulo que se estende do vértice para o foco ao longo do eixo de simetria e se estende $2p$ unidades acima e $2p$ unidades abaixo do eixo de simetria.

A equação de uma parábola é a mais simples se o vértice for a origem e se o eixo de simetria estiver ao longo do eixo $x$ ou do eixo $y$. As quatro possíveis orientações estão mostradas na Figura 10.4.6. Elas são chamadas de ***posições padrão*** de uma parabóla, e as equações resultantes são chamadas de ***equações padrão*** de uma parábola.

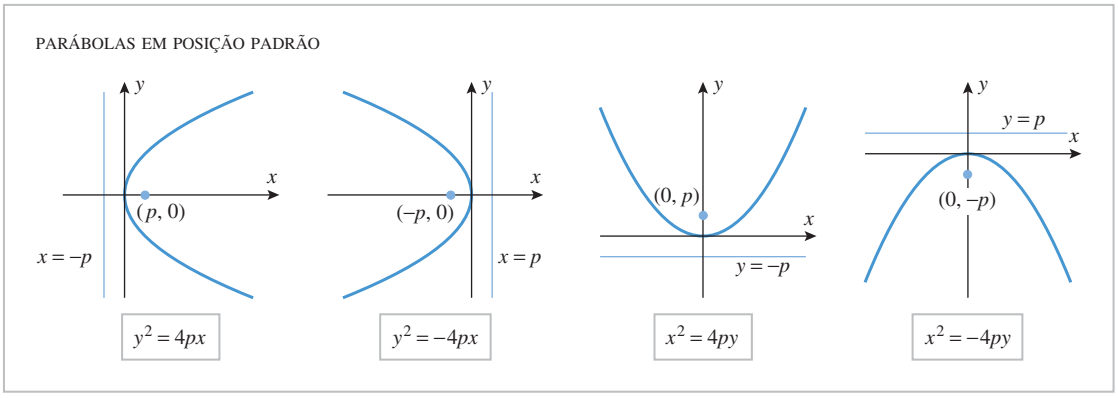



**Figura 10.4.6**

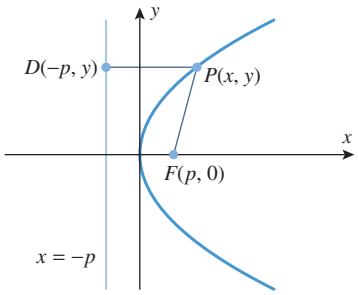



Figura 10.4.7

Para ilustrar como foram obtidas as equações na Figura 10.4.6, deduziremos a equação para a parábola com foco $(p, 0)$ e diretriz $x = -p$. Seja $P(x, y)$ qualquer ponto sobre a parábola. Como $P$ é equidistante do foco e diretriz, as distâncias $PF$ e $PD$ na Figura 10.4.7 são iguais; isto é,

$$PF = PD \tag{1}$$

onde $D(-p, y)$ é o pé da perpendicular de $P$ à diretriz. Pela fórmula da distância, as distâncias $PF$ e $PD$ são

$$PF = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad PD = \sqrt{(x+p)^2} \tag{2}$$

Substituindo em (1) e elevando ao quadrado, obtemos

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \tag{3}$$

e depois de simplificar

$$y^2 = 4px \tag{4}$$

As deduções das outras equações na Figura 10.4.6 são análogas.

## UMA TÉCNICA PARA ESBOÇAR PARÁBOLAS

As parábolas podem ser esboçadas a partir de suas *equações padrão* usando quatro passos básicos:

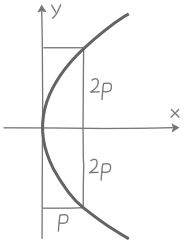
***Esboçando uma Parábola a Partir de Sua Equação Padrão***

**Passo 1** Determine se o eixo de simetria está ao longo do eixo $x$ ou do eixo y. Em referência à Figura 10.4.6, o eixo de simetria está ao longo do eixo $x$ se a equação tiver um termo $y^2$ e está ao longo do eixo $y$ se tiver um termo $x^2$.

**Passo 2** Determine de que maneira a parábola se abre. Se o eixo de simetria estiver ao longo do eixo $x$, então a parábola abre-se para a direita se os coeficientes de $x$ forem positivos e abre-se para a esquerda se os coeficientes forem negativos. Se o eixo de simetria estiver ao longo do eixo $y$, então a parábola abre-se para cima se os coeficientes de $y$ forem positivos e abre-se para baixo se forem negativos.

**Passo 3** Determine o valor de $p$ e desenhe uma caixa que se estenda $p$ unidades a partir da origem ao longo do eixo de simetria na direção em que a parábola se abre e que se estenda $2p$ unidades para cada lado do eixo de simetria.

**Passo 4** Usando a caixa como guia, esboce a parábola de forma que seu vértice esteja na origem e que ela passe pelos cantos da caixa (Figura 10.4.8).




Esboço rudimentar

Figura 10.4.8

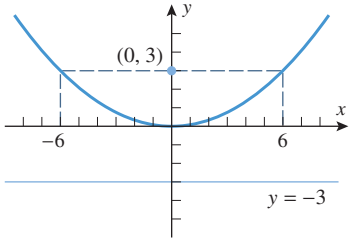
**► Exemplo 1** Esboce os gráficos das parábolas

$$\text{(a) } x^2 = 12y \qquad \text{(b) } y^2 + 8x = 0$$

e mostre o foco e a diretriz de cada uma.

***Solução (a)*** Essa equação envolve $x^2$, logo o eixo de simetria está ao longo do eixo $y$ e o coeficiente de $y$ é positivo, portanto a parábola abre-se para cima. Dos coeficientes de $y$, obtemos $4p = 12$ ou $p = 3$. Desenhando uma caixa que se amplie $p = 3$ unidades acima da origem e $2p = 6$ unidades à direita do eixo $y$, e usando os cantos da caixa como guia, obtemos o gráfico na Figura 10.4.9.

O foco está a $p = 3$ unidades do vértice ao longo do eixo de simetria na direção em que a parábola se abre, logo sua coordenada é (0, 3). A diretriz é perpendicular ao eixo de simetria e está a uma distância de $p = 3$ unidades do vértice no lado oposto do foco, portanto sua equação é $y = -3$.




$x^2 = 12y$

Figura 10.4.9

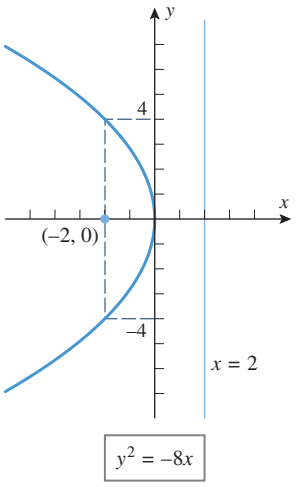



**Figura 10.4.10**

***Solução (b)*** Primeiramente, reescrevemos a equação na forma padrão

$$y^2 = -8x$$

Esta equação envolve $y^2$, assim o eixo de simetria está ao longo do eixo $x$, e o coeficiente de $x$ é negativo, logo a parábola se abre para a esquerda. Dos coeficientes de $x$, obtemos $4p = 8$, então $p = 2$. Desenhando uma caixa ampliada $p = 2$ unidades à esquerda da origem e $2p = 4$ unidades acima e $2p = 4$ unidades abaixo do eixo $x$, e usando os cantos da caixa como guia, obtemos o gráfico na Figura 10.4.10. ◄

**► Exemplo 2** Determine uma equação da parábola que seja simétrica em relação ao eixo $y$, tenha vértice na origem e passe pelo ponto (5, 2).

***Solução*** Como a parábola é simétrica em relação ao eixo $y$ e tem seu vértice na origem, a equação é da forma

$$x^2 = 4py \quad \text{ou} \quad x^2 = -4py$$

onde o sinal depende de a parábola abrir para cima ou para baixo. No entanto, a parábola deve abrir para cima, uma vez que ela passa pelo ponto (5, 2), que está situado no primeiro quadrante. Assim, a equação é da forma

$$x^2 = 4py \tag{5}$$

Como a parábola passa por (5, 2), devemos ter $5^2 = 4p \cdot 2$ ou $4p = \frac{25}{2}$. Portanto, (5) torna-se

$$x^2 = \tfrac{25}{2}y \quad ◄$$

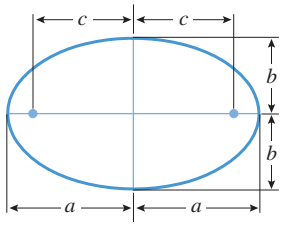



**Figura 10.4.11**

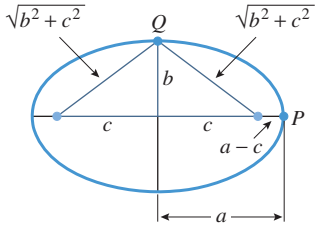



**Figura 10.4.12**

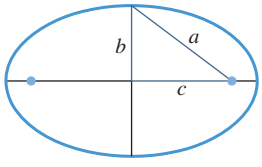



**Figura 10.4.13**

## ■ EQUAÇÕES DE ELIPSES EM POSIÇÃO PADRÃO

No estudo de elipses, é tradicional denotar o comprimento do eixo maior por $2a$, o comprimento do eixo menor por $2b$ e a distância entre os focos por $2c$ (Figura 10.4.11). O número $a$ é chamado ***semieixo maior*** e o número $b$, o ***semieixo menor*** (terminologia padrão, mas estranha, uma vez que $a$ e $b$ são números, não eixos geométricos).

Há uma relação básica entre os números $a$, $b$ e $c$ que pode ser obtida examinando a soma das distâncias aos focos a partir de um ponto $P$ na extremidade do eixo maior e de um ponto $Q$ na extremidade do eixo menor (Figura 10.4.12). A partir da Definição 10.4.2, essas somas devem ser iguais, logo obtemos

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = (a - c) + (a + c)$$

do que segue

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \tag{6}$$

ou de modo equivalente,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{7}$$

A partir de (6), a distância de um foco até uma extremidade do eixo menor é $a$ (Figura 10.4.13), o que implica que, para *todos* os pontos sobre a elipse, a soma das distâncias aos focos é $2a$.

Segue também de (6) que $a \geq b$, com a igualdade valendo apenas quando $c = 0$. Geometricamente, isso significa que o eixo maior de uma elipse é pelo menos tão grande quanto o eixo menor, e que os dois eixos têm o mesmo comprimento quando os focos coincidem, caso em que a elipse é um círculo.

A equação de uma elipse é a mais simples se o seu centro estiver na origem e os focos estiverem sobre o eixo $x$ ou do eixo $y$. As duas possíveis orientações mostradas na Figura 10.4.14. Elas são chamadas de ***posições padrão*** de uma elipse, e as equações resultantes são chamadas de ***equações padrão*** de uma elipse.

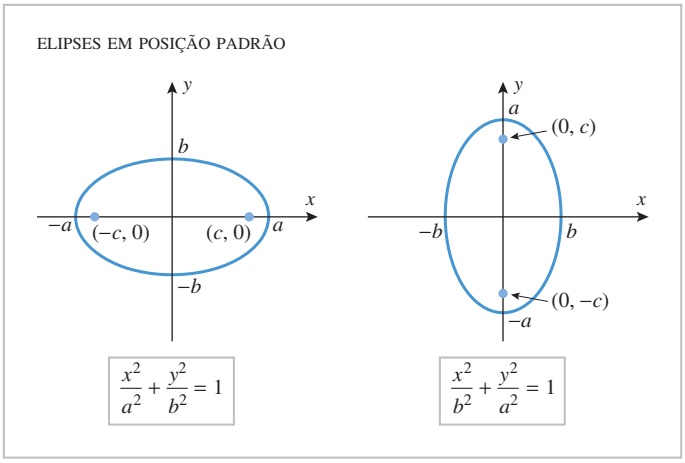



**Figura 10.4.14**

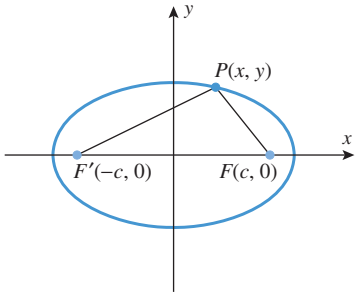



**Figura 10.4.15**

Para ilustrar como foram obtidas as equações na Figura 10.4.14, deduziremos a equação para a elipse com os focos no eixo $x$. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre a elipse. Uma vez que a soma das distâncias de $P$ até os focos é $2a$, tem-se (Figura 10.4.15) que

$$PF' + PF = 2a$$

logo

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Transpondo o segundo radical para o lado direito da equação e elevando ao quadrado, obtemos

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

e, simplificando,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x \tag{8}$$

Elevando ao quadrado outra vez e simplificando, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

que, devido a (6), podemos escrever como

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{9}$$

Reciprocamente, pode ser mostrado que qualquer ponto cujas coordenadas satisfizerem (9) tem $2a$ como a soma de suas distâncias aos focos, de modo que tal ponto estará na elipse.

## UMA TÉCNICA PARA ESBOÇAR ELIPSES

As elipses podem ser esboçadas a partir de suas equações padrão usando três passos básicos:

***Esboçando uma Elipse a Partir de Sua Equação Padrão***

**Passo 1** Determine se o eixo maior está sobre o eixo $x$ ou o eixo $y$. Isso pode ser verificado a partir do tamanho dos denominadores na equação. Em referência à Figura 10.4.14, e lembrando que $a^2 > b^2$ (uma vez que $a > b$), o eixo maior está ao longo do eixo $x$ se $x^2$ tiver o maior denominador e está ao longo do eixo $y$ se $y^2$ tiver o maior denominador. Se os denominadores forem iguais, a elipse é um círculo.

**Passo 2** Determine os valores de $a$ e $b$ e desenhe uma caixa que se estenda por $a$ unidades para cada lado a partir do centro ao longo do eixo maior, e por $b$ unidades para cada lado a partir do centro ao longo do eixo menor.

**Passo 3** Usando a caixa como guia, esboce a elipse de modo que seu centro esteja na origem e que ela toque os lados da caixa onde esses lados intersectam os eixos coordenados (Figura 10.4.16)

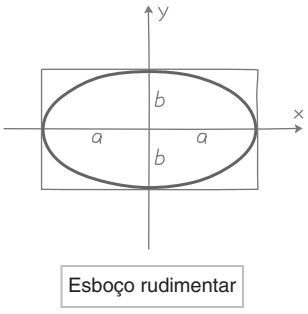



**Figura 10.4.16**

► **Exemplo 3** Mostrando os focos de cada uma, esboce os gráficos das elipses

$$\text{(a)}\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad \text{(b)}\ x^2+2y^2=4$$

***Solução (a)*** Como $y^2$ tem o maior denominador, o eixo maior está ao longo do eixo $y$. Além disso, como $a^2 > b^2$, devemos ter $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$, de modo que

$$a=4 \quad \text{e} \quad b=3$$

Desenhando como guia uma caixa que se estende 4 unidades para cada lado a partir da origem ao longo do eixo $y$ e 3 unidades para cada lado a partir da origem ao longo do eixo $x$, obtemos o gráfico na Figura 10.4.17.

Os focos situam-se a $c$ unidades de cada lado do centro ao longo do eixo maior, onde $c$ é dado por (7). A partir dos valores de $a^2$ e $b^2$ acima, obtemos

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}\approx 2{,}6$$

Assim, as coordenadas dos focos são $(0, \sqrt{7})$ e $(0, -\sqrt{7})$ já que estão situadas sobre o eixo $y$.

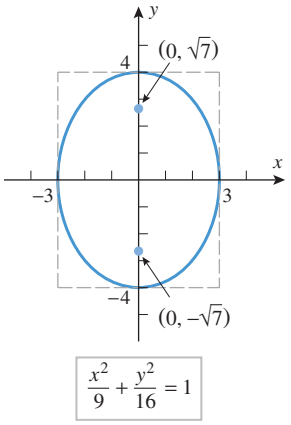



**Figura 10.4.17**

***Solução (b)*** Primeiramente, reescrevemos a equação na forma padrão

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

Como $x^2$ tem o maior denominador, o eixo maior situa-se ao longo do eixo $x$, e temos $a^2 = 4$ e $b^2 = 2$. Desenhando como guia uma caixa que se estende $a = 2$ para cada lado da origem ao longo do eixo $x$ e estendendo $b = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ unidade para cada lado da origem ao longo do eixo $y$, obtemos o gráfico na Figura 10.4.18.

De (7), obtemos

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}\approx 1{,}4$$

Assim, as coordenadas dos focos são $(\sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, 0)$, já que elas se situam sobre o eixo $x$. ◄

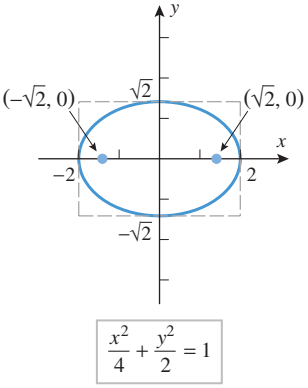



**Figura 10.4.18**

► **Exemplo 4** Determine uma equação para a elipse com focos $(0, \pm 2)$ e o eixo maior com extremos $(0, \pm 4)$.

***Solução*** A partir da Figura 10.4.14, a equação tem a forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

e, pela informação dada, $a = 4$ e $c = 2$. Segue de (6) que

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$$

de modo que a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \blacktriangleleft$$

## EQUAÇÕES DE HIPÉRBOLES EM POSIÇÃO PADRÃO

Nos estudos de hipérboles, é tradicional denotar a distância entre os vértices por $2a$, a distância entre os focos por $2c$ (Figura 10.4.19) e definir a quantidade $b$ como

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{10}$$

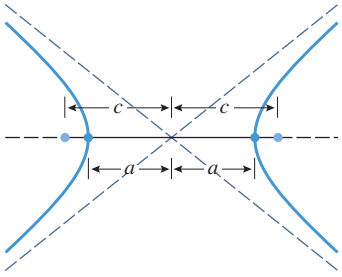



**Figura 10.4.19**

Essa relação, que pode também ser expressa como

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{11}$$

está desenhada na Figura 10.4.20. Conforme ilustrado naquela figura, e como mostraremos depois nesta seção, as assíntotas passam pelos cantos de uma caixa que se estende $b$ unidades para cada lado do centro ao longo do eixo conjugado e por $a$ unidades para cada lado do centro ao longo do eixo focal. O número $a$ é chamado de ***semieixo focal*** da hipérbole e o número $b$ o ***semieixo conjugado***. (Assim como o semieixo maior e o semieixo menor de uma elipse, esses semieixos são números, não eixos geométricos.)

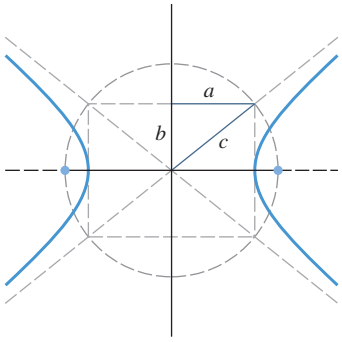



**Figura 10.4.20**

Se $V$ for um vértice de uma hipérbole, então, como ilustrado na Figura 10.4.21, a distância de $V$ até o foco mais distante menos a distância de $V$ até o foco mais próximo é

$$[(c - a) + 2a] - (c - a) = 2a$$

Assim, para *todos* os pontos da hipérbole, a distância ao foco mais distante menos a distância ao foco mais próximo é $2a$.

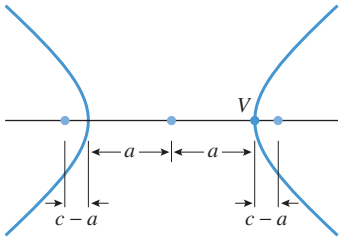



**Figura 10.4.21**

A equação de uma hipérbole é a mais simples se o seu centro estiver na origem e os focos estiverem sobre o eixo $x$ ou do eixo $y$. As duas possíveis orientações estão mostradas na Figura 10.4.22. Elas são chamadas de ***posições padrão*** de uma hipérbole, e as equações resultantes são chamadas de ***equações padrão*** de uma hipérbole.

As deduções dessas equações são similares àquelas já dadas para parábolas e elipses, portanto deixaremo-las como exercícios. Contudo, para ilustrar como as equações das assíntotas são deduzidas, deduziremos essas equações para a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Podemos reescrever essa equação como

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

que é equivalente ao par de equações

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

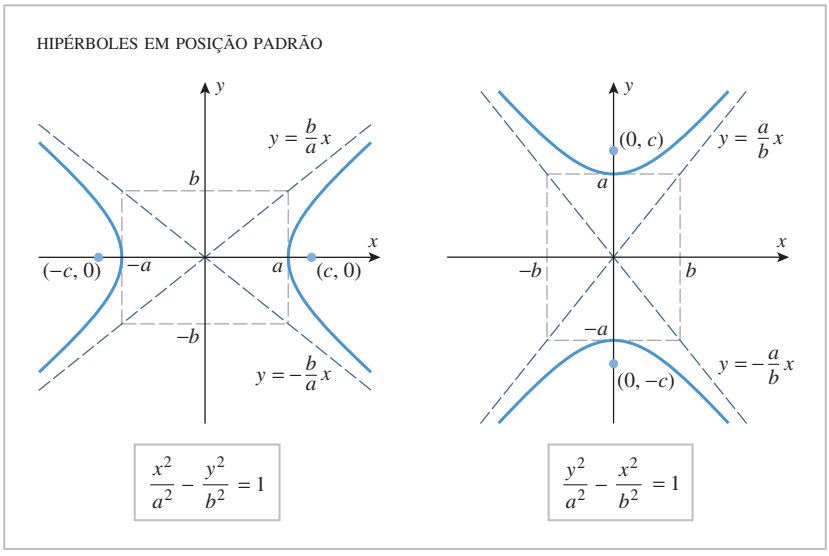



**Figura 10.4.22**

Assim, no primeiro quadrante, a distância vertical entre as retas $y = (b/a)x$ e a hipérbole pode ser reescrita como

$$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

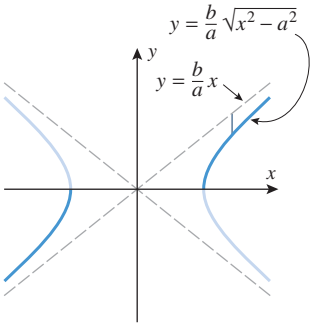



**Figura 10.4.23**

(Figura 10.4.23). Contudo, essa distância tende a zero quando $x \to +\infty$, uma vez que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = 0$$

A análise nos quadrantes restantes é análoga.

## UMA MANEIRA RÁPIDA DE ENCONTRAR AS ASSÍNTOTAS

Há uma dica que pode ser usada para evitar memorizar a equação das assíntotas de uma hipérbole. Elas podem ser obtidas, quando necessárias, substituindo o 1 pelo 0 no lado direito da equação da hipérbole e, então, resolvendo para $y$ em termos de $x$. Por exemplo, para a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

escreveríamos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \text{ou} \quad y = \pm\frac{b}{a}x$$

que são as equações das assíntotas.

## UMA TÉCNICA PARA ESBOÇAR HIPÉRBOLES

As hipérboles podem ser esboçadas a partir de suas *equações padrão* usando quatro passos básicos:

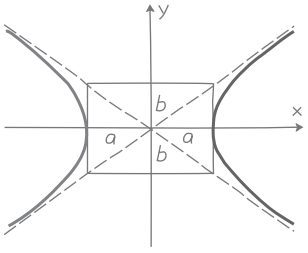
***Esboçando uma Hipérbole a Partir de Sua Equação Padrão***

**Passo 1** Determine se o eixo focal está sobre o eixo $x$ ou eixo $y$. Isso pode ser verificado a partir da posição do sinal de menos na equação. Em referência à Figura 10.4.22, o eixo focal está ao longo do eixo $x$ quando o sinal de menos preceder o termo $y^2$ e está ao longo do eixo $y$ quando o sinal de menos preceder o termo $x^2$.

**Passo 2** Determine os valores $a$ e $b$ e desenhe uma caixa que se estendenda por $a$ unidades para cada um dos dois lados do centro ao longo do eixo focal e por $b$ unidades para cada um dos dois lados do centro ao longo do eixo conjugado. (Os quadrados de $a$ e $b$ podem ser obtidos diretamente da equação.)

**Passo 3** Desenhe as assíntotas ao longo das diagonais da caixa.

**Passo 4** Usando a caixa e as assíntotas como guia, esboce o gráfico da hipérbole (Figura 10.4.24).




Esboço rudimentar

**Figura 10.4.24**

**▶ Exemplo 5** Esboce os gráficos das hipérboles

$$\text{(a)}\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1 \qquad \text{(b)}\ y^2-x^2=1$$

mostrando vértices, focos e assíntotas.

***Solução (a)*** O sinal de menos precede o termo $y^2$, portanto o eixo focal está ao longo do eixo $x$. A partir dos denominadores na equação, obtemos

$$a^2=4 \quad \text{e} \quad b^2=9$$

Uma vez que $a$ e $b$ são positivos, devemos ter $a=2$ e $b=3$. Lembrando que os vértices situam-se $a$ unidades em cada lado do centro sobre o eixo focal, tem-se que suas coordenadas, neste caso, são $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. Desenhando uma caixa estendida $a=2$ unidades ao longo do eixo $x$ em cada lado da origem e $b=3$ unidades em cada lado da origem ao longo do eixo $y$ e, então, desenhando como guia as assíntotas ao longo das diagonais da caixa, obtemos o gráfico na Figura 10.4.25.

Para obter equações para as assíntotas, substituimos 1 por 0 na equação dada, resultando

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=0 \quad \text{ou} \quad y=\pm\frac{3}{2}x$$

Os focos situam-se a $c$ unidades de cada lado do centro ao longo do eixo focal, sendo $c$ dado por (11). Dos valores de $a^2$ e $b^2$ acima, obtemos

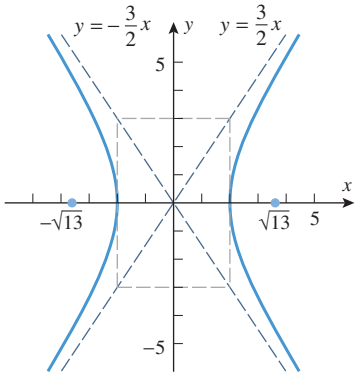
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\approx 3{,}6$$

Uma vez que os focos situam-se sobre o eixo $x$ neste caso, suas coordenadas são $(\sqrt{13}, 0)$ e $(-\sqrt{13}, 0)$.

***Solução (b)*** O sinal de menos precede o termo $x^2$, portanto o eixo focal está ao longo do eixo $y$. Os denominadores da equação são $a^2=1$ e $b^2=1$, do que segue que

$$a=1 \quad \text{e} \quad b=1$$

Assim, os vértices são $(0, -1)$ e $(0, 1)$. Desenhando uma caixa estendida $a=1$ unidade sobre qualquer um dos dois lados da origem ao longo do eixo $y$ e $b=1$ unidade em cada lado da origem ao longo do eixo $x$ e, então, desenhando as assíntotas, obtemos o gráfico na Figura 10.4.26. Uma vez que a caixa é, de fato, um quadrado, as assíntotas são perpendiculares e têm as equa-




$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

**Figura 10.4.25**

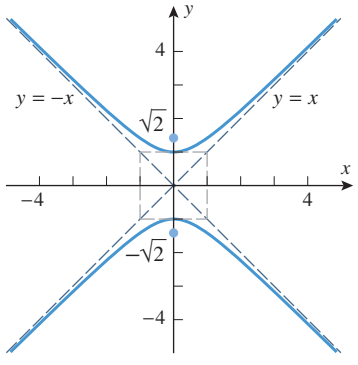



**Figura 10.4.26**

Uma hipérbole na qual $a = b$, como na parte (b) do Exemplo 5, é chamada de ***hipérbole equilátera***. Tais hipérboles sempre têm as assíntotas perpendiculares.

ções $y = \pm x$. Isso pode também ser visto substituindo 0 por 1 na equação dada, resultando $y^2 - x^2 = 0$ ou $y = \pm x$. Também,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

logo, os focos, que estão situados sobre o eixo $y$, são $(0, -\sqrt{2})$ e $(0, \sqrt{2})$. ◀

**▶ Exemplo 6** Determine a equação da hipérbole com vértices $(0, \pm 8)$ e assíntotas $y = \pm \frac{4}{3}x$.

***Solução*** Como os vértices estão sobre o eixo $y$, a equação da hipérbole tem a forma $(y^2/a^2) - (x^2/b^2) = 1$, e as assíntotas são

$$y = \pm \frac{a}{b}x$$

A partir da localização dos vértices, temos $a = 8$, portanto as equações dadas das assíntotas são

$$y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{8}{b}x = \pm \frac{4}{3}x$$

do que obtemos $b = 6$. Assim, a hipérbole tem a equação

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1 \quad \blacktriangleleft$$

## CÔNICAS TRANSLADADAS

As equações de cônicas que estão transladadas de suas posições padrão podem ser obtidas substituindo $x$ por $x - h$ e $y$ por $y - k$ nas equações padrão. Para uma parábola, isso translada o vértice da origem para o ponto $(h, k)$; para as elipses e hipérboles, isso translada o centro da origem para o ponto $(h, k)$.

***Parábolas com vértice (h, k) e eixo paralelo ao eixo x***

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad \text{[Aberta para a direita]} \tag{12}$$

$$(y - k)^2 = -4p(x - h) \quad \text{[Aberta para a esquerda]} \tag{13}$$

***Parábolas com vértice (h, k) e eixo paralelo ao eixo y***

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad \text{[Aberta para cima]} \tag{14}$$

$$(x - h)^2 = -4p(y - k) \quad \text{[Aberta para baixo]} \tag{15}$$

***Elipse com centro (h, k) e eixo maior paralelo ao eixo x***

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad [b < a] \tag{16}$$

***Elipse com centro (h, k) e eixo maior paralelo ao eixo y***

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \quad [b < a] \tag{17}$$

***Hipérbole com centro (h, k) e eixo focal paralelo ao eixo x***

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \tag{18}$$

***Hipérbole com centro (h, k) e eixo focal paralelo ao eixo y***

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \tag{19}$$

**► Exemplo 7** Determine uma equação da parábola que tem seu vértice em (1, 2) e o foco em (4, 2).

***Solução*** Como o foco e o vértice estão numa reta horizontal e como o foco está à direita do vértice, a parábola abre para a direita e sua equação é da forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Como o vértice e o foco estão a uma distância de 3 unidades, temos $p = 3$, e como o vértice é $(h, k) = (1, 2)$, obtemos

$$(y - 2)^2 = 12(x - 1) \quad \blacktriangleleft$$

Às vezes, as equações das cônicas transladadas ocorrem em uma forma não simplificada; nesse caso, enfrentamos o problema de identificar o gráfico de uma equação quadrática em $x$ e $y$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{20}$$

O procedimento básico para determinar a natureza de tal gráfico é completar os quadrados dos termos quadráticos e tentar igualar a equação resultante com uma das formas das cônicas transladadas.

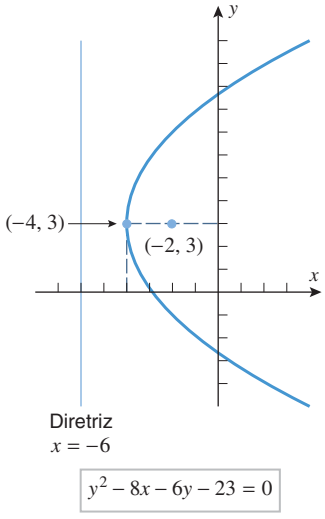



**Figura 10.4.27**

**► Exemplo 8** Determine o gráfico da equação

$$y^2 - 8x - 6y - 23 = 0$$

***Solução*** A equação envolve termos quadráticos em $y$ mas nenhum em $x$; portanto, primeiro colocamos todos os termos de $y$ em um mesmo lado:

$$y^2 - 6y = 8x + 23$$

A seguir, completamos o quadrado nos termos em $y$ somando 9 em cada lado:

$$(y - 3)^2 = 8x + 32$$

Finalmente, fatorando o coeficiente do termo em $x$, obtemos

$$(y - 3)^2 = 8(x + 4)$$

Essa equação está na forma (12) com $h = -4$, $k = 3$ e $p = 2$; assim, o gráfico é uma parábola com vértice $(-4, 3)$ aberta para a direita. Uma vez que $p = 2$, o foco está a 2 unidades à direita do vértice, o que o localiza no ponto $(-2, 3)$; e a diretriz está a 2 unidades à esquerda do vértice, o que significa que sua equação é $x = -6$. A parábola está mostrada na Figura 10.4.27. ◄

**► Exemplo 9** Descreva o gráfico da equação

$$16x^2 + 9y^2 - 64x - 54y + 1 = 0$$

***Solução*** Essa equação envolve termos quadráticos em $x$ e $y$; portanto, agrupamos os termos com $x$ e os termos com $y$ em um lado e a constante no outro:

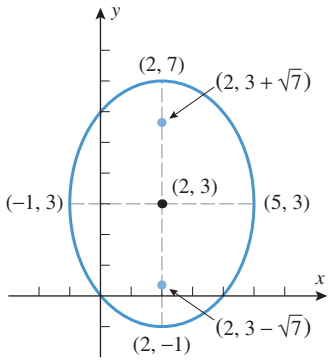
$$(16x^2 - 64x) + (9y^2 - 54y) = -1$$

Em seguida, fatoramos os coeficientes de $x^2$ e $y^2$ e completamos os quadrados:

$$16(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = -1 + 64 + 81$$

ou

$$16(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 144$$




$16x^2 + 9y^2 - 64x - 54y + 1 = 0$

**Figura 10.4.28**

Finalmente, dividindo por 144, introduzimos um 1 no lado direito:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

Isso é uma equação da forma (17), com $h = 2$, $k = 3$, $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$. Assim, o gráfico da equação é uma elipse com centro (2, 3) e o eixo maior paralelo ao eixo $y$. Como $a = 4$, o eixo maior estende-se a 4 unidades acima e 4 unidades abaixo do centro. Desse modo, os extremos são (2, 7) e (2, −1) (Figura 10.4.28). Como $b = 3$, o eixo menor estende-se a 3 unidades à esquerda e 3 unidades à direita do centro, de modo que seus extremos são (−1, 3) e (5, 3). Como

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

os focos situam-se a $\sqrt{7}$ unidades acima e abaixo do centro, localizando-se nos pontos $(2, 3 + \sqrt{7})$ e $(2, 3 - \sqrt{7})$. ◀

**▶ Exemplo 10** Descreva o gráfico da equação

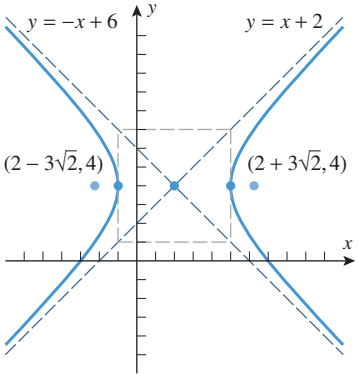
$$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 21 = 0$$

***Solução*** Essa equação envolve termos quadráticos em $x$ e $y$; portanto, agrupamos os termos com $x$ e os termos com $y$ em um lado e a constante no outro:

$$(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) = 21$$

Deixamos a cargo do leitor verificar que, completando o quadrado, essa equação pode ser escrita como

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \qquad (21)$$




$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 21 = 0$

**Figura 10.4.29**

Essa é uma equação da forma (18) com $h = 2$, $k = 4$, $a^2 = 9$ e $b^2 = 9$. Assim, a equação representa uma hipérbole com centro (2, 4) e eixo focal paralelo ao eixo $x$. Como $a = 3$, os vértices estão localizados a 3 unidades à esquerda e à direita do centro, ou seja, nos pontos (−1, 4) e (5, 4). Por (11), $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$; logo, os focos estão localizados a $3\sqrt{2}$ unidades à esquerda e à direita do centro, isto é, nos pontos $(2 - 3\sqrt{2}, 4)$ e $(2 + 3\sqrt{2}, 4)$.

As equações das assíntotas podem ser encontradas usando o truque de substituir 1 por 0 em (21), para obter

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{9} = 0$$

Isso pode ser escrito como $y - 4 = \pm(x - 2)$, de onde resultam as assíntotas

$$y = x + 2 \quad \text{e} \quad y = -x + 6$$

Com a ajuda de uma caixa estendida $a = 3$ unidades à esquerda e à direita do centro e $b = 3$ unidades acima e abaixo do centro, obtemos o esboço na Figura 10.4.29. ◀

## ■ PROPRIEDADES DE REFLEXÃO DAS SEÇÕES CÔNICAS

As parábolas, elipses e hipérboles têm certas propriedades de reflexão que as fazem extremamente importantes em várias aplicações. Nos exercícios, solicitamos ao leitor que prove os seguintes resultados.

**10.4.4** TEOREMA **(*Propriedade de Reflexão da Parábola*)** *A reta tangente em um ponto P da parábola faz ângulos iguais com a reta que passa por P paralela ao eixo de simetria e com a reta que passa por P e o foco* (Figura 10.4.30*a*).

**10.4.5** TEOREMA **(*Propriedade de Reflexão da Elipse*)** *Uma reta tangente a uma elipse em um ponto P faz ângulos iguais com as retas que unem P aos focos* (Figura 10.4.30*b*).

**10.4.6** TEOREMA **(*Propriedade de Reflexão da Hipérbole*)** *Uma reta tangente à hipérbole em um ponto P faz ângulos iguais com as retas que unem P aos focos.* (Figura 10.4 30*c*).

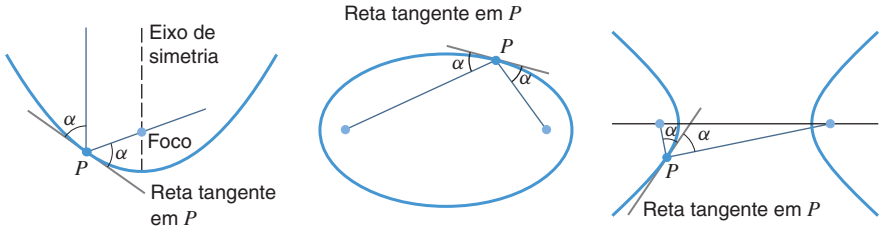
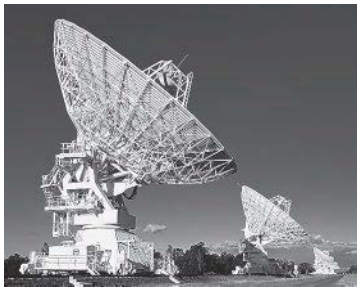



**Figura 10.4.30**

## APLICAÇÕES DAS SEÇÕES CÔNICAS



John Mead/Science Photo Library/Photo Researchers
*Sinais incidentes são refletidos pela antena parabólica para o receptor no foco.*

O princípio de Fermat na Óptica implica que a luz se reflete em uma superfície em um ângulo igual ao ângulo de incidência (ver Exercício 64 na Seção 4.5, do Volume 1). Em particular, se uma superfície refletora for gerada pela revolução de uma parábola em torno de seu eixo de simetria, então segue do Teorema 10.4.4 que todos os raios de luz entrando paralelamente ao eixo $x$ serão refletidos no foco (Figura 10.4.31*a*); reciprocamente, se uma fonte de luz estiver localizada no foco, então os raios refletidos serão paralelos ao eixo (Figura 10.4.31*b*). Esse princípio é usado em certos telescópios para refletir os raios de luz aproximadamente paralelos de estrelas e planetas de um espelho parabólico para uma lente no foco; os refletores parabólicos de uma lanterna e os faróis de um carro utilizam tal princípio para formar um feixe paralelo de raios de luz a partir de uma lâmpada localizada no foco. O mesmo princípio óptico é aplicado aos sinais de radares e ondas sonoras, o que explica a forma de muitas antenas.

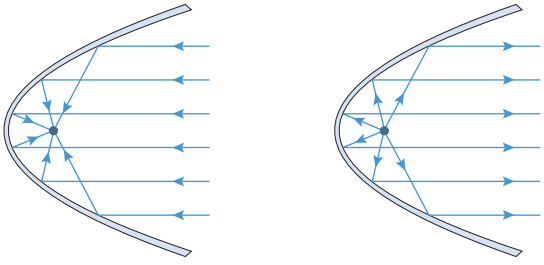



**Figura 10.4.31**

Visitantes de várias salas do Capitólio dos Estados Unidos e da Catedral de São Paulo em Londres ficam muitas vezes atônitos com a "galeria de sussurros", efeito segundo o qual duas pessoas em lados opostos da sala podem ouvir os sussurros um do outro muito nitidamente. Tais salas têm tetos com seções transversais elípticas e focos em comum. Assim, quando duas pessoas ficam nos focos, seus sussurros são refletidos diretamente de um para o outro pelo teto elíptico.

Os ***sistemas de navegação hiperbólico*** foram desenvolvidos na Segunda Guerra Mundial como ajuda na navegação dos navios e são baseados na definição de uma hipérbole. Com esses

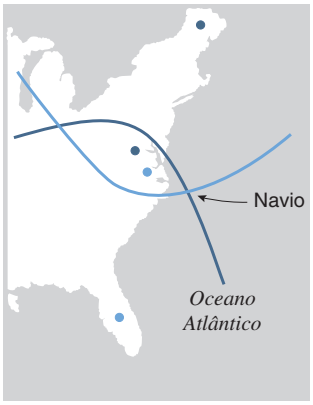



**Figura 10.4.32**

sistemas, o navio recebe sinais sincronizados de rádio a partir de dois transmissores à grande distância com suas posições conhecidas. O receptor eletrônico do navio mede a diferença nos tempos de recepção entre os sinais e usa essa diferença para calcular a diferença $2a$ entre suas distâncias dos transmissores. Essa informação coloca o navio em algum ponto da hipérbole, cujos focos estão nos transmissores e cujos pontos têm $2a$ como a diferença entre suas distâncias dos focos. Repetindo-se o processo com um segundo conjunto de transmissores, a posição do navio pode ser aproximada como a interseção de duas hipérboles (Figura 10.4.32). [O moderno sistema de posicionamento global (GPS) é baseado no mesmo princípio.]

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.4 (*Ver página 748 para respostas.*)

**1.** Identifique a cônica.
(a) O conjunto de pontos do plano tais que a soma das distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva maior do que a distância entre esses pontos fixados é _____.
(b) O conjunto de pontos do plano tais que a diferença das distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva menor do que a distância entre esses pontos fixados é _____.
(c) O conjunto de pontos do plano equidistantes de uma reta fixada e de um ponto fixado fora dessa reta é _____.

**2.** (a) A equação da parábola com foco $(p, 0)$ e diretriz $x = -p$ é _____.
(b) A equação da parábola com foco $(0, p)$ e diretriz $y = -p$ é _____.

**3.** (a) Suponha que uma elipse tenha semieixo maior $a$ e semieixo menor $b$. Então, para cada ponto da elipse, a soma das distâncias aos focos é igual a _____.
(b) As duas equações padrão da elipse de semieixo maior $a$ e semieixo menor $b$ são _____ e _____.
(c) Suponha que uma elipse tenha semieixo maior $a$, semieixo menor $b$ e focos $(\pm c, 0)$. Então, $c$ pode ser obtido a partir de $a$ e $b$ pela equação $c =$ _____.

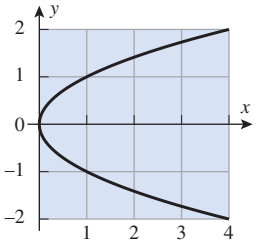
**4.** (a) Suponha que uma hipérbole tenha semieixo focal $a$ e semieixo conjugado $b$. Então, para cada ponto da hipérbole, a distância ao foco mais afastado menos a distância ao foco mais próximo é igual a _____.
(b) As duas equações padrão da hipérbole de semieixo focal $a$ e semieixo conjugado $b$ são _____ e _____.
(c) Suponha que uma hipérbole em posição padrão tenha semieixo focal $a$, semieixo conjugado $b$ e focos $(\pm c, 0)$. Então, $c$ pode ser obtido a partir de $a$ e $b$ pela equação $c =$ _____. As equações das assíntotas dessa hipérbole são $y = \pm$ _____.

## EXERCÍCIOS 10.4 Recurso Gráfico C CAS

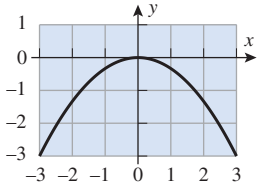
### ENFOCANDO CONCEITOS

**1.** Nas partes (a) a (f), determine a equação da cônica.

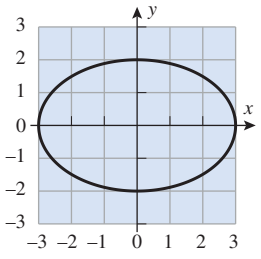
(a)



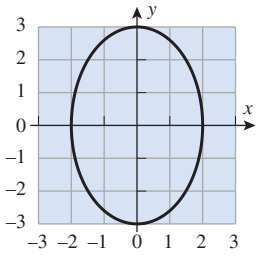

(b)



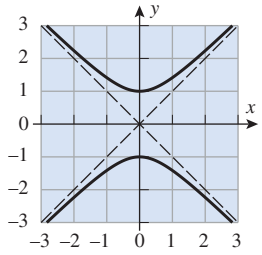

(c)



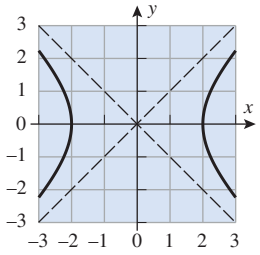

(d)



(e)



(f)



**2.** (a) Determine o foco e a diretriz de cada parábola do Exercício 1.
(b) Determine os focos das elipses do Exercício 1.
(c) Determine os focos e as equações das assíntotas das hipérboles do Exercício 1.

**3-6** Esboce a parábola e indique o foco, o vértice e a diretriz. ■

**3.** (a) $y^2 = 4x$ (b) $x^2 = -8y$

**4.** (a) $y^2 = -10x$ (b) $x^2 = 4y$

**5.** (a) $(y-1)^2 = -12(x+4)$ (b) $(x-1)^2 = 2(y-\frac{1}{2})$

**6.** (a) $y^2 - 6y - 2x + 1 = 0$ (b) $y = 4x^2 + 8x + 5$

**7-10** Esboce a elipse e indique os focos, os vértices e os extremos do eixo menor. ■

**7.** (a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ (b) $9x^2 + y^2 = 9$

**8.** (a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ (b) $4x^2 + y^2 = 36$

**9.** (a) $(x+3)^2 + 4(y-5)^2 = 16$
(b) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}(y+2)^2 - 1 = 0$

**10.** (a) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$
(b) $5x^2 + 9y^2 + 20x - 54y = -56$

**11-14** Esboce a hipérbole e indique os vértices, os focos e as assíntotas. ■

**11.** (a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ (b) $9y^2 - x^2 = 36$

**12.** (a) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{25} = 1$ (b) $16x^2 - 25y^2 = 400$

**13.** (a) $\dfrac{(y+4)^2}{3} - \dfrac{(x-2)^2}{5} = 1$
(b) $16(x+1)^2 - 8(y-3)^2 = 16$

**14.** (a) $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$
(b) $16x^2 - y^2 - 32x - 6y = 57$

**15-18** Encontre uma equação para a parábola que satisfaça as condições dadas. ■

**15.** (a) Vértice (0, 0); foco (3, 0).
(b) Vértice (0, 0); diretriz $y = \frac{1}{4}$.

**16.** (a) Foco (6, 0); diretriz $x = -6$.
(b) Foco (1, 1); diretriz $y = -2$.

**17.** Eixo $y = 0$; passando pelos pontos (3, 2) e $(2, -\sqrt{2})$.

**18.** Vértice (5, −3); eixo paralelo ao eixo $y$; passando por (9, 5).

**19-22** Encontre uma equação para a elipse que satisfaça as condições dadas. ■

**19.** (a) Extremidades do eixo maior $(\pm 3, 0)$; extremidades do eixo menor $(0, \pm 2)$.
(b) Comprimento do eixo menor 8; focos $(0, \pm 3)$.

**20.** (a) Focos $(\pm 1, 0)$; $b = \sqrt{2}$.
(b) $c = 2\sqrt{3}$; $a = 4$; centro na origem; focos sobre um eixo coordenado (duas respostas).

**21.** (a) Extremidades do eixo maior $(0, \pm 6)$; passa por $(-3, 2)$.
(b) Focos $(-1, 1)$ e $(-1, 3)$; eixo menor de comprimento 4.

**22.** (a) Centro em (0, 0); eixos maior e menor ao longo dos eixos coordenados; passa por (3, 2) e (1, 6).
(b) Focos (2, 1) e (2, −3); eixo maior de comprimento 6.

**23-26** Encontre uma equação para a hipérbole que satisfaça as condições dadas. (*Nota*: Em alguns casos, pode haver mais de uma hipérbole.) ■

**23.** (a) Vértices $(\pm 2, 0)$; focos $(\pm 3, 0)$.
(b) Vértices $(0, \pm 2)$; assíntotas $y = \pm\frac{2}{3}x$.

**24.** (a) Assíntotas $y = \pm\frac{3}{2}x$; $b = 4$.
(b) Focos $(0, \pm 5)$; assíntotas $y = \pm 2x$.

**25.** (a) Assíntotas $y = \pm\frac{3}{4}x$; $c = 5$.
(b) Focos $(\pm 3, 0)$; assíntotas $y = \pm 2x$.

**26.** (a) Vértices (0, 6) e (6, 6); distância entre os focos de 10 unidades.
(b) Assíntotas $y = x - 2$ e $y = -x + 4$; passa pela origem.

**27-30 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**27.** Uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos do plano que equidistam de uma reta fixada e de um ponto fixado fora dessa reta.

**28.** Se uma elipse não for um círculo, então seus focos estarão no eixo maior da elipse.

**29.** Se uma parábola tiver uma equação $y^2 = 4px$, em que $p$ é uma constante positiva, então $p$ será a distância perpendicular do foco da parábola à diretriz.

**30.** A hipérbole $(y^2/a^2) - x^2 = 1$ tem assíntotas dadas pelas retas $y = \pm x/a$.

**31.** (a) Como ilustrado na figura abaixo, um arco parabólico cruza uma estrada de 40 pés de extensão. Qual é a altura do arco se uma seção do centro da estrada com 20 pés de extensão tem um vão livre de, no mínimo, 12 pés?
(b) Qual seria a altura do centro se o arco fosse a metade superior de uma elipse?

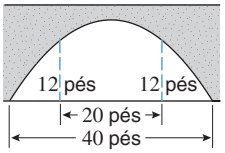



**Figura Ex-31**

**32.** (a) Determine uma equação para o arco parabólico de base $b$ e altura $h$ mostrado na Figura Ex-32.

(b) Determine a área sob o arco.

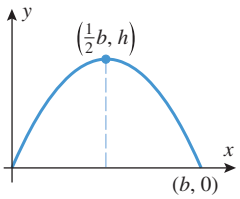



**Figura Ex-32**

**33.** Mostre que o vértice é o ponto da parábola mais próximo do foco. [*Sugestão*: Introduza um sistema de coordenadas conveniente e use a Definição 10.4.1.]

**34.** Conforme ilustrado na figura a seguir, suponha que um cometa mova-se em uma órbita parabólica com o Sol em seu foco, e que a reta que passa pelo Sol e o cometa faça um ângulo de 60° com o eixo da parábola quando o cometa está a 40 milhões de milhas do centro do Sol. Use o resultado do Exercício 33 para determinar quão próximo o cometa chegará do centro do Sol.

**35.** Para o refletor parabólico na figura abaixo, a que distância do vértice deve ser colocada a fonte de luz para produzir um feixe de raios paralelos?

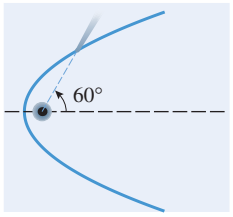



**Figura Ex-34**

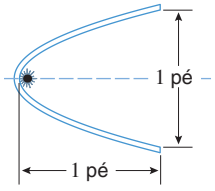



**Figura Ex-35**

**36.** (a) Mostre que os ramos direito e esquerdo da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

podem ser representados parametricamente como

$$x = \quad a\cosh t, \quad y = b\,\text{senh}\, t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$
$$x = -a\cosh t, \quad y = b\,\text{senh}\, t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

(b) Use um recurso gráfico para gerar ambos os ramos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ sobre uma mesma tela.

**37.** (a) Mostre que os ramos direito e esquerdo da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

podem ser representados parametricamente por

$$x = \quad a\sec t, \quad y = b\,\text{tg}\, t \qquad (-\pi/2 < t < \pi/2)$$
$$x = -a\sec t, \quad y = b\,\text{tg}\, t \qquad (-\pi/2 < t < \pi/2)$$

(b) Use um recurso gráfico para gerar ambos os ramos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ na mesma tela.

**38.** Determine uma equação da parábola descrita por um ponto em movimento tal que a sua distância até o ponto (2, 4) seja a mesma que sua distância ao eixo $x$.

**39.** Determine uma equação da elipse descrita por um ponto em movimento tal que a soma de suas distâncias a (4, 1) e (4, 5) seja 12.

**40.** Determine a equação da hipérbole descrita por um ponto em movimento tal que a diferença entre as distâncias a (0, 0) e (1, 1) seja 1.

**41.** Suponha que a base de um sólido seja elíptica com o eixo maior de comprimento 9 e eixo menor de comprimento 4. Determine o volume do sólido se as seções tranversais perpendiculares ao eixo maior forem quadrados (veja a figura a seguir).

**42.** Suponha que a base de um sólido seja elíptica com o eixo maior de comprimento 9 e o eixo menor de comprimento 4. Determine o volume do sólido se as seções tranversais perpendiculares ao eixo menor forem triângulos equiláteros (veja a figura a seguir).

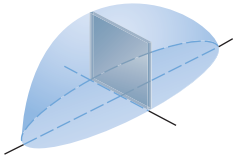


**Figura Ex-41**

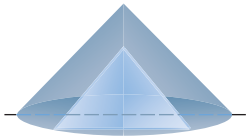


**Figura Ex-42**

**43.** Mostre que uma elipse com semieixo maior $a$ e semieixo menor $b$ tem área $A = \pi ab$.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**44.** Mostre que se um plano não for paralelo ao eixo de um cilindro circular reto, então a interseção do plano com o cilindro é uma elipse (possivelmente um círculo). [*Sugestão:* Seja $\theta$ o ângulo mostrado na figura abaixo, introduza eixos coordenados como mostrado e expresse $x'$ e $y'$ em termos de $x$ e $y$.]

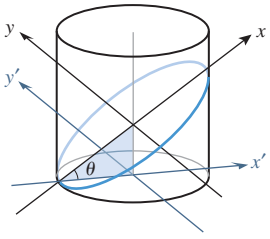



**Figura Ex-44**

**45.** Conforme ilustrado na figura a seguir, um carpinteiro precisa cortar um buraco elíptico em um telhado inclinado para inserir verticalmente um respiradouro circular com diâmetro $D$. O carpinteiro deseja esboçar o buraco no telhado usando dois percevejos, um lápis e um barbante (conforme a Figura 10.4.3*b*). O ponto central da elipse é conhecido, e o senso comum sugere que o eixo maior seja perpendicular à linha da calha do telhado. Ele precisa determinar o comprimento $L$ do barbante e a distância $T$ entre um percevejo e o ponto central. O plano do arquiteto mostra que a inclinação do telhado é $p$ (inclinação = altura sobre a base; veja a figura a seguir). Encontre $T$ e $L$ em termos de $D$ e $p$.

***Fonte:*** Este exercício baseia-se em um artigo de William H. Enos que apareceu no *Mathematics Teacher*, Fevereiro de 1991, p.148.

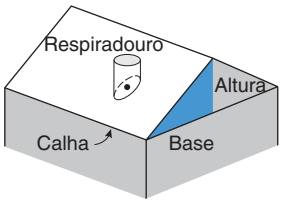



**Figura Ex-45**

**46.** Conforme ilustrado na figura a seguir, suponha que dois observadores estejam posicionados nos pontos $F_1\,(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ no sistema de coordenadas $xy$. Suponha também que o som de uma explosão no plano $xy$ seja ouvido pelo observador $F_1$ e que $t$ segundos depois seja ouvido pelo observador $F_2$. Supondo que a velocidade do som é uma constante $v$, mostre que a explosão ocorreu em algum lugar da hipérbole

$$\frac{x^2}{v^2t^2/4} - \frac{y^2}{c^2 - (v^2t^2/4)} = 1$$

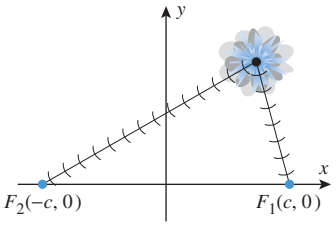



**Figura Ex-46**

**47.** Conforme ilustrado na figura a seguir, suponha que duas estações de transmissão estejam posicionadas a 100 km uma da outra nos pontos $F_1(50, 0)$ e $F_2\,(-50, 0)$ ao longo de uma praia reta, num sistema de coordenadas $xy$. Suponha também que um navio esteja navegando paralelo à praia, 200 km mar adentro. Encontre as coordenadas do navio se as estações transmitem simultaneamente um pulso, mas o pulso de $F_1$ seja recebido pelo navio 100 microsegundos antes do que o pulso da estação $F_2$. [Suponha que o pulso viaje à velocidade da luz (299.792.458 m/s).]

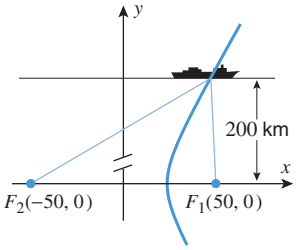



**Figura Ex-47**

**48.** Uma torre de resfriamento nuclear deve ter uma altura de $h$ metros e o formato do sólido obtido girando em torno do eixo $y$ a região $R$ delimitada pelo ramo direito da hipérbole $1.521x^2 - 225y^2 = 342.225$ e as retas $x = 0$, $y = -h/2$ e $y = h/2$.

(a) Encontre o volume da torre.

(b) Encontre a área de superfície lateral da torre.

**49.** Seja $R$ a região acima do eixo $x$ delimitada entre a curva $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ e a reta $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

(a) Esboce o sólido gerado pela revolução de $R$ em torno do eixo $x$ e encontre seu volume.

(b) Esboce o sólido gerado pela revolução de $R$ em torno do eixo $y$ e encontre seu volume.

C **50.** Conforme ilustrado na figura a seguir, o tanque de um caminhão de óleo mede 18 pés de comprimento e tem uma seção transversal elíptica que tem 6 pés de extensão e 4 pés de altura.

(a) Mostre que o volume $V$ do tanque do óleo (em pés cúbicos), quando estiver preenchido a uma profundidade de $h$ pés, é

$$V = 27\left[4 \operatorname{arc\,sen}\frac{h-2}{2} + (h-2)\sqrt{4h - h^2} + 2\pi\right]$$

(b) Use a capacidade numérica de encontrar raízes de um CAS para determinar a quantas polegadas da base da vareta que verifica o nível de óleo deveriam ser colocadas as marcas que indicam $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ da capacidade do tanque.

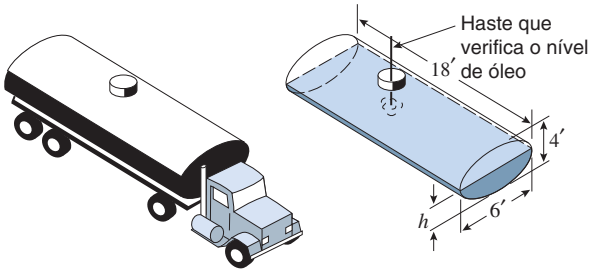



**Figura Ex-50**

**51.** Prove: A reta tangente à parábola $x^2 = 4py$ no ponto $(x_0, y_0)$ é $x_0x = 2p(y + y_0)$.

**52.** Prove: A reta tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto $(x_0, y_0)$ tem a equação

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

**53.** Prove: A reta tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto $(x_0, y_0)$ tem a equação

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

**54.** Use os resultados dos Exercícios 52 e 53 para mostrar que se uma elipse e uma hipérbole têm os mesmos focos, então em cada ponto de interseção suas retas tangentes são perpendiculares.

**55.** Determine os dois valores de $k$ tais que a reta $x + 2y = k$ seja tangente à elipse $x^2 + 4y^2 = 8$. Determine os pontos de tangência.

**56.** Determine as coordenadas de todos os pontos da hipérbole

$$4x^2 - y^2 = 4$$

nos quais as duas retas que passam pelo ponto e os focos são perpendiculares.

**57.** Uma reta tangente à hipérbole $4x^2 - y^2 = 36$ intersecta o eixo $y$ no ponto (0, 4). Determine o(s) ponto(s) de tangência.

**58.** Considere a equação de segundo grau.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde $A$ e $C$ não são nulos. Mostre completando o quadrado:

(a) Se $AC > 0$, então a equação representa uma elipse, um círculo, um ponto ou não possui gráfico.

(b) Se $AC < 0$, então a equação representa uma hipérbole ou um par de retas concorrentes.

(c) Se $AC = 0$, então a equação representa uma parábola, um par de retas paralelas ou não possui gráfico.

**59.** Em cada parte, use o resultado do Exercício 58 para fazer uma afirmação sobre o gráfico da equação e, então, examine sua conclusão completando o quadrado e identificando o gráfico.

(a) $x^2 - 5y^2 - 2x - 10y - 9 = 0$

(b) $x^2 - 3y^2 - 6y - 3 = 0$

(c) $4x^2 + 8y^2 + 16x + 16y + 20 = 0$

(d) $3x^2 + y^2 + 12x + 2y + 13 = 0$

(e) $x^2 + 8x + 2y + 14 = 0$

(f) $5x^2 + 40x + 2y + 94 = 0$

**60.** Deduza a equação $x^2 = 4py$ na Figura 10.4.6.

**61.** Deduza a equação $(x^2/b^2) + (y^2/a^2) = 1$ dada na Figura 10.4.14.

**62.** Deduza a equação $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ dada na Figura 10.4.22.

**63.** Prove o Teorema 10.4.4. [*Sugestão*: Escolha os eixos coordenados de tal modo que a parábola tenha a equação $x^2 = 4py$. Mostre que a reta tangente em $P(x_0, y_0)$ intersecta o eixo $y$ no ponto $Q(0, -y_0)$ e que o triângulo cujos três vértices estão em $P$, $Q$ e o foco é isósceles.]

**64.** Dadas duas retas que se cortam, seja $L_2$ a reta de maior ângulo de inclinação $\phi_2$ e $L_1$ a reta de menor ângulo de inclinação $\phi_1$. Definimos o ***ângulo θ entre $L_1$ e $L_2$*** por $\theta = \phi_2 - \phi_1$. (Veja a figura a seguir.)

(a) Prove: Se $L_1$ e $L_2$ não são perpendiculares, então

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

onde $L_1$ e $L_2$ têm inclinações $m_1$ e $m_2$.

(b) Prove o Teorema 10.4.5. [*Sugestão*: Introduza coordenadas de tal modo que a elipse seja descrita pela equação $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ e use a parte (a).]

(c) Prove o Teorema 10.4.6. [*Sugestão*: Introduza coordenadas de tal modo que a hipérbole seja descrita pela equação $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ e use a parte (a).]

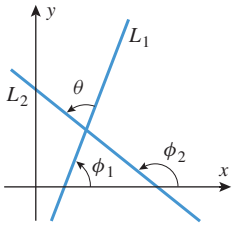



**Figura Ex-64**

**65.** **Texto** Suponha que queiramos desenhar uma elipse com valores dados dos comprimentos dos eixos maior e menor usando o método mostrado na Figura 10.4.3*b*. Supondo desenhados os eixos, explique como pode ser utilizado um compasso para obter a localização dos focos.

**66.** **Texto** Faça uma lista das equações padrão das parábolas, elipses e hipérboles e escreva um resumo das técnicas utilizadas para esboçar as seções cônicas a partir das equações padrão.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.4

**1.** (a) uma elipse (b) uma hipérbole (c) uma parábola **2.** (a) $y^2 = 4px$ (b) $x^2 = 4py$

**3.** (a) 2a (b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ (c) $\sqrt{a^2 - b^2}$ **4.** (a) $2a$ (b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ (c) $\sqrt{a^2 + b^2}$; $\dfrac{b}{a}x$

# 10.5 ROTAÇÃO DE EIXOS; EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

*Nas seções precedentes, obtivemos equações das seções cônicas com eixos paralelos aos eixos coordenados. Nesta seção, estudaremos as equações de cônicas que estão "inclinadas" em relação aos eixos coordenados. Isso nos levará a investigar rotações dos eixos coordenados.*

### EQUAÇÕES QUADRÁTICAS EM *x* E *y*

Vimos, nos Exemplos 8 a 10 da seção anterior, que as equações da forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

podem representar cônicas. A Equação (1) é um caso especial da equação mais geral

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2}$$

que é denominada ***equação quadrática*** em $x$ e $y$ se as constantes $A$, $B$ e $C$ não forem todas nulas. Geralmente, o gráfico de qualquer equação quadrática é uma seção cônica. Se $B = 0$, então (2) reduz a (1) e a seção cônica tem seu eixo ou eixos paralelos aos eixos coordenados.

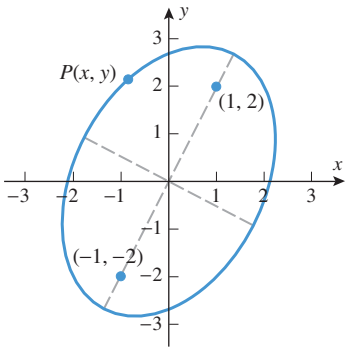



**Figura 10.5.1**

Contudo, se $B \neq 0$, então (2) contém o ***termo misto*** $Bxy$, e o gráfico da seção cônica representada pela equação tem seu eixo ou eixos "inclinados" em relação aos eixos coordenados. Para ilustrar, consideremos a elipse com focos $F_1(1, 2)$ e $F_2(-1, -2)$ e tal que a soma das distâncias de cada ponto $P(x, y)$ da elipse aos focos seja de 6 unidades. Expressando essa condição como uma equação, obtemos (Figura 10.5.1)

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = 6$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, isolando o radical remanescente e finalmente elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$$

como a equação da elipse. Essa equação está no formato (2) com $A = 8$, $B = -4$, $C = 5$, $D = 0$, $E = 0$ e $F = -36$.

## ROTAÇÃO DE EIXOS

Para estudar cônicas que estão inclinadas em relação aos eixos coordenados, é muitas vezes útil girar os eixos coordenados de tal modo que os eixos coordenados girados sejam paralelos aos eixos da cônica. Antes de poder discutir os detalhes, precisamos desenvolver algumas ideias sobre a rotação de eixos coordenados.

Na Figura 10.5.2*a*, foi aplicada uma rotação de ângulo $\theta$ aos eixos de um sistema de coordenadas $xy$ para produzir um novo sistema de coordenadas $x'y'$. Como podemos ver na figura, cada ponto $P$ do plano tem coordenadas $(x', y')$ além das coordenadas $(x, y)$. Para ver como essas coordenadas estão relacionadas, seja $r$ a distância da origem comum ao ponto $P$ e seja $\alpha$ o ângulo mostrado na Figura 10.5.2*b*. Segue que

$$x = r\cos(\theta + \alpha), \quad y = r\,\text{sen}(\theta + \alpha) \tag{3}$$

e

$$x' = r\cos\alpha, \quad y' = r\,\text{sen}\,\alpha \tag{4}$$

Usando identidades trigonométricas conhecidas, as relações (3) podem ser escritas como

$$x = r\cos\theta\cos\alpha - r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta\cos\alpha + r\cos\theta\,\text{sin}\,\theta$$

e substituindo (4) nessas equações, obtemos as seguintes relações, denominadas ***equações de rotação***:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta \\ y &= x'\,\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta \end{aligned} \tag{5}$$

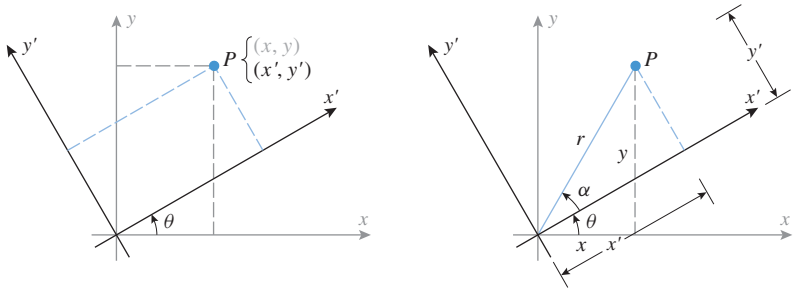



**Figura 10.5.2**

► **Exemplo 1** Suponha que tenha sido aplicada uma rotação de ângulo $\theta = 45°$ aos eixos de um sistema de coordenadas $xy$ para produzir um sistema de coordenadas $x'y'$. Encontre a equação da curva

$$x^2 - xy + y^2 - 6 = 0$$

nas coordenadas $x'y'$.

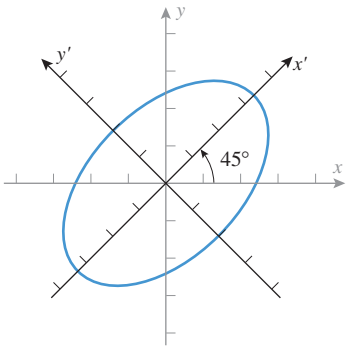



**Figura 10.5.3**

***Solução*** Substituindo $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}45° = 1/\sqrt{2}$ e $\cos\theta = \cos 45° = 1/\sqrt{2}$ em (5), obtemos as equações de rotação

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

Substituindo essas relações na equação dada, obtemos

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6 = 0$$

ou

$$\frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2 - x'^2 + y'^2 + x'^2 + 2x'y' + y'^2}{2} = 6$$

ou

$$\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

que é a equação de uma elipse (Figura 10.5.3). ◀

Resolvendo as equações de rotação (5) para $x'$ e $y'$ em termos de $x$ e $y$, obtemos (Exercício 16):

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ y' &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{6}$$

**▶ Exemplo 2** Encontre as novas coordenadas do ponto (2, 4) depois de ter sido aplicada uma rotação de ângulo $\theta = 30°$ aos eixos coordenados.

***Solução*** Usando as equações de rotação (6) com $x = 2$, $y = 4$, $\cos\theta = \cos 30° = \sqrt{3}/2$ e $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}30° = 1/2$, obtemos

$$\begin{aligned} x' &= 2(\sqrt{3}/2) + 4(1/2) = \sqrt{3} + 2 \\ y' &= -2(1/2) + 4(\sqrt{3}/2) = -1 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Assim, as novas coordenadas são $(\sqrt{3} + 2, -1 + 2\sqrt{3})$. ◀

## ■ ELIMINAÇÃO DO TERMO MISTO

No Exemplo 1, conseguimos identificar a curva $x^2 - xy + y^2 - 6 = 0$ como uma elipse porque a rotação de eixos eliminou o termo $xy$ e reduziu a equação a uma forma conhecida. Isso aconteceu porque os novos eixos $x'y'$ estavam alinhados com os eixos da elipse. O próximo teorema nos diz como determinar uma rotação apropriada de eixos para eliminar o termo misto de uma equação quadrática em $x$ e $y$.

**10.5.1 TEOREMA** *Se a equação*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{7}$$

*for tal que $B \neq 0$ e se um sistema de coordenadas $x'y'$ tiver sido obtido pela rotação dos eixos $xy$ por um ângulo satisfazendo*

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{A - C}{B} \tag{8}$$

*então, no sistema de coordenadas $x'y'$, a Equação (7) terá a forma*

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Sempre é possível satisfazer (8) com um ângulo $\theta$ no intervalo

$$0 < \theta < \pi/2$$

Aqui sempre escolheremos $\theta$ dessa maneira.

**DEMONSTRAÇÃO** Substituindo (5) em (7) e simplificando, obtemos

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

onde

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta + C\operatorname{sen}^2\theta \\ B' &= B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2(C - A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ C' &= A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D' &= D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta \\ E' &= -D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta \\ F' &= F \end{aligned} \tag{9}$$

(Verifique.) Para completar a prova, devemos mostrar que $B' = 0$ se

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = \frac{A - C}{B} \tag{10}$$

Contudo, usando a fórmula trigonométrica do ângulo duplo, podemos reescrever $B'$ na forma

$$B' = B\cos 2\theta - (A - C)\operatorname{sen} 2\theta$$

Assim, $B' = 0$ se $\theta$ satisfizer (10). ■

**▶ Exemplo 3** Identifique e esboce a curva $xy = 1$.

***Solução*** Como um primeiro passo, giramos os eixos coordenados para eliminar o termo misto. Comparando a equação dada com (7), temos

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0$$

Assim, o ângulo de rotação procurado deve satisfazer

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{0 - 0}{1} = 0$$

Essa condição pode ser satisfeita tomando $2\theta = \pi/2$ ou $\theta = \pi/4 = 45°$. Fazendo as substituições $\cos\theta = \cos 45° = 1/\sqrt{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 45° = 1/\sqrt{2}$ em (5), obtemos

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

Substituindo essas relações na equação $xy = 1$, obtemos

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

que é a equação de uma hipérbole equilátera de vértices em $(\sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, 0)$ no sistema de coordenadas $x'y'$ (Figura 10.5.4). ◀

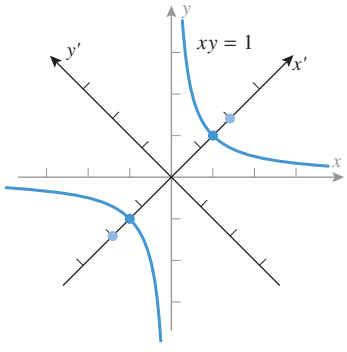



**Figura 10.5.4**

Nos problemas em que é inconveniente resolver

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

para $\theta$, podemos obter os valores de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ que são necessários para as equações de rotação calculando primeiramente $\cos 2\theta$ e, depois, calculando $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ a partir das identidades

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

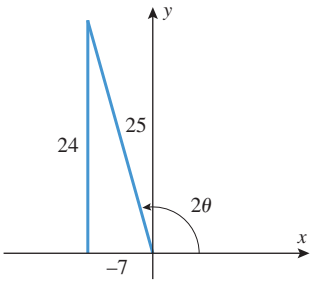
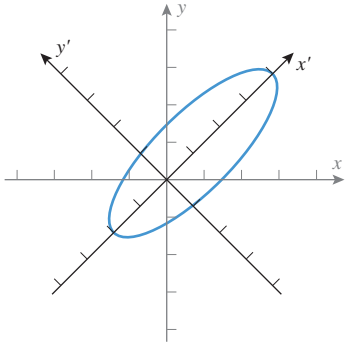



Figura 10.5.5




$$\frac{(x'-1)^2}{9} + y'^2 = 1$$

Figura 10.5.6

► **Exemplo 4** Identifique e esboce a curva

$$153x^2 - 192xy + 97y^2 - 30x - 40y - 200 = 0$$

***Solução*** Temos $A = 153$, $B = -192$ e $C = 97$, portanto

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{A - C}{B} = -\frac{56}{192} = -\frac{7}{24}$$

Como $\theta$ deve ser escolhido no intervalo $0 < \theta < \pi/2$, essa relação é representada pelo triângulo da Figura 10.5.5. A partir desse triângulo, obtemos $\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$, que implica

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}$$

Substituir esses valores em (5) fornece as equações de rotação

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y' \quad \text{e} \quad y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'$$

cuja substituição na equação dada acarreta

$$\tfrac{153}{25}(3x' - 4y')^2 - \tfrac{192}{25}(3x' - 4y')(4x' + 3y') + \tfrac{97}{25}(4x' + 3y')^2$$
$$-\tfrac{30}{5}(3x' - 4y') - \tfrac{40}{5}(4x' + 3y') - 200 = 0$$

que simplifica para

$$25x'^2 + 225y'^2 - 50x - 200 = 0$$

ou

$$x'^2 + 9y'^2 - 2x - 8 = 0$$

Completando os quadrados, obtemos

$$\frac{(x'-1)^2}{9} + y'^2 = 1$$

que é a equação de uma elipse com centro $(1, 0)$ e semieixos $a = 3$ e $b = 1$ no sistema de coordenadas $x'y'$ (Figura 10.5.6). ◄

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.5 (Ver página 754 para respostas.)

**1.** Suponha que um sistema de coordenadas $xy$ tenha sido girado por $\theta$ radianos para produzir um novo sistema de coordenadas $x'y'$.
(a) $x$ e $y$ podem ser obtidos a partir de $x'$, $y'$ e $\theta$ usando as equações de rotação $x =$ _____ e $y =$ _____.
(b) $x'$ e $y'$ podem ser obtidos a partir de $x$, $y$ e $\theta$ usando as equações $x' =$ _____ e $y' =$ _____.

**2.** Se a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

for tal que $B \neq 0$, então o termo $xy$ dessa equação poderá ser eliminado por meio de uma rotação de eixos por um ângulo $\theta$ satisfazendo $\operatorname{cotg} 2\theta =$ _____.

**3.** Em cada parte, determine um ângulo de rotação $\theta$ que elimine o termo misto.
(a) $2x^2 + xy + 2y^2 + x - y = 0$
(b) $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2x + y = 1$
(c) $3x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 + y = 0$

**4.** Expresse $2x^2 + xy + 2y^2 = 1$ no sistema de coordenadas $x'y'$ obtido pela rotação do sistema de coordenadas $xy$ por um ângulo de $\theta = \pi/4$.

## EXERCÍCIOS 10.5

**1.** Suponha que o sistema de coordenadas $x'y'$ tenha sido obtido pela rotação de um sistema de coordenadas $xy$ por um ângulo de $\theta = 60°$.
(a) Encontre as coordenadas $x'y'$ de um ponto cujas coordenadas $xy$ sejam $(-2, 6)$.
(b) Encontre uma equação da curva $\sqrt{3}xy + y^2 = 6$ em coordenadas $x'y'$.
(c) Esboce a curva da parte (b) mostrando os eixos $xy$ e $x'y'$.

**2.** Suponha que o sistema de coordenadas $x'y'$ tenha sido obtido pela rotação de um sistema de coordenadas $xy$ por um ângulo de $\theta = 30°$.
(a) Encontre as coordenadas $x'y'$ de um ponto cujas coordenadas $xy$ sejam $(1, -\sqrt{3})$.
(b) Encontre uma equação da curva $2x^2 + 2\sqrt{3}xy = 3$ em coordenadas $x'y'$.
(c) Esboce a curva da parte (b) mostrando os eixos $xy$ e $x'y'$.

**3-12** Aplique uma rotação aos eixos coordenados para eliminar o termo misto. Em seguida, identifique a cônica e eboce seu gráfico. ■

**3.** $xy = -9$

**4.** $x^2 - xy + y^2 - 2 = 0$

**5.** $x^2 + 4xy - 2y^2 - 6 = 0$

**6.** $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 - 144 = 0$

**7.** $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}x - 2y = 0$

**8.** $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 25 = 0$

**9.** $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 80x - 60y + 100 = 0$

**10.** $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y = 8$

**11.** $52x^2 - 72xy + 73y^2 + 40x + 30y - 75 = 0$

**12.** $6x^2 + 24xy - y^2 - 12x + 26y + 11 = 0$

**13.** Suponha que o sistema de coordenadas $x'y'$ tenha sido obtido pela rotação de um sistema de coordenadas $xy$ por um ângulo de 45°. Use (6) para encontrar as coordenadas $xy$ da curva $3x'^2 + y'^2 = 6$.

**14.** Suponha que o sistema de coordenadas $x'y'$ tenha sido obtido pela rotação de um sistema de coordenadas $xy$ por um ângulo de 30°. Use (5) para encontrar as coordenadas $x'y'$ da curva $y = x^2$.

### ENFOCANDO CONCEITOS

**15.** Suponha que o sistema de coordenadas $x'y'$ tenha sido obtido pela rotação de um sistema de coordenadas $xy$ por um ângulo $\theta$. Prove: Dado qualquer valor de $\theta$, a equação $x^2 + y^2 = r^2$ é transformada na equação $x'^2 + y'^2 = r^2$. Dê uma explicação geométrica.

**16.** Deduza (6) resolvendo as equações de rotação (5) para $x'$ e $y'$ em termos de $x$ e $y$.

**17.** Suponha que o sistema de coordenadas $x'y'$ tenha sido obtido pela rotação de um sistema de coordenadas $xy$ por um ângulo $\theta$. Explique como podemos encontrar as coordenadas $xy$ de um ponto cujas coordenadas $x'y'$ sejam conhecidas.

**18.** Suponha que o sistema de coordenadas $x'y'$ tenha sido obtido pela rotação de um sistema de coordenadas $xy$ por um ângulo $\theta$. Explique como podemos encontrar as coordenadas $xy$ de uma reta cuja equação nas coordenadas $x'y'$ seja conhecida.

**19-22** Mostre que o gráfico da equação dada é uma parábola. Encontre seu vértice, foco e diretriz. ■

**19.** $x^2 + 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y = 0$

**20.** $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 8\sqrt{3}x - 8y = 0$

**21.** $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 80x - 60y + 100 = 0$

**22.** $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 16\sqrt{3}x - 16y - 96 = 0$

**23-26** Mostre que o gráfico da equação dada é uma elipse. Encontre seus focos, seus vértices e as extremidades do eixo menor. ■

**23.** $288x^2 - 168xy + 337y^2 - 3.600 = 0$

**24.** $25x^2 - 14xy + 25y^2 - 288 = 0$

**25.** $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 - 32x + 32\sqrt{3}y - 80 = 0$

**26.** $43x^2 - 14\sqrt{3}xy + 57y^2 - 36\sqrt{3}x - 36y - 540 = 0$

**27-30** Mostre que o gráfico da equação dada é uma hipérbole. Encontre seus focos, vértices e assíntotas. ■

**27.** $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 64 = 0$

**28.** $17x^2 - 312xy + 108y^2 - 900 = 0$

**29.** $32y^2 - 52xy - 7x^2 + 72\sqrt{5}x - 144\sqrt{5}y + 900 = 0$

**30.** $2\sqrt{2}y^2 + 5\sqrt{2}xy + 2\sqrt{2}x^2 + 18x + 18y + 36\sqrt{2} = 0$

**31.** Mostre que o gráfico da equação

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

é uma parte de uma parábola. [*Sugestão*: Primeiro racionalize a equação e depois aplique uma rotação de eixos.]

### ENFOCANDO CONCEITOS

**32.** Deduza a expressão para $B'$ em (9).

**33.** Use (9) para provar que $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$ com quaisquer valores de $\theta$.

**34.** Use (9) para provar que $A + C = A' + C'$ com quaisquer valores de $\theta$.

**35.** Prove: Se $A = C$ em (7), então o termo misto pode ser eliminado com uma rotação de 45°.

**36.** Prove: Suponha que $B \neq 0$. Então o gráfico da equação $x^2 + Bxy + F = 0$ é uma hipérbole se $F \neq 0$ e duas retas concorrentes se $F = 0$.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.5

**1.** (a) $x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$; $x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$ (b) $x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$; $-x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$ **2.** $\dfrac{A-C}{B}$ **3.** (a) $\dfrac{\pi}{4}$ (b) $\dfrac{\pi}{3}$ (c) $\dfrac{\pi}{6}$
**4.** $5x'^2 + 3y'^2 = 2$

## 10.6 SEÇÕES CÔNICAS EM COORDENADAS POLARES

*Adiante, neste livro, mostraremos que se um objeto movimenta-se em um campo gravitacional que atua na direção de um ponto fixo (tal como o centro do Sol), então o caminho daquele objeto deve ser uma seção cônica com o ponto fixo em um foco. Por exemplo, planetas em nosso sistema solar movem-se ao longo de um caminho elíptico com o Sol como foco, e os cometas movem-se ao longo de um caminho parabólico, elíptico ou hiperbólico com o Sol como um foco, dependendo das condições sob as quais se originaram. Para algumas aplicações desse tipo, é comumente desejável expressar as equações da seção cônica em coordenadas polares com o polo como foco. Nesta seção, mostraremos como fazer isso.*

### CARACTERIZAÇÃO FOCO-DIRETRIZ DAS CÔNICAS

Para obter equações polares das seções cônicas, precisaremos do teorema seguinte.

É um acidente histórico infeliz que a letra *e* seja usada para a base do logaritmo natural e para a excentricidade de seções cônicas. Entretanto, para fins práticos, a interpretação apropriada será comumente clara a partir do contexto no qual a letra for usada.

**10.6.1 TEOREMA** (***Propriedades Foco-Diretriz das Cônicas***) *Suponha que um ponto $P$ mova-se no plano determinado por um ponto fixado (chamado de **foco**) e uma reta fixada (chamada de **diretriz**), sendo que o foco não está situado na diretriz. Se o ponto mover-se de tal maneira que sua distância ao foco dividida pela distância à diretriz for uma constante $e$ (chamada de **excentricidade**), então a curva traçada pelo ponto é uma seção cônica. Além disso, a cônica é uma*

(a) *parábola se* $e = 1$ (b) *uma elipse se* $0 < e < 1$ (c) *uma hipérbole se* $e > 1$.

Não daremos uma prova formal deste teorema; em vez disso, usaremos os casos específicos da Figura 10.6.1 para ilustrar as ideias básicas. Para a parábola, tomaremos a diretriz como sendo $x = -p$, como de costume; e para a elipse e a hipérbole, tomaremos a diretriz como sendo $x = a^2/c$. Queremos mostrar em todos os três casos que se $P$ é um ponto sobre o gráfico, $F$ é o foco e $D$ é a diretriz, então a razão $PF/PD$ é alguma constante $e$, onde $e = 1$ para a parábola, $0 < e < 1$ para a elipse e $e > 1$ para a hipérbole. Daremos os argumentos para a parábola e a elipse e deixaremos o argumento para a hipérbole como exercício.

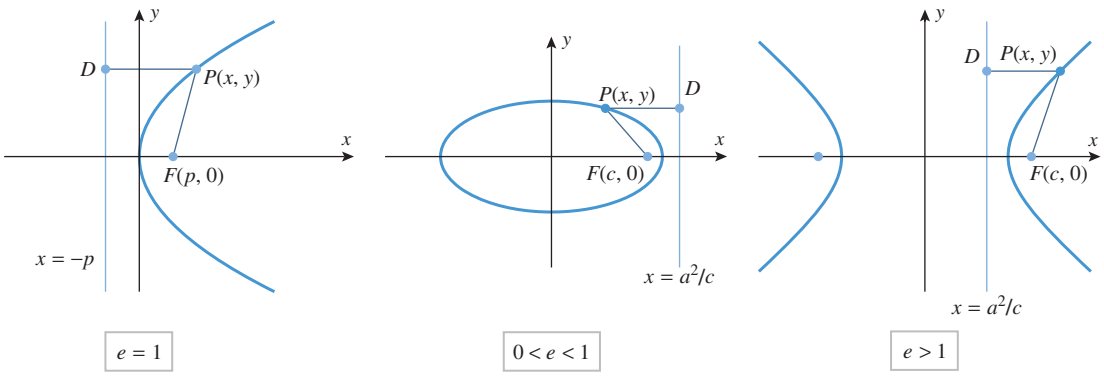



**Figura 10.6.1**

Para a parábola, a distância $PF$ ao foco é igual à distância $PD$ à diretriz e, assim, $PF/PD = 1$, que é o que queremos mostrar. Para a elipse, reescrevemos a Equação (8) da Seção 10.4 como

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)$$

No entanto, a expressão no lado esquerdo é a distância $PF$, e a expressão entre parênteses no lado direito é a distância $PD$, logo mostramos que

$$PF = \frac{c}{a}PD$$

Assim, $PF/PD$ é constante, e a excentricidade é

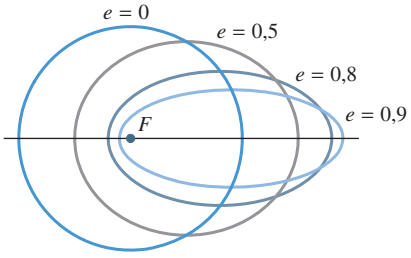
$$e = \frac{c}{a} \tag{1}$$

Se excluirmos o caso degenerado em que $a = 0$ ou $c = 0$, então tem-se a partir da Fórmula (7) da Seção 10.4 que $0 < c < a$, logo $0 < e < 1$, que é o que precisamos mostrar.

Deixaremos como exercício mostrar que a excentricidade da hipérbole na Figura 10.6.1 é também dada pela Fórmula (1) mas, neste caso, tem-se a partir da Fórmula (11) da Seção 10.4 que $c > a$, logo $e > 1$.

## EXCENTRICIDADE DE UMA ELIPSE COMO UMA MEDIDA DE ACHATAMENTO

A excentricidade de uma elipse pode ser vista como uma medida de seu achatamento: quando $e$ tende a 0, as elipses tornam-se cada vez mais circulares, e quando $e$ tende a 1, elas tornam-se cada vez mais achatadas (Figura 10.6.2). A Tabela 10.6.1 mostra a excentricidade orbital de vários objetos celestes. Note que muitos dos planetas têm, de fato, órbitas razoavelmente circulares.




Elipses com um foco em comum e semieixos maiores iguais

**Figura 10.6.2**

**Tabela 10.6.1**

| Corpo Celeste | Excentricidade |
|---|---|
| Mercúrio | 0,206 |
| Vênus | 0,007 |
| Terra | 0,017 |
| Marte | 0,093 |
| Júpiter | 0,048 |
| Saturno | 0,056 |
| Urano | 0,046 |
| Netuno | 0,010 |
| Plutão | 0,249 |
| Cometa Halley | 0,970 |

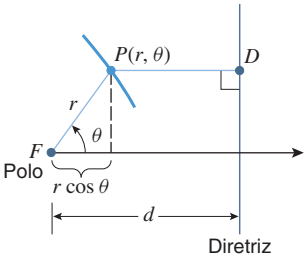



**Figura 10.6.3**

## EQUAÇÕES POLARES DAS CÔNICAS

Nosso próximo objetivo é deduzir as equações polares para as seções cônicas a partir de suas caracterizações foco-diretriz. Vamos supor que o foco seja o polo, e a diretriz seja ou paralela ou perpendicular ao eixo polar. Se a diretriz for paralela ao eixo polar, então ela pode estar acima ou abaixo do polo; e se a diretriz for perpendicular ao eixo polar, então ela pode estar à esquerda ou à direita do polo. Assim, há quatro casos para considerar. Deduziremos a fórmula para o caso em que a diretriz for perpendicular ao eixo polar e estiver à direita do polo.

Conforme ilustrado na Figura 10.6.3, vamos supor que a diretriz seja perpendicular ao eixo polar e esteja a $d$ unidades à direita do polo, sendo que a constante $d$ é conhecida. Se $P$ for um ponto da cônica e se a excentricidade da cônica for $e$, então segue do Teorema 10.6.1 que $PF/PD = e$ ou, de modo equivalente, que

$$PF = ePD \tag{2}$$

Contudo, é evidente a partir da Figura 10.6.3 que $PF = r$ e $PD = d - r\cos\theta$. Assim, (2) pode ser escrita como

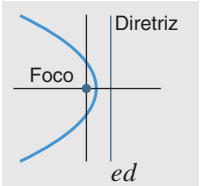
$$r = e(d - r\cos\theta)$$

que pode ser resolvida em $r$ e expressa como

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

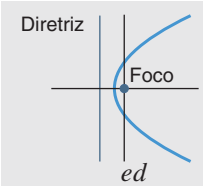
(verifique). Observe que essa única equação polar pode representar uma parábola, uma elipse, ou uma hipérbole, dependendo do valor de $e$. Em contrapartida, a equação retangular para essas cônicas tem formas diferentes. As deduções nos outros três casos são análogas.

**10.6.2** **TEOREMA** *Se uma seção cônica com excentricidade e estiver posicionada em um sistema de coordenadas polares, de tal modo que seu foco esteja no polo e a diretriz correspondente a d unidades do polo, então a equação da cônica terá uma das quatro formas possíveis, dependendo de sua orientação*:




$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

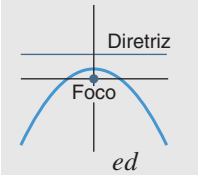
Diretriz à direita do polo




$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

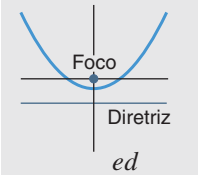
Diretriz à esquerda do polo

(3–4)




$$r = \frac{ed}{1 + e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Diretriz acima do polo




$$r = \frac{ed}{1 - e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Diretriz abaixo do polo

(5–6)

## ESBOÇANDO CÔNICAS EM COORDENADAS POLARES

Podemos gerar gráficos precisos de seções cônicas em coordenadas polares utilizando recursos gráficos. Entretanto, é frequentemente útil fazer um rápido esboço desses gráficos que mostrem a sua orientação e deem algum sentido às suas dimensões. A orientação de uma cônica em relação aos eixos polares pode ser deduzida ao comparar sua equação com uma das quatro formas do Teorema 10.6.2. As dimensões fundamentais de uma parábola são determinadas pela constante $p$ (Figura 10.4.5) e as das elipses e das hipérboles, pelas constantes $a$, $b$ e $c$ (Figura 10.4.11 e 10.4.20). Assim, precisamos mostrar como essas constantes podem ser obtidas a partir das equações polares.

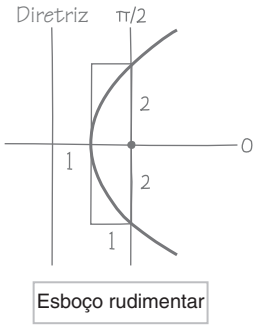



**Figura 10.6.4**

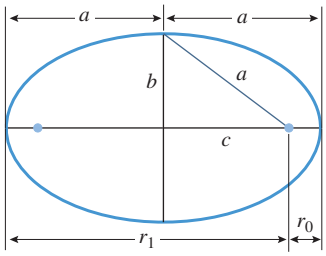



**Figura 10.6.5**

Em palavras, a Fórmula (8) afirma que $a$ é a ***média aritmética*** de $r_0$ e $r_1$ e a Fórmula (10) afirma que $b$ é a ***média geométrica*** de $r_0$ e $r_1$.

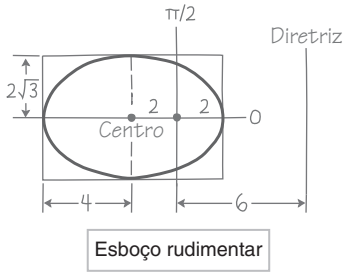



**Figura 10.6.6**

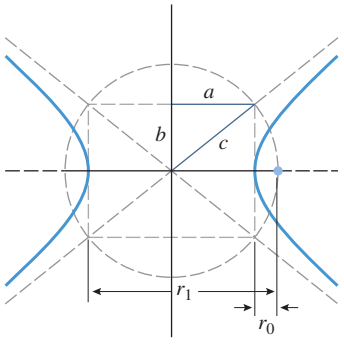



**Figura 10.6.7**

**► Exemplo 1** Esboce o gráfico de $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$ em coordenadas polares.

***Solução*** A equação é idêntica a (4) com $d = 2$ e $e = 1$. Desse modo, o gráfico é uma parábola com o foco no polo e a diretriz 2 unidades à esquerda do polo. Isso nos diz que a parábola abre para a direita ao longo do eixo polar e $p = 1$. Assim, ela é parecida grosseiramente com a esboçada na Figura 10.6.4. ◄

Todas as informações geométricas importantes sobre uma elipse podem ser obtidas a partir dos valores $a$, $b$ e $c$ na Figura 10.6.5. Uma maneira de encontrar esses valores a partir da equação polar de uma elipse baseia-se na determinação das distâncias do foco aos vértices. Conforme mostrado na figura, seja $r_0$ a distância do foco ao vértice mais próximo e $r_1$ a distância ao vértice mais afastado. Assim,

$$r_0 = a - c \quad \text{e} \quad r_1 = a + c \tag{7}$$

do que seguem

$$a = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_0) \qquad c = \tfrac{1}{2}(r_1 - r_0) \tag{8–9}$$

Além disso, tem-se também, por (7) que

$$r_0 r_1 = a^2 - c^2 = b^2$$

Assim,

$$b = \sqrt{r_0 r_1} \tag{10}$$

**► Exemplo 2** Obtenha as constantes $a$, $b$ e $c$ da elipse $r = \dfrac{6}{2+\cos\theta}$.

***Solução*** Essa equação não corresponde a qualquer uma das formas do Teorema 10.6.2, pois todas elas requerem um termo constante 1 no denominador. Entretanto, podemos colocar a equação dentro de uma dessas formas dividindo o numerador e o denominador por 2 para obter

$$r = \frac{3}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta}$$

Essa equação é idêntica a (3) com $d = 6$ e $e = \frac{1}{2}$, portanto o gráfico é uma elipse com a diretriz 6 unidades à direita do polo. A distância $r_0$ do foco ao vértice mais próximo pode ser obtida fixando $\theta = 0$ nessa equação, e a distância $r_1$ ao vértice mais afastado pode ser obtida fixando $\theta = \pi$. Disso resulta

$$r_0 = \frac{3}{1 + \frac{1}{2}\cos 0} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2, \quad r_1 = \frac{3}{1 + \frac{1}{2}\cos\pi} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

Assim, a partir das Fórmulas (8),(10) e (9), respectivamente, obtemos

$$a = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_0) = 4, \quad b = \sqrt{r_0 r_1} = 2\sqrt{3}, \quad c = \tfrac{1}{2}(r_1 - r_0) = 2$$

Assim, a elipse é parecida grosseiramente com a esboçada na Figura 10.6.6 ◄

Todas as informações importantes sobre uma hipérbole podem ser obtidas a partir dos valores de $a$, $b$ e $c$ na Figura 10.6.7. Da mesma forma que com a elipse, uma maneira de encontrar esses valores, a partir da equação polar de uma hipérbole, decorre da dedução das

distâncias do foco aos vértices. Conforme mostrado na figura, seja $r_0$ a distância do foco ao vértice mais próximo e $r_1$ a distância ao vértice mais afastado. Assim,

$$r_0 = c - a \quad \text{e} \quad r_1 = c + a \tag{11}$$

do que seguem

$$a = \tfrac{1}{2}(r_1 - r_0) \qquad c = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_0) \tag{12–13}$$

Em palavras, a Fórmula (13) afirma que $c$ é a ***média aritmética*** de $r_0$ e $r_1$ e a Fórmula (14) afirma que $b$ é a ***média geométrica*** de $r_0$ e $r_1$.

Além disso, tem-se também, por (11), que

$$r_0 r_1 = c^2 - a^2 = b^2$$

do que segue

$$b = \sqrt{r_0 r_1} \tag{14}$$

**▶ Exemplo 3** Esboce o gráfico de $r = \dfrac{2}{1 + 2\,\text{sen}\,\theta}$ em coordenadas polares.

***Solução*** Essa equação corresponde exatamente a (5) com $d = 1$ e $e = 2$. Assim, o gráfico é uma hipérbole com sua diretriz 1 unidade acima do polo. No entanto, não é tão direto calcular os valores $r_0$ e $r_1$, uma vez que as hipérboles em coordenadas polares são geradas de uma maneira estranha quando $\theta$ varia de 0 a $2\pi$. Isso pode ser visto na Figura 10.6.8*a*, que é o gráfico da equação dada em coordenadas retangulares. Tem-se deste gráfico que o gráfico polar correspondente é gerado por partes (Figura 10.6.8*b*):

- Quando $\theta$ varia no intervalo $0 \le \theta < 7\pi/6$, o valor de $r$ é positivo e varia de 2 a $2/3$ e daí a $+\infty$, o que gera uma parte do ramo inferior.
- Quando $\theta$ varia no intervalo $7\pi/6 < \theta \le 3\pi/2$, o valor de $r$ é negativo e varia de $-\infty$ a $-2$, o que gera a parte da direita do ramo superior.
- Quando $\theta$ varia no intervalo $3\pi/2 \le \theta < 11\pi/6$, o valor de $r$ é negativo e varia de $-2$ a $-\infty$, o que gera a parte da esquerda do ramo superior.
- Quando $\theta$ varia no intervalo $11\pi/6 < \theta \le 2\pi$, o valor de $r$ é positivo e varia de $+\infty$ a 2, o que completa a parte que falta à direita do ramo inferior.

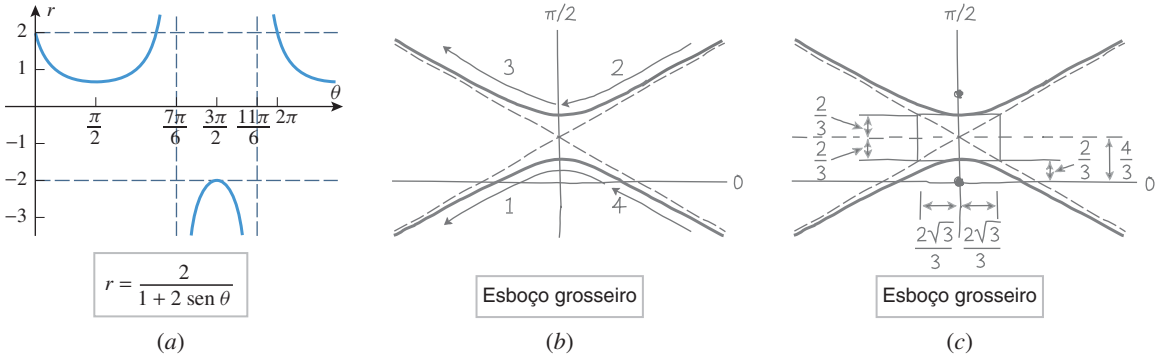



**Figura 10.6.8**

Para obter um esboço grosseiro de uma hipérbole é, geralmente, suficiente encontrar o centro, as assíntotas e os pontos em que $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ e $\theta = 3\pi/2$.

Está evidente, agora, que podemos obter $r_0$ fixando $\theta = \pi/2$ e $r_1$ fixando $\theta = 3\pi/2$. Lembrando que $r_0$ e $r_1$ são positivos, isso dá

$$r_0 = \frac{2}{1 + 2\,\text{sen}(\pi/2)} = \frac{2}{3}, \quad r_1 = \left|\frac{2}{1 + 2\,\text{sen}(3\pi/2)}\right| = \left|\frac{2}{-1}\right| = 2$$

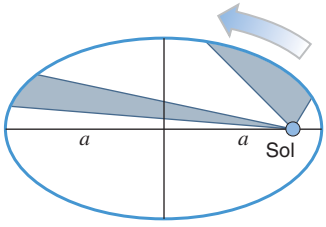
Assim, a partir das Fórmulas (12), (14), e (13), respectivamente, obtemos

$$a = \frac{1}{2}(r_1 - r_0) = \frac{2}{3}, \quad b = \sqrt{r_0 r_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad c = \frac{1}{2}(r_1 + r_0) = \frac{4}{3}$$

Assim, a hipérbole é parecida grosseiramente com a esboçada na Figura 10.6.8*c*. ◀

## APLICAÇÕES EM ASTRONOMIA

Em 1609, Johannes Kepler publicou um livro conhecido como *Astronomia Nova* (ou, algumas vezes, *Comentários sobre o Movimento do Planeta Marte*), no qual conseguiu destilar milhares de anos de astronomia observacional em três belas leis do movimento planetário (Figura 10.6.9).




Áreais iguais são varridas em tempos iguais, e o quadrado do período $T$ é proporcional a $a^3$.

**Figura 10.6.9**

### 10.6.3 LEIS DE KEPLER

- Primeira lei (***Lei das Órbitas***) Cada planeta move-se em uma órbita elíptica com o Sol em um foco.
- Segunda lei (***Lei das Áreas***) A reta radial que sai do centro do Sol e vai ao centro de um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.
- Terceira lei (***Lei dos Períodos***) O quadrado do período de um planeta (o tempo em que o planeta completa uma órbita em torno do Sol) é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita.

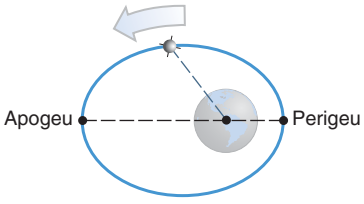



**Figura 10.6.10**

As leis de Kepler, embora enunciadas para o movimento planetário em torno do Sol, aplicam-se a todos os corpos celestes que estão sujeitos a uma *única* força gravitacional central, tanto satélites artificiais sujeitos apenas à força gravitacional central da Terra quanto luas sujeitas apenas à força gravitacional de um planeta, por exemplo. Adiante no livro iremos derivar as leis de Kepler a partir de princípios básicos, mas, por ora, mostraremos como elas podem ser usadas em computações básicas na Astronomia.

Em uma órbita elíptica, o ponto mais próximo ao foco é chamado de ***perigeu*** e o ponto mais afastado, de ***apogeu*** (Figura 10.6.10). As distâncias do foco ao perigeu e apogeu são

**Johannes Kepler (1571-1630)** Astrônomo e físico alemão. Kepler, cujo trabalho forneceu a nossa visão contemporânea do movimento planetário, levou uma vida fascinante, mas desastrada. Seu pai, um alcoólotra, o fez trabalhar na taverna de sua família quando criança e depois retirou-o da escola elementar e empregou-o como um trabalhador no campo, onde o rapaz contraiu varíola, o que aleijou permanentemente suas mãos e prejudicou sua visão. Anos mais tarde, a primeira mulher de Kepler e vários filhos morreram, sua mãe foi acusada de bruxaria e ele, por ser protestante, foi frequentemente perseguido pelas autoridades católicas. Ele empobreceu muitas vezes, ganhando a vida com dificuldade como astrólogo e predizendo o futuro. Relembrando sua infância infeliz, Kepler descreveu seu pai como tendo "tendências criminosas" e como "briguento" e sua mãe como "conversadora" e "mal-humorada". Entretanto, foi a sua mãe quem lhe marcou de forma inesquecível quando, aos seus 6 anos de idade, mostrou-lhe o cometa de 1577; anos depois, ele preparou pessoalmente a defesa de sua mãe contra a acusação de bruxaria. Kepler conheceu o trabalho de Copérnico quando estudante na Universidade de Tubingen, onde ele recebeu o grau de mestre em 1591. Continuou como estudante de Teologia, mas, por insistência das autoridades da Universidade, abandonou seus estudos clericais e concordou com uma posição como matemático e professor em Graz, na Áustria. Contudo, foi expulso da cidade quando ela passou a controle católico e, em 1600, finalmente mudou-se para Praga, onde tornou-se um assistente no observatório do famoso astrônomo dinamarquês Tycho Brahe. Brahe foi um brilhante e meticuloso observador astronômico que acumulou os dados astronômicos mais precisos conhecidos em seu tempo; e quando Brahe morreu em 1601, Kepler herdou todo seu tesouro em dados. Depois de 8 anos de intenso trabalho, Kepler decifrou os princípios contidos nos dados e, em 1609, publicou seu trabalho monumental, *Astronomia Nova*, no qual enunciou suas duas primeiras leis do movimento planetário. Comentando sua descoberta da órbita elíptica, Kepler escreveu, "fiquei quase louco ao calcular esta questão. Não conseguia entender por que o planeta prefere ir sobre uma órbita elíptica (em vez de uma circular). Oh, fui ridículo!" Finalmente, ficou para Isaac Newton descobrir as leis da gravitação que explicaram a razão para as órbitas elípticas.

*[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler.png]*

chamadas de ***distância do perigeu*** e ***distância do apogeu***, respectivamente. Para as órbitas ao redor do Sol, é comum usar o termo ***periélio*** e ***afélio***, ao invés de perigeu e apogeu, e medir o tempo em anos da Terra e a distância em unidades astronômicas (UA), onde uma UA é o semieixo maior $a$ da órbita da Terra (aproximadamente $150 \times 10^6$ km ou $92{,}9 \times 10^6$ milhas). Com essa escolha de unidades, a constante de proporcionalidade na terceira lei de Kepler é igual a 1, pois $a = 1$ UA produz um período de $T = 1$ anos terrestres. Nesse caso, a terceira lei de Kepler pode ser expressa como

$$T = a^{3/2} \tag{15}$$

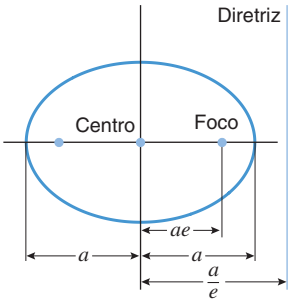



**Figura 10.6.11**

As formas das órbitas elípticas são frequentemente especificadas por uma dada excentricidade $e$ e o semieixo maior $a$, logo é útil expressar as equações polares de uma elipse em termos dessas constantes. A Figura 10.6.11, que pode ser obtida a partir da elipse da Figura 10.6.1 e da relação $c = ea$, implica que a distância $d$ entre o foco e a diretriz é

$$d = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ea = \frac{a(1 - e^2)}{e} \tag{16}$$

da qual tem-se que $ed = a(1 - e^2)$. Assim, dependendo da orientação da elipse, as fórmulas no Teorema 10.6.2 podem ser expressadas em termos de $a$ e $e$ como

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e\cos\theta}$$
+: Diretriz à direita do polo
−: Diretriz à esquerda do polo

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$
+: Diretriz acima do polo
−: Diretriz abaixo do polo

(17–18)

Além disso, é evidente da Figura 10.6.11 que as distâncias do foco aos vértices mais próximo e mais afastado podem ser expressas em termos de $a$ e $e$ como

$$r_0 = a - ea = a(1 - e) \quad \text{e} \quad r_1 = a + ea = a(1 + e) \tag{19–20}$$

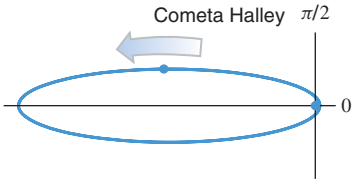



**Figura 10.6.12**

Science Photo Library/Photo Researchers
*Cometa Halley fotografado no Peru em 21 de abril de 1910.*

**▶ Exemplo 4** O cometa Halley (visto pela última vez em 1986) tem uma excentricidade de 0,97 e um semieixo maior de $a = 18{,}1$ UA.

(a) Determine a equação de sua órbita no sistema de coordenadas polares mostrado na Figura 10.6.12.

(b) Determine o período de sua órbita.

(c) Determine as distâncias do periélio e do afélio.

***Solução (a)*** A partir de (17), a equação polar da órbita tem a forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

Contudo, $a(1 - e^2) = 18{,}1\,[1 - (0{,}97)^2] \approx 1{,}07$. Assim, a equação da órbita é

$$r = \frac{1{,}07}{1 + 0{,}97\cos\theta}$$

***Solução (b)*** A partir de (15), com $a = 18{,}1$, o período da órbita é

$$T = (18{,}1)^{3/2} \approx 77 \text{ anos}$$

***Solução (c)*** Uma vez que as distâncias do periélio e do afélio são as distâncias para os vértices mais próximo e mais afastado, respectivamente, tem-se a partir de (19) e (20) que

$$r_0 = a - ea = a(1 - e) = 18{,}1(1 - 0{,}97) \approx 0{,}543 \text{ AU}$$
$$r_1 = a + ea = a(1 + e) = 18{,}1(1 + 0{,}97) \approx 35{,}7 \text{AU}$$

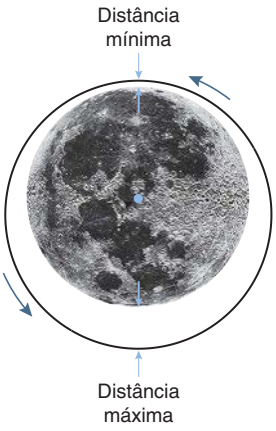



**Figura 10.6.13**
[Imagem: NASA]

ou, como 1 UA $\approx 150 \times 10^6$ km, as distâncias do periélio e do afélio em quilômetros são

$$r_0 = 18{,}1(1 - 0{,}97)(150 \times 10^6) \approx 81.500.000 \text{ km}$$
$$r_1 = 18{,}1(1 + 0{,}97)(150 \times 10^6) \approx 5.350.000.000 \text{ km} \blacktriangleleft$$

**▶ Exemplo 5** Um módulo lunar da missão Apolo orbita a Lua em órbita elíptica com excentricidade $e = 0{,}12$ e semieixo maior $a = 2.015$ km. Supondo que a Lua seja uma esfera de 1.740 km de raio, determine a altura máxima e mínima do módulo acima da superfície lunar (Figura 10.6.13).

***Solução*** Se denotarmos por $r_0$ e $r_1$ as distâncias mínima e máxima do centro da Lua, então as distâncias mínima e máxima da superfície da Lua serão

$$d_{\min} = r_0 - 1.740$$
$$d_{\max} = r_1 - 1.740$$

ou a partir das Fórmulas (19) e (20),

$$d_{\min} = r_0 - 1740 = a(1 - e) - 1740 = 2015(0{,}88) - 1740 = 33{,}2 \text{ km}$$
$$d_{\max} = r_1 - 1740 = a(1 + e) - 1740 = 2015(1{,}12) - 1740 = 516{,}8 \text{ km} \blacktriangleleft$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.6 *(Ver página 763 para respostas.)*

**1.** Em cada parte, dê o nome da cônica descrita.
(a) O conjunto de pontos cuja distância ao ponto (2, 3) é a metade da distância à reta $x + y = 1$ é _____.
(b) O conjunto de pontos cuja distância ao ponto (2, 3) é igual à distância à reta $x + y = 1$ é _____.
(a) O conjunto de pontos cuja distância ao ponto (2, 3) é o dobro da distância à reta $x + y = 1$ é _____.

**2.** Em cada parte: (i) Identifique o gráfico polar como uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole; (ii) diga se a diretriz está acima, abaixo, à esquerda ou à direita do polo; e (iii) encontre a distância do polo à diretriz.
(a) $r = \dfrac{1}{4 + \cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{1}{1 - 4\cos\theta}$
(c) $r = \dfrac{1}{4 + 4\operatorname{sen}\theta}$ (d) $r = \dfrac{4}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

**3.** Se a distância de um vértice de uma elipse ao foco mais próximo for $r_0$ e se a distância daquele vértice ao foco mais distante for $r_1$, então o semieixo maior é $a =$ _____ e o semieixo menor é $b =$ _____.

**4.** Se a distância de um vértice de uma hipérbole ao foco mais próximo for $r_0$ e se a distância daquele vértice ao foco mais distante for $r_1$, então o semieixo focal é $a =$ _____ e o semieixo conjugado é $b =$ _____.

## EXERCÍCIOS 10.6 Recurso Gráfico

**1-2** Encontre a excentricidade e a distância do polo à diretriz e esboce o gráfico em coordenadas polares. ■

**1.** (a) $r = \dfrac{3}{2 - 2\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{3}{2 + \operatorname{sen}\theta}$

**2.** (a) $r = \dfrac{4}{2 + 3\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{5}{3 + 3\operatorname{sen}\theta}$

**3-4** Use as Fórmulas (3) a (6) para identificar e descrever a orientação da cônica e, então, confira sua resposta gerando o gráfico com um recurso gráfico computacional. ■

**3.** (a) $r = \dfrac{8}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ (b) $r = \dfrac{16}{4 + 3\operatorname{sen}\theta}$

**4.** (a) $r = \dfrac{4}{2 - 3\operatorname{sen}\theta}$ (b) $r = \dfrac{12}{4 + \cos\theta}$

**5-6** Encontre uma equação polar para a cônica que tenha o foco no polo e satisfaça as condições dadas. Para simplificar, os pontos estão em coordenadas polares e as diretrizes, em coordenadas retangulares. (Em alguns casos, pode haver mais do que uma cônica que satisfaça as condições.) ■

**5.** (a) Elipse; $e = \frac{3}{4}$; diretriz $x = 2$.
(b) Parábola; diretriz $x = 1$.
(c) Hipérbole; $e = \frac{4}{3}$; diretriz $y = 3$.

**6.** (a) Elipse; extremidades do eixo maior $(2, \pi/2)$ e $(6, 3\pi/2)$.
(b) Parábola; vértice $(2, \pi)$.
(c) Hipérbole; $e = \sqrt{2}$; vértice $(2, 0)$.

**7-8** Encontre as distâncias do polo aos vértices e, então, aplique as Fórmulas (8) a (10) para determinar a equação da elipse em coordenadas retangulares. ■

**7.** (a) $r = \dfrac{6}{2 + \operatorname{sen}\theta}$ (b) $r = \dfrac{1}{2 - \cos\theta}$

**8.** (a) $r = \dfrac{6}{5 + 2\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{8}{4 - 3\operatorname{sen}\theta}$

**9-10** Encontre as distâncias do polo aos vértices e, então, aplique as Fórmulas (12) a (14) para determinar a equação da hipérbole em coordenadas retangulares. ■

**9.** (a) $r = \dfrac{3}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$ (b) $r = \dfrac{5}{2 - 3\cos\theta}$

**10.** (a) $r = \dfrac{4}{1 - 2\operatorname{sen}\theta}$ (b) $r = \dfrac{15}{2 + 8\cos\theta}$

**11-12** Encontre uma equação polar para a elipse cujo foco esteja no polo que satisfaça as condições dadas. ■

**11.** (a) Diretriz à direita do polo; $a = 8$, $e = \frac{1}{2}$.
(b) Diretriz abaixo do polo; $a = 4$; $e = \frac{3}{5}$.

**12.** (a) Diretriz à esquerda do polo; $b = 4$; $e = \frac{3}{5}$.
(b) Diretriz acima do polo; $c = 5$; $e = \frac{1}{5}$.

**13.** Encontre a equação polar de uma hipérbole equilátera com um foco no polo e vértice $(5, 0)$.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**14.** Prove que uma hipérbole é equilátera se, e somente se, $e = \sqrt{2}$.

**15.** (a) Mostre que as coordenadas do ponto $P$ sobre a hipérbole na Figura 10.6.1 satisfazem a equação

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}x - a$$

(b) Use o resultado de (a) para mostrar que $PF/PD = c/a$.

**16.** (a) Mostre que a excentricidade de uma elipse pode ser expressa em termos de $r_0$ e $r_1$ como

$$e = \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}$$

(b) Mostre que

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1 + e}{1 - e}$$

**17.** (a) Mostre que a excentricidade de uma hipérbole pode ser expressa em termos de $r_0$ e $r_1$ como

$$e = \frac{r_1 + r_0}{r_1 - r_0}$$

(b) Mostre que

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{e + 1}{e - 1}$$

**18.** (a) Esboce as curvas

$$r = \frac{1}{1 + \cos\theta} \quad \text{e} \quad r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

(b) Determine as coordenadas polares das interseções das curvas da parte (a).
(c) Mostre que as curvas são *ortogonais*, isto é, suas retas tangentes são perpendiculares nos pontos de interseção.

**19-22 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**19.** Se uma elipse não for um círculo, então sua excentricidade será menor do que 1.

**20.** Uma parábola tem excentricidade maior do que 1.

**21.** Se uma elipse tiver seus focos mais distantes do que os de uma segunda elipse, então a excentricidade da primeira será maior do que a da segunda.

**22.** Se $d$ for uma constante positiva, então a seção cônica de equação polar

$$r = \frac{d}{1 + \cos\theta}$$

será uma parábola.

**23-28** Use os seguintes valores, quando forem necessários:
raio da Terra = 4.000 milhas = 6.440km
1 ano (ano na Terra) = 365 dias (dias na Terra)
1 UA = $92{,}9 \times 10^6$ milhas = $150 \times 10^6$ km ■

**23.** O planeta anão Plutão tem uma excentricidade $e = 0{,}249$ e o semieixo maior $a = 39{,}5$ UA.
(a) Determine o período $T$ em dias.
(b) Determine as distâncias do periélio e do afélio.
(c) Escolha um sistema de coordenadas polares com o centro do Sol no polo e determine uma equação polar da órbita de Plutão naquele sistema de coordenadas.
(d) Faça um esboço da órbita com proporções razoavelmente precisas.

**24.** (a) Seja $a$ o semieixo maior da órbita de um planeta em torno do Sol e seja $T$ seu período. Mostre que se $T$ for medido em dias e $a$, em quilômetros, então $T = (365 \times 10^{-9})(a/150)^{3/2}$.
(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar o período do planeta Mercúrio em dias, dado que o seu semieixo maior é $a = 57{,}95 \times 10^6$.
(c) Escolha um sistema de coordenadas polares com o Sol no polo e encontre uma equação para a órbita de Mercúrio naquele sistema de coordenadas, dado que a excentricidade da órbita é $e = 0{,}206$.
(d) Use um recurso gráfico computacional para gerar a órbita de Mercúrio a partir da equação obtida na parte (c).

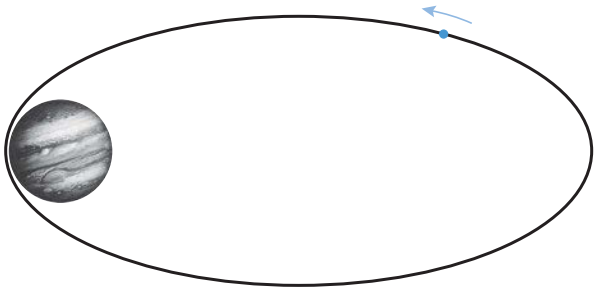
**25.** O cometa Hale-Bopp, descoberto independentemente em 23 de julho de 1995, por Alan Hale e Thomas Bopp, tem uma excentricidade orbital de $e = 0{,}9951$ e um período de 2.380 anos.
(a) Determine seu semieixo maior em unidades astronômicas (UA).
(b) Determine a distância do seu periélio e afélio.

(c) Escolha um sistema de coordenadas polares com o centro do Sol no polo e determine uma equação para a órbita do Hale-Bopp naquele sistema de coordenadas.
(d) Faça um esboço da órbita do Halle-Boop com proporções razoavelmente precisas.

**26.** Marte tem uma distância do periélio de 204.520.000 km e a distância do afélio é de 246.280.000 km.
(a) Use esses dados para calcular a excentricidade e compare sua resposta com o valor dado na Tabela 10.6.1.
(b) Determine o período de Marte.
(c) Escolha um sistema de coordenadas polares com o centro do Sol no polo e determine uma equação para a órbita de Marte naquele sistema de coordenadas.
(d) Use um recurso gráfico computacional para gerar a órbita de Marte a partir da equação obtida na parte (c).

**27.** O *Vanguard 1* foi lançado em março de 1958 em uma órbita em torno da Terra com excentricidade $e = 0{,}21$ e semieixo maior de 8.864,5 km. Determine a altura máxima e mínima do *Vanguard 1* acima da superfície da Terra.

**28.** Acredita-se que o planeta Júpiter tenha um centro rochoso com 10.000 km de raio, circundado por duas camadas de hidrogênio – uma camada grossa de 40.000 km de hidrogênio comprimido quase metálico e uma outra camada grossa de 20.000 km de hidrogênio molecular regular. Os aspectos visíveis, como a grande mancha vermelha, estão na superfície externa da camada de hidrogênio molecular. Em 6 de novembro de 1997, a espaçonave *Galileo* foi colocada na órbita jupiteriana para estudar a lua Europa. A órbita tinha uma excentricidade de 0,814580 e semieixo maior de 3.514.918,9 km. Determine a altura mínima e máxima da *Galileo* acima da camada de hidrogênio molecular (veja a figura a seguir).



*Fora de escala*

**Figura Ex-28**
[Imagem: NASA]

**29.** **Texto** Discuta como a excentricidade e de uma hipérbole afeta o formato da hipérbole. Como varia o formato quando $e$ tende a 1? E quando $e$ tende a $+\infty$? Faça alguns esboços para ilustrar suas conclusões.

**30.** **Texto** Discuta a relação entre a excentricidade $e$ de uma elipse e a distância $z$ entre a diretriz e o centro da elipse. Por exemplo, se os focos permanecerem fixados, o que acontece com $z$ quando $e$ tende a 0?

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 10.6

**1.** (a) uma elipse (b) uma parábola (c) uma hipérbole **2.** (a) (i) uma elipse (ii) à direita do polo (iii) distância = 1 (b) (i) hipérbole (ii) à esquerda do polo (iii) distância = $\frac{1}{4}$ (c) (i) parábola (ii) acima do polo (iii) distância = $\frac{1}{4}$ (d) (i) parábola (ii) abaixo do polo (iii) distância = 4 **3.** $\frac{1}{2}(r_1 + r_0)$; $\sqrt{r_0 r_1}$ **4.** $\frac{1}{2}(r_1 - r_0)$; $\sqrt{r_0 r_1}$

## EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 10 Recurso Gráfico

**1.** Encontre equações paramétricas para a parte do círculo $x^2 + y^2 = 2$ que está fora do primeiro quadrante, orientado no sentido anti-horário. Confira sua resposta gerando a curva com um recurso gráfico.

**2.** (a) Suponha que as equações $x = f(t)$, $y = g(t)$ descrevam a curva $C$ para $t$ crescente, de 0 a 1. Encontre equações paramétricas que descrevam a mesma curva $C$, mas agora no sentido oposto, para $t$ crescente, de 0 a 1.
(b) Confira seu trabalho usando a capacidade de esboçar equações paramétricas de seu recurso gráfico para gerar o segmento de reta entre (1, 2) e (4, 0) em ambos os sentidos com $t$ crescente, de 0 a 1.

**3.** (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva paramétrica $x = t^2 + 1$, $y = t/2$ em $t = -1$ e $t = 1$ sem eliminar o parâmetro.
(b) Confira suas respostas na parte (a) eliminando o parâmetro e derivando uma função de $x$.

**4.** Encontre $dy/dx$ e $d^2y/dx^2$ em $t = 2$ para a curva paramétrica $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{3}t^3$.

**5.** Encontre todos os valores de $t$ para os quais a reta tangente à curva paramétrica $x = 2\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$ é
(a) horizontal (b) vertical

**6.** Encontre o comprimento de arco exato da curva

$$x = 1 - 5t^4,\ y = 4t^5 - 1 \quad (0 \le t \le 1)$$

**7.** Em cada parte, encontre as coordenadas retangulares do ponto cujas coordenadas polares estão dadas.
(a) $(-8, \pi/4)$ (b) $(7, -\pi/4)$ (c) $(8, 9\pi/4)$
(d) $(5, 0)$ (e) $(-2, -3\pi/2)$ (f) $(0, \pi)$

**8.** Expresse os pontos cujas coordenadas $xy$ são $(-1, 1)$ em coordenadas polares com
(a) $r > 0$, $0 \le \theta < 2\pi$ (b) $r < 0$, $0 \le \theta < 2\pi$
(c) $r > 0$, $-\pi < \theta \le \pi$ (d) $r < 0$, $-\pi < \theta \le \pi$.

**9.** Em cada parte, use uma calculadora para aproximar as coordenadas polares do ponto cujas coordenadas retangulares estão dadas.
(a) $(4, 3)$ (b) $(2, -5)$ (c) $(1, \text{arc tg } 1)$

**10.** Em cada parte, decida o que descreve mais precisamente a curva polar: uma rosácea, uma reta, um círculo, um limaçon, uma cardioide, uma espiral, uma lemniscata ou nenhum desses.
(a) $r = 3\cos\theta$ (b) $r = \cos 3\theta$
(c) $r = \dfrac{3}{\cos\theta}$ (d) $r = 3 - \cos\theta$
(e) $r = 1 - 3\cos\theta$ (f) $r^2 = 3\cos\theta$
(g) $r = (3\cos\theta)^2$ (h) $r = 1 + 3\theta$

**11.** Em cada parte, identifique a curva convertendo a equação polar para coordenadas retangulares. Suponha que $a > 0$.
(a) $r = a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$ (b) $r^2\cos 2\theta = a^2$
(c) $r = 4\,\text{cossec}\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ (d) $r = 4\cos\theta + 8\,\text{sen}\,\theta$

**12.** Em cada parte, expresse a equação dada em coordenadas polares.
(a) $x = 7$ (b) $x^2 + y^2 = 9$
(c) $x^2 + y^2 - 6y = 0$ (d) $4xy = 9$

**13-17** Esboce a curva em coordenadas polares. ■

**13.** $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ **14.** $r = 6\cos\theta$

**15.** $r = 3(1 - \text{sen}\,\theta)$ **16.** $r^2 = \text{sen}\,2\theta$

**17.** $r = 3 - \cos\theta$

**18.** (a) Mostre que o valor máximo da coordenada $y$ dos pontos da curva $r = 1/\sqrt{\theta}$, com $\theta$ no intervalo $(0, \pi]$, ocorre quando $\text{tg}\,\theta = 2\theta$.
(b) Use um recurso computacional para resolver a equação na parte (a) com precisão mínima de quatro casas decimais.
(c) Use o resultado da parte (b) para aproximar o valor máximo de $y$ com $0 < \theta \leq \pi$.

**19.** (a) Determine o máximo e o mínimo da coordenada $x$ dos pontos da cardidoide $r = 1 - \cos\theta$.
(b) Determine o mínimo e o máximo da coordenada $y$ dos pontos da cardidoide da parte (a).

**20.** Determine a inclinação da reta tangente à curva polar $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ em $\theta = \pi/4$.

**21.** Uma curva paramétrica da forma

$$x = a\,\text{cotg}\,t + b\cos t, \quad y = a + b\,\text{sen}\,t \quad (0 < t < 2\pi)$$

é chamada de ***concoide de Nicomede*** (veja a figura a seguir, para o caso $0 < a < b$).
(a) Descreva como a concoide

$$x = \text{cotg}\,t + 4\cos t, \quad y = 1 + 4\,\text{sen}\,t$$

é traçada quando $t$ varia no intervalo $0 < t < 2\pi$.
(b) Determine a assíntota horizontal da concoide dada na parte (a).
(c) Quais valores de $t$ fazem com que a concoide da parte (a) tenha uma reta tangente horizontal? Uma reta tangente vertical?
(d) Determine a equação polar $r = f(\theta)$ para a concoide da parte (a) e, então, determine as equações polares para as retas tangentes à concoide no polo.

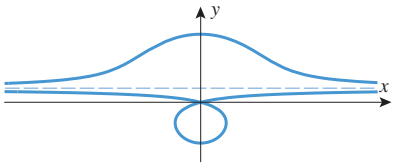



**Figura Ex-21**

**22.** (a) Determine o comprimento de arco da curva polar $r = 1/\theta$ com $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$
(b) O que pode ser dito sobre o comprimento de arco da parte da curva que está situada dentro do círculo $r = 1$?

**23.** Determine a área da região englobada pela cardioide de equação $r = 2 + 2\cos\theta$.

**24.** Encontre a área da região do primeiro quadrante interior à cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

**25.** Determine a área da região que é comum aos círculos $r = 1$, $r = 2\cos\theta$ e $r = 2\,\text{sen}\,\theta$.

**26.** Determine a área da região que é interna à cardioide de equação $r = a(1 + \text{sen}\,\theta)$ e externa ao círculo $r = a\,\text{sen}\,\theta$.

**27-30** Esboce a parábola e identifique o foco, o vértice e a diretriz. ■

**27.** $y^2 = 6x$ **28.** $x^2 = -9y$

**29.** $(y + 1)^2 = -7(x - 4)$ **30.** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2(y - 1)$

**31-34** Esboce a elipse e identifique os focos, os vértices e as extremidades do eixo menor. ■

**31.** $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ **32.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

**33.** $9(x - 1)^2 + 16(y - 3)^2 = 144$

**34.** $3(x + 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 12$

**35-37** Esboce a hipérbole e identifique os vértices, os focos e as assíntotas. ■

**35.** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ **36.** $9y^2 - 4x^2 = 36$

**37.** $\dfrac{(x - 2)^2}{9} - \dfrac{(y - 4)^2}{4} = 1$

**38.** Em cada parte, esboce o gráfico da seção cônica com proporções razoavelmente precisas.
(a) $x^2 - 4x + 8y + 36 = 0$
(b) $3x^2 + 4y^2 - 30x - 8y + 67 = 0$
(c) $4x^2 - 5y^2 - 8x - 30y - 21 = 0$

**39-41** Encontre uma equação para a cônica descrita. ■

**39.** Uma parábola com vértice $(0, 0)$ e foco $(0, -4)$.

**40.** Uma elipse com extremidades do eixo maior em $(0, \pm\sqrt{5})$ e as extremidades do eixo menor em $(\pm 1, 0)$.

**41.** Uma hipérbole com vértices $(0, \pm 3)$ e assíntotas $y = \pm x$.

**42.** Pode-se provar que um cabo suspenso forma um arco parabólico em vez de uma catenária se ele for sujeito a uma força distribuída uniformemente para baixo, ao longo do seu comprimento. Por exemplo, supondo que o peso da estrada em uma ponte de suspensão seja distribuído uniformemente ao longo do cabo de sustentação, então os cabos podem ser modelados por parábolas (veja a figura a seguir).

(a) Supondo um modelo parabólico, determine uma equação para o cabo da figura, tomando o eixo $y$ como a vertical e a origem no ponto mais baixo do cabo.

(b) Determine o comprimento do cabo entre os suportes.

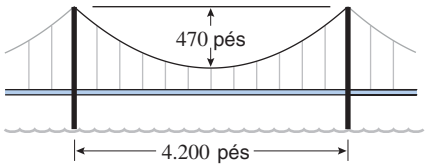



**Figura Ex-42**

**43.** Será mostrado mais adiante no livro que se um projétil for lançado com uma velocidade $v_0$ e em um ângulo $\alpha$ com a horizontal e a uma altura $y_0$ acima do nível do solo, então a trajetória resultante, relativa ao sistema de coordenadas na figura a seguir, terá equações paramétricas

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

onde $g$ é a aceleração devido à gravidade.

(a) Mostre que a trajetória é uma parábola.

(b) Determine as coordenadas do vértice.

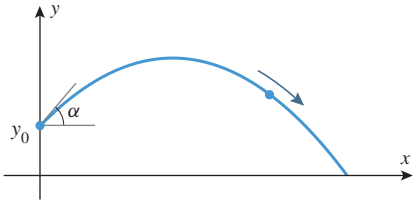



**Figura Ex-43**

**44.** Mickey Mantle é reconhecido como rei "não oficial" dos *home runs*, os longos golpes do beisebol que permitem ao batedor completar o circuito das bases. Em 17 de abril de 1953, Mantle mandou pelos ares uma bola jogada por Chuck Stobbs, do infeliz time Washigton Senators, para fora do Griffith Stadium, passando por cima de uma parede de 50 pés de altura a um ponto a 391 pés do centro esquerdo. Supondo que a bola deixou o bastão a uma altura de 3 pés acima do chão e a um ângulo de 45°, use as equações paramétricas do Exercício 43 com $g = 32$ pés/s$^2$ para encontrar

(a) a velocidade da bola quando ela deixou o bastão

(b) a altura máxima da bola

(c) a distância ao longo do chão a partir da base até onde a bola caiu no chão.

**45-47** Aplique uma rotação aos eixos coordenados para remover o termo em $xy$ e, então, identifique a cônica. ■

**45.** $x^2 + y^2 - 3xy - 3 = 0$

**46.** $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 4 = 0$

**47.** $4\sqrt{5}x^2 + 4\sqrt{5}xy + \sqrt{5}y^2 + 5x - 10y = 0$

**48.** Aplique uma rotação aos eixos coordenados para mostrar que o gráfico de

$$17x^2 - 312xy + 108y^2 + 1080x - 1440y + 4500 = 0$$

é uma hipérbole. Em seguida, encontre seus vértices, focos e assíntotas.

**49.** Em cada parte: (i) identifique o gráfico polar como uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole; (ii) indique se a diretriz está acima, abaixo, à esquerda ou à direita do polo; e (iii) determine a distância do polo à diretriz.

(a) $r = \dfrac{1}{3 + \cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{1}{1 - 3\cos\theta}$

(c) $r = \dfrac{1}{3(1 + \operatorname{sen}\theta)}$ (d) $r = \dfrac{3}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

**50-51** Determine uma equação nas coordenadas $xy$ para a seção cônica que satisfaça as condições dadas. ■

**50.** (a) Elipse com excentricidade $e = \frac{2}{7}$ e extremos do eixo menor nos pontos $(0, \pm 3)$.

(b) Parábola com vértice na origem, foco sobre o eixo $y$ e diretriz passando no ponto $(7, 4)$.

(c) Hipérbole que tem os mesmos focos que a elipse $3x^2 + 16y^2 = 48$ e assíntotas $y = \pm 2x/3$.

**51.** (a) Elipse com centro $(-3, 2)$, vértice $(2, 2)$ e excentricidade $e = \frac{4}{5}$.

(b) Parábola com foco $(-2, -2)$ e vértice $(-2, 0)$.

(c) Hipérbole com vértice $(-1, 7)$ e assíntotas $y - 5 = \pm 8(x + 1)$.

**52.** Use as equações paramétricas $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ para mostrar que a circunferência $C$ de uma elipse com semieixo maior $a$ e excentricidade $e$ é

$$C = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 u}\, du$$

**53.** Use a regra de Simpson ou a capacidade de integração numérica de um recurso gráfico para aproximar a circunferência da elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ a partir da integral obtida no Exercício 52.

**54.** (a) Calcule a excentricidade da órbita terrestre, dado que a razão da distância entre o centro da Terra e o centro do Sol no periélio pela distância entre os centros no afélio é de $\frac{59}{61}$.

(b) Determine a distância entre o centro da Terra e o centro do Sol no periélio, dado que o valor médio das distâncias do periélio e do afélio é de 93 milhões de milhas.

(c) Use o resultado do Exercício 52 e a regra de Simpson ou a capacidade de integração numérica de um recurso computacional gráfico para aproximar a distância que a Terra viaja em um ano (uma revolução em torno do Sol).

## CAPÍTULO 10 ESTABELECENDO CONEXÕES C CAS

C **1.** Lembre-se que na Seção 5.10 no Volume 1, as funções seno e cosseno de Fresnel foram definidas como sendo

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad \text{e} \quad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$$

A seguinte curva paramétrica, que é usada para estudar as amplitudes de ondas de luz na Óptica, é chamada de ***clotoide*** ou ***espiral de Cornu,*** em homenagem ao cientista francês Marie Alfred Cornu (1841-1902):

$$x = C(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \qquad (-\infty < t < +\infty)$$
$$y = S(t) = \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du$$

(a) Use um CAS para fazer o gráfico da espiral de Cornu.
(b) Descreva o comportamento da espiral quando $t \to +\infty$ e quando $t \to -\infty$.
(c) Determine o comprimento de arco da espiral com $-1 \le t \le 1$.

**2.** (a) A figura a seguir mostra uma elipse com semieixo maior $a$ e semieixo menor $b$. Expresse as coordenadas dos pontos $P$, $Q$ e $R$ em termos de $t$.
(b) Qual é a diferença entre a interpretação geométrica do parâmetro $t$ do círculo

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t$$

e da elipse

$$x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t?$$

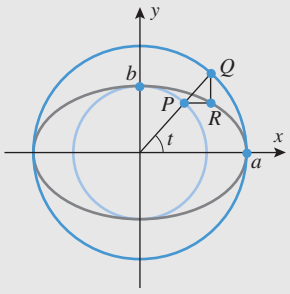



**Figura Ex-2**

**3.** A figura a seguir mostra o método de Kepler para construir uma parábola. Um pedaço de barbante do tamanho da aresta esquerda do triângulo usado para o desenho é fixado ao vértice $Q$ do triângulo, enquanto que o outro extremo é fixado em $F$. Um lápis estica o barbante em direção à base do triângulo, enquanto que o lado oposto a $Q$ desliza ao longo da reta $L$ horizontal abaixo de $F$. Mostre que o lápis traça um arco de parábola com foco $F$ e diretriz $L$.

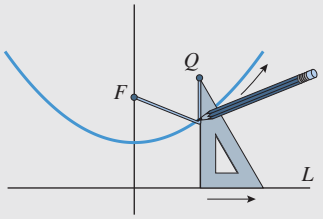



**Figura Ex-3**

**4.** A figura a seguir mostra um método para construir uma hipérbole. Um canto de uma régua é fixado a um ponto $F_1$ e a régua está livre para girar em torno daquele ponto. Um pedaço de barbante cujo tamanho é menor do que o da régua é fixado ao ponto $F_2$ e ao canto livre $Q$ da régua do mesmo lado que $F_1$. Um lápis mantém o barbante preso ao lado superior da régua, enquanto a régua gira em torno do ponto $F_1$. Mostre que o lápis traça um arco de hipérbole com os focos $F_1$ e $F_2$.

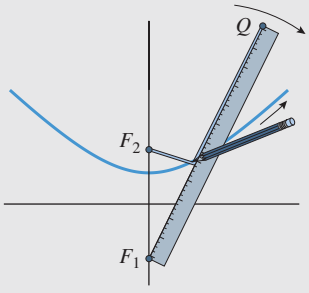


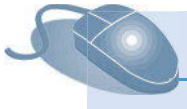

**Figura Ex-4**

**5.** Considere uma elipse de semieixo maior $a$ e semieixo menor $b$, e considere $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
(a) Mostre que o elipsoide que resulta quando $E$ for girado em torno de seu eixo maior tem volume $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$ e área de superfície

$$S = 2\pi ab\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c}\operatorname{arc\,sen}\frac{c}{a}\right)$$

(b) Mostre que o elipsoide que resulta quando $E$ for girado em torno de seu eixo menor tem volume $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$ e área de superfície

$$S = 2\pi ab\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\ln\frac{a+c}{b}\right)$$



### EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO

Para aprender como as coordenadas polares e as seções cônicas podem ser usadas para analisar a possibilidade de uma colisão entre um cometa e a Terra, confira o módulo intitulado **Colisão com Cometa** em

www.grupoa.com.br

# 11

# ESPAÇO TRIDIMENSIONAL; VETORES

Craig Aurness/© Corbis Images

*Para descrever completamente o movimento de um barco, precisamos especificar sua velocidade e a direção e o sentido do movimento em cada instante. Juntos, a velocidade, a direção e o sentido do movimento descrevem uma quantidade "vetorial". Neste capítulo, estudaremos vetores.*

Neste capítulo, discutiremos sistemas de coordenadas retangulares em três dimensões e estudaremos a Geometria Analítica de retas, planos e outras superfícies básicas. O segundo tema deste capítulo é o estudo de vetores, os objetos matemáticos que os físicos e engenheiros usam para estudar forças, deslocamentos e velocidades de objetos que se movem ao longo de caminhos curvilíneos. Mais geralmente, os vetores são usados para representar quaisquer entidades físicas que, para sua descrição completa, envolvam tanto uma magnitude quanto uma direção e sentido. Introduziremos várias operações algébricas sobre vetores e aplicaremos essas operações em problemas que envolvam força, trabalho e tendências rotacionais em duas e três dimensões. Finalmente, discutiremos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas, que são apropriados para problemas que envolvam vários tipos de simetrias e também têm aplicações específicas em navegação e na Mecânica Celeste.

## 11.1 COORDENADAS RETANGULARES NO ESPAÇO; ESFERAS; SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS

*Nesta seção, discutiremos sistemas de coordenadas no espaço tridimensional e alguns fatos básicos a respeito de superfícies em três dimensões.*

### SISTEMAS DE COORDENADAS RETANGULARES

Assim como os pontos do espaço bidimensional podem ser colocados em correspondência bijetora com os pares de números reais usando duas retas coordenadas perpendiculares, também os pontos do espaço tridimensional podem ser colocados em correspondência bijetora com os ternos de números reais usando três retas coordenadas perpendiculares, denominados ***eixo x***, ***eixo y*** e ***eixo z***, posicionados de tal forma que suas origens coincidam (Figura 11.1.1). Os três eixos coordenados formam um ***sistema de coordenadas retangulares*** (ou ***sistema de coordenadas cartesianas***). O ponto de interseção dos eixos coordenados é denominado ***origem*** do sistema de coordenadas.

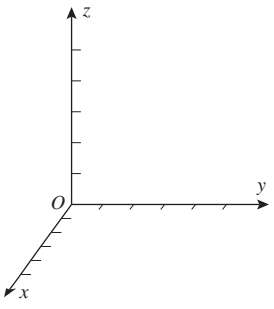



**Figura 11.1.1**

Os sistemas de coordenadas retangulares no espaço tridimensional se dividem em duas categorias: os sistemas com a ***regra da mão esquerda*** e os com a ***regra da mão direita***. Um sistema com a regra da mão direita tem a seguinte propriedade: quando os dedos da mão direita são fechados de tal modo que se curvam do eixo $x$ positivo em direção ao eixo $y$ positivo, então o polegar aponta (mais ou menos) na direção do eixo $z$ positivo (Figura 11.1.2). Isso

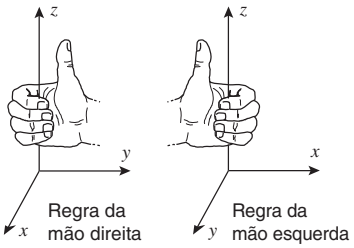



**Figura 11.1.2**

funciona de maneira análoga para um sistema com a regra da mão esquerda (Figura 11.1.2). Neste livro, somente utilizaremos sistemas com a regra da mão direita.

Os eixos coordenados, tomados aos pares, determinam três ***planos coordenados***: o ***plano xy***, o ***plano xz*** e o ***plano yz*** (Figura 11.1.3). A cada ponto $P$ do espaço, podemos associar um terno de números reais, passando três planos pelo ponto $P$ paralelos aos planos coordenados e tomando $a$, $b$ e $c$ como as coordenadas da interseção desses planos com os eixos $x$, $y$ e $z$, respectivamente (Figura 11.1.4). Dizemos que $a$, $b$ e $c$ são as ***coordenadas x, y*** e ***z*** de $P$, respectivamente, e denotamos o ponto $P$ por $(a, b, c)$ ou por $P(a, b, c)$. A Figura 11.1.5 mostra os pontos $(4, 5, 6)$ e $(-3, 2, -4)$.

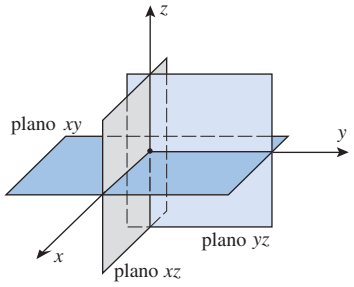



**Figura 11.1.3**

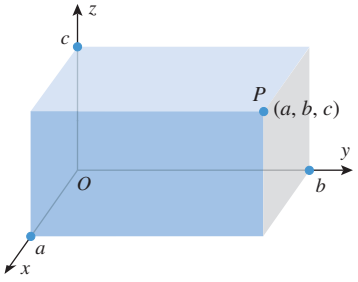



**Figura 11.1.4**

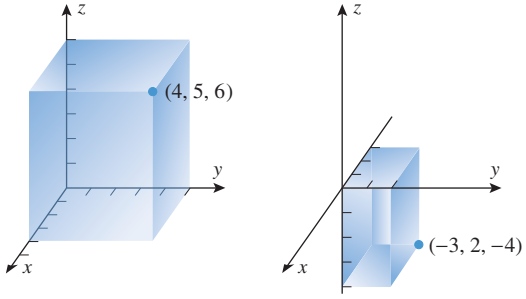



**Figura 11.1.5**

Assim como os eixos coordenados em um sistema de coordenadas bidimensional dividem o espaço bidimensional em quatro quadrantes, igualmente os planos coordenados em um sistema de coordenadas tridimensional dividem o espaço tridimensional em oito partes, chamadas de ***octantes***. O conjunto de pontos com as três coordenadas positivas forma o ***primeiro octante***; os octantes restantes não têm uma enumeração padrão.

O leitor deveria ser capaz de visualizar os seguintes fatos sobre sistemas de coordenadas retangulares tridimensionais:

| REGIÃO | DESCRIÇÃO |
|---|---|
| plano $xy$ | Consiste em todos os pontos da forma $(x, y, 0)$ |
| plano $xz$ | Consiste em todos os pontos da forma $(x, 0, z)$ |
| plano $yz$ | Consiste em todos os pontos da forma $(0, y, z)$ |
| eixo $x$ | Consiste em todos os pontos da forma $(x, 0, 0)$ |
| eixo $y$ | Consiste em todos os pontos da forma $(0, y, 0)$ |
| eixo $z$ | Consiste em todos os pontos da forma $(0, 0, z)$ |

## DISTÂNCIA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL; ESFERAS

Lembre que a distância $d$ entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ no espaço bidimensional é dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

A fórmula da distância no espaço tridimensional tem o mesmo formato, mas com um terceiro termo para acomodar a dimensão adicional. (Veremos que isso ocorre com frequência na passagem do espaço bi para o tridimensional.) A distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{2}$$

Deixamos a prova de (2) como um exercício (Exercício 7).

**► Exemplo 1** Encontre a distância $d$ entre os pontos $(2, 3, -1)$ e $(4, -1, 3)$.

***Solução*** Da Fórmula (2),

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{36} = 6 \quad \blacktriangleleft$$

O conjunto dos pontos $(x, y)$ cujas coordenadas satisfazem alguma equação em $x$ e $y$ em um sistema de coordenadas $xy$ é denominado o ***gráfico*** da equação. Analogamente, o conjunto dos pontos $(x, y, z)$ cujas coordenadas satisfazem alguma equação em $x$, $y$ e $z$ em um sistema de coordenadas $xyz$ é denominado o ***gráfico*** dessa equação.

Lembre que a equação padrão do círculo no espaço bidimensional centrado em $(x_0, y_0)$ e de raio $r$ é

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{3}$$

Isso segue da fórmula da distância (1) e do fato de que esse círculo consiste em todos os pontos do espaço bidimensional cuja distância a $(x_0, y_0)$ é igual a $r$. Analogamente, a ***equação padrão da esfera*** no espaço tridimensional centrada em $(x_0, y_0, z_0)$ e de raio $r$ é

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{4}$$

Isso segue da Fórmula (2) e do fato de que essa esfera consiste em todos os pontos do espaço tridimensional cuja distância a $(x_0, y_0, z_0)$ é igual a $r$. Observe que (4) tem o mesmo formato que a equação padrão do círculo no espaço bidimensional, mas com um terceiro termo para acomodar a dimensão adicional. Alguns exemplos de equações padrão da esfera são dados na tabela seguinte.

| EQUAÇÃO | GRÁFICO |
|---|---|
| $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ | Esfera com centro (3, 2, 1) e raio 3 |
| $(x+1)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 5$ | Esfera com centro ( –1, 0, –4) e raio $\sqrt{5}$ |
| $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ | Esfera com centro (0, 0, 0) e raio 1 |

Se os termos em (4) forem elevados ao quadrado e reagrupados, então a equação resultante terá a forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{5}$$

O exemplo seguinte mostra como o centro e o raio de uma esfera que está expressa nessa forma podem ser obtidos completando os quadrados.

**► Exemplo 2** Determine o centro e o raio da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 17 = 0$$

***Solução*** Podemos colocar a equação na forma (4) completando os quadrados:

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) + (z^2 + 8z) = -17 \\
&(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 8z + 16) = -17 + 21 \\
&(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 4
\end{aligned}$$

que é a equação da esfera com centro $(1, 2, -4)$ e raio 2. $\blacktriangleleft$

Em geral, completando os quadrados em (5), obtemos uma equação da forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k$$

Se $k > 0$, então o gráfico dessa equação é uma esfera com centro $(x_0, y_0, z_0)$ e raio $\sqrt{k}$. Se $k = 0$, então a esfera tem raio zero e, portanto, o gráfico é o único ponto $(x_0, y_0, z_0)$. Se $k < 0$, a equação não é satisfeita por quaisquer valores de $x$, $y$ e $z$ (por quê?), logo não há gráfico.

**11.1.1 TEOREMA** *Uma equação da forma*

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

*representa uma esfera, um ponto ou não possui gráfico.*

## SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS

Embora seja natural fazer gráficos de equações com duas variáveis no espaço bidimensional e de equações com três variáveis no espaço tridimensional, é possível também fazer gráficos de equações com duas variáveis no espaço tridimensional. Por exemplo, o gráfico da equação $y = x^2$ em um sistema coordenado $xy$ é uma parábola; contudo, nada nos impede de indagar sobre o seu gráfico em um sistema de coordenadas $xyz$. Para obter esse gráfico, precisamos observar somente que a equação $y = x^2$ não impõe qualquer restrição sobre $z$. Assim, se encontrarmos valores $x$ e $y$ que satisfizerem essa equação, então os pontos de coordenadas $(x, y, z)$ satisfarão também a equação para valores *arbitrários* de $z$. Geometricamente, o ponto $(x, y, z)$ situa-se na reta vertical pelo ponto $(x, y, 0)$ no plano $xy$, o que significa que podemos obter o gráfico de $y = x^2$ em um sistema de coordenadas $xyz$ fazendo, primeiro, o gráfico da equação no plano $xy$ e, então, translandando esse gráfico paralelamente ao eixo $z$ para obter o gráfico inteiro (Figura 11.1.6).

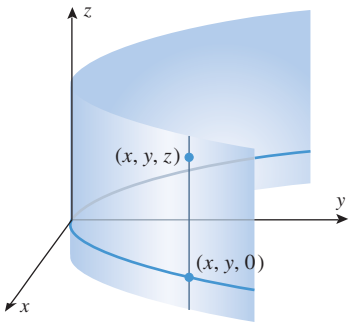



**Figura 11.1.6**

O processo de gerar uma superfície transladando uma curva plana paralelamente a alguma reta é chamado de ***extrusão***, e as superfícies que são geradas por extrusão são chamadas de ***superfícies cilíndricas***. Um exemplo familiar é a superfície de um cilindro circular reto, a qual pode ser gerada transladando um círculo paralelamente ao eixo do cilindro. O teorema seguinte fornece informações básicas sobre como fazer gráficos de equações com duas variáveis no espaço tridimensional.

**11.1.2 TEOREMA** *Uma equação que contém apenas duas das variáves $x$, $y$ e $z$ representa uma superfície cilíndrica em um sistema de coordenadas $xyz$. A superfície pode ser obtida fazendo-se o gráfico da equação no plano coordenado das duas variáveis que aparecem na equação e, então, transladando esse gráfico paralelamente ao eixo da variável que não aparece na equação.*

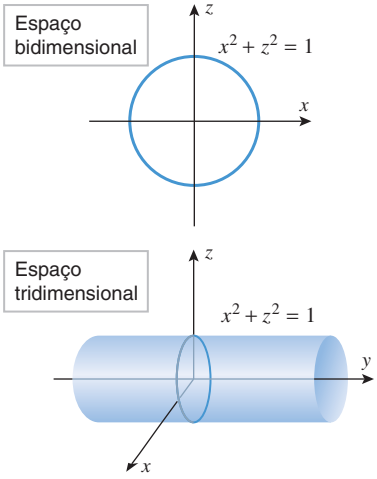



**Figura 11.1.7**

Em um sistema de coordenadas $xy$, o gráfico da equação $x = 1$ é uma reta paralela ao eixo $y$. O que é o gráfico dessa equação em um sistema de coordenadas $xyz$?

**► Exemplo 3** Esboce o gráfico de $x^2 + z^2 = 1$ no espaço tridimensional.

***Solução*** Uma vez que $y$ não aparece nessa equação, o gráfico é uma superfície cilíndrica gerada por extrusão paralelamente ao eixo $y$. No plano $xz$, o gráfico da equação $x^2 + z^2 = 1$ é um círculo. Assim, no espaço tridimensional o gráfico é um cilindro circular reto ao longo do eixo $y$ (Figura 11.1.7). ◄

**► Exemplo 4** Esboce o gráfico de $z = \operatorname{sen} y$ no espaço tridimensional.

***Solução*** (Ver Figura 11.1.8) ◄

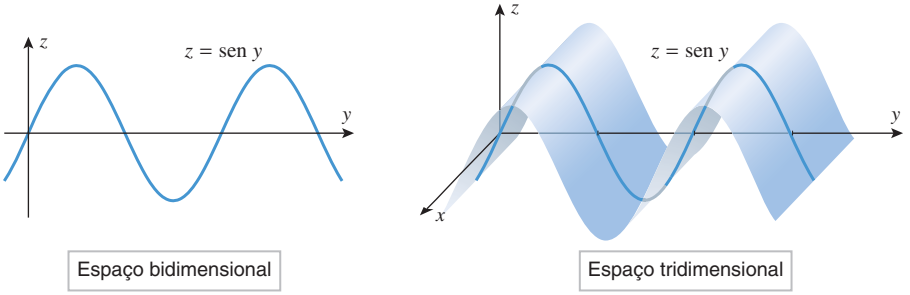



**Figura 11.1.8**

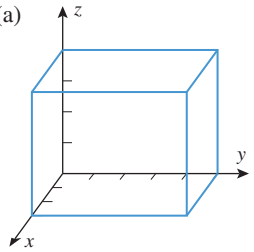
## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.1 (Ver página 773 para respostas.)

1. A distância entre os pontos $(1, -2, 0)$ e $(4, 0, 5)$ é _____.
2. O gráfico de $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$ é _____ de raio _____ centrada em _____.
3. A menor distância do ponto $(4, 0, 5)$ à esfera de equação $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 36$ é _____.
4. Seja $S$ o gráfico de $x^2 + z^2 + 6z = 16$ no espaço tridimensional.
   (a) A interseção de $S$ com o plano $xz$ é um círculo de centro _____ e raio _____.
   (b) A interseção de $S$ com o plano $xy$ é o par de retas $x =$ _____ e $x =$ _____.
   (c) A interseção de $S$ com o plano $yz$ é o par de retas $z =$ _____ e $z =$ _____.

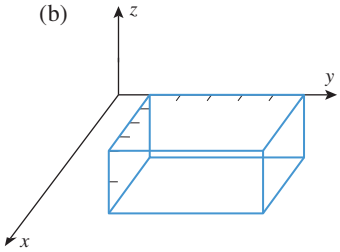
## EXERCÍCIOS 11.1 Recurso Gráfico

1. Em cada parte, encontre as coordenadas dos oitos cantos da caixa.

(a)




(b)




2. Um cubo de lado 4 tem seu centro geométrico na origem e suas faces paralelas aos planos coordenados. Esboce o cubo e dê as coordenadas dos cantos.

### ENFOCANDO CONCEITOS

3. Suponha que uma caixa tenha suas faces paralelas aos planos coordenados e os pontos $(4, 2, -2)$ e $(-6, 1, 1)$ sejam extremos de uma diagonal. Esboce a caixa e dê as coordenadas dos seis cantos restantes.
4. Suponha que uma caixa tenha suas faces paralelas aos planos coordenados e os pontos $(x_1, y_1, z_1)$ e $(x_2, y_2, z_2)$ sejam extremos de uma diagonal.
   (a) Determine as coordenadas dos seis cantos restantes.
   (b) Mostre que o ponto médio do segmento de reta unindo $(x_1, y_1, z_1)$ e $(x_2, y_2, z_2)$ é
   $$\left(\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)\right)$$
5. Interprete o gráfico de $x = 1$ nos contextos
   (a) da reta numérica (b) do espaço bidimensional
   (c) do espaço tridimensional.
6. Considere os pontos $P(3, 1, 0)$ e $Q(1, 4, 4)$.
   (a) Esboce o triângulo de vértices $P$, $Q$ e $(1, 4, 0)$. Sem calcular distâncias, explique por que esse triângulo é retângulo e, então, aplique o Teorema de Pitágoras duas vezes para encontrar a distância de $P$ a $Q$.
   (b) Repita a parte (a) usando os pontos $P$, $Q$ e $(3, 4, 0)$.
   (c) Repita a parte (a) usando os pontos $P$, $Q$ e $(1, 1, 4)$.
7. (a) Considere uma caixa com lados de comprimento $a$, $b$ e $c$. Use o Teorema de Pitágoras para mostrar que a diagonal dessa caixa tem comprimento $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. [*Sugestão:* Use o Teorema de Pitágoras para encontrar o comprimento de uma diagonal da base e, novamente, para encontrar o comprimento de uma diagonal da caixa.]
   (b) Use o resultado da parte (a) para deduzir a Fórmula (2).
8. (a) Faça uma conjectura sobre o conjunto dos pontos do espaço tridimensional que são equidistantes da origem e do ponto $(1, 0, 0)$.
   (b) Confirme sua conjectura na parte (a) usando a fórmula da distância (2).
9. Determine o centro e o raio da esfera que tem $(1, -2, 4)$ e $(3, 4, -12)$ como extremos de um diâmetro. [Ver Exercício 4.]
10. Mostre que $(4, 5, 2)$, $(1, 7, 3)$ e $(2, 4, 5)$ são vértices de um triângulo equilátero.
11. (a) Mostre que $(2, 1, 6)$, $(4, 7, 9)$ e $(8, 5, -6)$ são vértices de um triângulo retângulo.
    (b) Que vértice está no ângulo reto?
    (c) Determine a área do triângulo.
12. Determine a distância do ponto $(-5, 2, -3)$ ao
    (a) plano $xy$ (b) plano $xz$ (c) plano $yz$
    (d) eixo $x$ (e) eixo $y$ (f) eixo $z$
13. Em cada parte, determine a equação padrão da esfera que satisfaça as condições dadas.
    (a) Centro $(7, 1, 1)$; raio $= 4$.
    (b) Centro $(1, 0, -1)$; diâmetro $= 8$.
    (c) Centro $(-1, 3, 2)$ e passa pela origem.
    (d) Um diâmetro cujos extremos sejam $(-1, 2, 1)$ e $(0, 2, 3)$.
14. Determine as equações de duas esferas que estejam centradas na origem e sejam tangentes à esfera de raio 1 centrado em $(3, -2, 4)$.
15. Em cada parte, determine uma equação da esfera com centro $(2, -1, -3)$ e que satisfaça a condição dada
    (a) Tangente ao plano $xy$.
    (b) Tangente ao plano $xz$.
    (c) Tangente ao plano $yz$.
16. (a) Determine uma equação da esfera inscrita no cubo centrado no ponto $(-2, 1, 3)$ e de lados de comprimento 1 paralelos aos planos coordenados.

(b) Determine uma equação da esfera que está circunscrita ao cubo da parte (a).
(c) Encontre uma equação da esfera inscrita no cubo determinado pelos planos $x = 6$, $x = 2$, $y = 5$, $y = 9$, $z = 0$ e $z = 4$.
(d) Encontre uma equação da esfera circunscrita ao cubo da parte (c).

**17.** Uma esfera está centrada em um ponto do primeiro octante e é tangente a cada um dos três planos coordenados. Mostre que o centro dessa esfera é um ponto da forma $(r, r, r)$, onde $r$ é o raio da esfera.

**18.** Uma esfera está centrada em um ponto do primeiro octante e é tangente a cada um dos três planos coordenados. A distância da origem à esfera é de $3 - \sqrt{3}$ unidades. Encontre uma equação dessa esfera.

**19-22 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**19.** Por definição, uma "superfície cilíndrica" é um cilindro circular reto cujo eixo é paralelo a alguns dos eixos coordenados.

**20.** O gráfico de $x^2 + y^2 = 1$ no espaço tridimensional é um círculo de raio 1 centrado na origem.

**21.** Se um ponto pertencer a ambos os planos, $xy$ e $xz$, então o ponto estará no eixo $x$.

**22.** Uma esfera de centro $P(x_0, y_0, z_0)$ e raio $r$ consiste em todos os pontos $(x, y, z)$ que satisfazem a desigualdade

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le r^2$$

**23-28** Descreva a superfície cuja equação é dada. ■

**23.** $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z - 19 = 0$

**24.** $x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$

**25.** $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 3y + 5z - 2 = 0$

**26.** $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z + 3 = 0$

**27.** $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z + 25 = 0$

**28.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 8z + 1 = 0$

**29.** Em cada parte, esboce a parte da superfície que está situada no primeiro octante.
(a) $y = x$ (b) $y = z$ (c) $x = z$

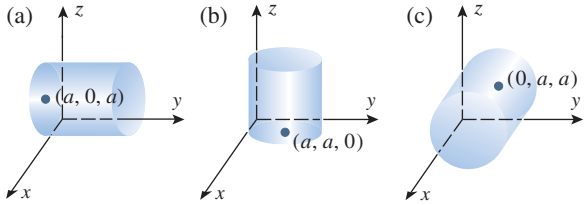
**30.** Em cada parte, esboce o gráfico da equação no espaço tridimensional.
(a) $x = 1$ (b) $y = 1$ (c) $z = 1$

**31.** Em cada parte, esboce o gráfico da equação no espaço tridimensional.
(a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $y^2 + z^2 = 25$ (c) $x^2 + z^2 = 25$

**32.** Em cada parte, esboce o gráfico da equação no espaço tridimensional.
(a) $x = y^2$ (b) $z = x^2$ (c) $y = z^2$

**33.** Em cada parte, escreva uma equação da superfície.
(a) O plano que contém o eixo $x$ e o ponto $(0, 1, 2)$.
(b) O plano que contém o eixo $y$ e o ponto $(1, 0, 2)$.
(c) O cilindro circular reto que tem raio 1 e está centrado sobre a reta paralela ao eixo $z$ que passa no ponto $(1, 1, 0)$.
(d) O cilindro circular reto que tem raio 1 e está centrado sobre a reta paralela ao eixo $y$ que passa no ponto $(1, 0, 1)$.

**34.** Determine as equações dos seguintes cilindros circulares retos. Cada cilindro tem raio $a$ e é tangente a dois planos coordenados.




**35-44** Esboce a superfície no espaço tridimensional. ■

**35.** $y = \operatorname{sen} x$ **36.** $y = e^x$

**37.** $z = 1 - y^2$ **38.** $z = \cos x$

**39.** $2x + z = 3$ **40.** $2x + 3y = 6$

**41.** $4x^2 + 9z^2 = 36$ **42.** $z = \sqrt{3 - x}$

**43.** $y^2 - 4z^2 = 4$ **44.** $yz = 1$

**45.** Use um recurso gráfico para gerar a curva $y = x^3/(1 + x^2)$ no plano $xy$ e, então, use o gráfico para ajudar a esboçar a superfície $z = y^3/(1 + y^2)$ no espaço tridimensional.

**46.** Use um recurso gráfico para gerar a curva $y = x/(1 + x^4)$ no plano $xy$ e, então, use o gráfico para ajudar a esboçar a superfície $z = y\,/\,(1 + y^4)$ no espaço tridimensional.

**47.** Se um besouro andar sobre a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$$

quão perto e quão afastado poderá ficar da origem?

**48.** Descreva o conjunto de todos os pontos do espaço tridimensional cujas coordenadas satisfaçam a desigualdade $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8z \ge 8$.

**49.** Descreva o conjunto de todos os pontos no espaço tridimensional cujas coordenadas satisfaçam a desigualdade $y^2 + z^2 + 6y - 4z > 3$.

**50.** A distância entre um ponto $P(x, y, z)$ e o ponto $A(1, -2, 0)$ é duas vezes a distância entre $P$ e o ponto $B(0, 1, 1)$. Mostre que o conjunto de todos esses pontos constitui uma esfera e determine o centro e o raio da esfera.

**51.** Conforme mostrado na figura a seguir, uma bola de boliche de raio $R$ é colocada dentro de uma caixa grande o suficiente para contê-la exatamente; para ser transportada, a bola é calçada em cada canto da caixa por esferas de isopor. Encontre o raio da maior esfera de isopor que pode ser usada. [*Sugestão*: Tome a origem de um sistema cartesiano de coordenadas em um canto da caixa com eixos coordenados ao longo das arestas.]

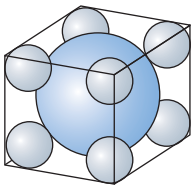


**Figura Ex-51**

**52.** Considere a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

e seja $K = G^2 + H^2 + I^2 - 4J$.

(a) Prove que a equação representa uma esfera se $K > 0$, um ponto se $K = 0$ e não tem gráfico se $K < 0$.

(b) No caso em que $K > 0$, determine o centro e o raio da esfera.

**53.** (a) A figura em anexo mostra uma superfície de revolução que foi gerada fazendo girar a curva $y = f(x)$ no plano $xy$ em torno do eixo $x$. Mostre que a equação dessa superfície é $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$. [*Sugestão*: Cada ponto sobre a curva traça um círculo quando é girado em torno do eixo $x$.]

(b) Determine uma equação da superfície de revolução que é gerada fazendo girar a curva $y = e^x$ no plano $xy$ em torno do eixo $x$.

(c) Mostre que o elipsoide $3x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ é uma superfície de revolução em torno do eixo $x$ determinando uma curva $y = f(x)$ no plano $xy$ que gere a superfície.

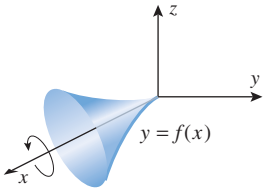



**Figura Ex-53**

**54.** Em cada parte, use a ideia do Exercício 53(a) para deduzir uma fórmula da superfície de revolução dada.

(a) A superfície gerada fazendo girar a curva $x = f(y)$ no plano $xy$ em torno do eixo $y$.

(b) A superfície gerada fazendo girar a curva $y = f(z)$ no plano $yz$ em torno do eixo $z$.

(c) A superfície gerada fazendo girar a curva $z = f(x)$ no plano $xz$ em torno do eixo $x$.

**55.** Mostre que, com quaisquer valores de $\theta$ e $\phi$, o ponto

$$(a \operatorname{sen} \phi \cos \theta, a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, a \cos \phi)$$

situa-se sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

**56.** **Texto** Explique como pode ser determinado que um conjunto de pontos do espaço tridimensional seja o gráfico de alguma equação que envolve no máximo duas das três variáveis $x$, $y$ e $z$.

**57.** **Texto** Discuta o que ocorre geometricamente quando equações em $x$, $y$ e $z$ são substituídas por desigualdades. Por exemplo, compare o gráfico de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com o conjunto de pontos que satisfazem a desigualdade $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.1

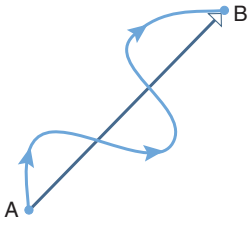
**1.** $\sqrt{38}$ **2.** uma esfera; 4; $(3, 2, -1)$ **3.** $\sqrt{38} - 6$ **4.** (a) $(0, 0, -3)$; 5 (b) 4; $-4$ (c) 2; $-8$

## 11.2 VETORES

*Muitas grandezas físicas, como a área, o comprimento, a massa e a temperatura, são descritas inteiramente sendo dada a magnitude da grandeza. Essas grandezas são denominadas "escalares". Outras grandezas físicas, denominadas "vetores", não estão determinadas inteiramente enquanto não sejam especificados não só a magnitude mas também a direção e o sentido. Por exemplo, os ventos são, geralmente, descritos por sua velocidade, direção e sentido, digamos, um vento de 70 km/h do Nordeste. Juntos, a velocidade, a direção e o sentido do vento formam uma quantidade chamada simplesmente de velocidade do vento. Outros exemplos de vetores são a força e o deslocamento. Nesta seção, desenvolveremos as propriedades matemáticas básicas dos vetores.*

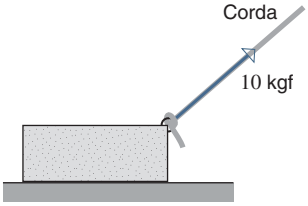
### VETORES NA FÍSICA E ENGENHARIA

Uma partícula que se move ao longo de uma reta pode mover-se apenas em dois sentidos, portanto o sentido do movimento pode ser descrito tomando um dos sentidos como sendo positivo e o outro como sendo negativo. Desse modo, o *deslocamento* ou a *variação da posição* de um ponto pode ser descrito por um número real com sinal. Por exemplo, um deslocamento de 3 $(= +3)$ descreve uma variação da posição de 3 unidades no sentido positivo, enquanto que um deslocamento de $-3$ descreve uma variação da posição de 3 unidades no sentido negativo. Entretanto, para uma partícula que se move no espaço bi ou tridimensional, um sinal de mais ou menos não é suficiente para especificar a direção e o sentido do movimento, sendo necessários outros métodos. Um método é utilizar uma seta, denominada ***vetor***, que aponte na direção e sentido do movimento e cujo comprimento represente a distância do ponto inicial até o ponto final da seta; esse vetor é denominado ***vetor deslocamento*** do movimento. Por exemplo, a Fi-



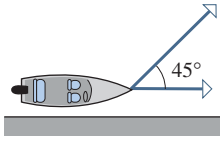

Um vetor deslocamento

(*a*)




Um vetor força agindo sobre um bloco

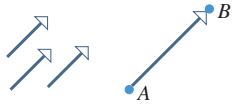
(*b*)




Dois vetores velocidade que afetam o movimento de um barco

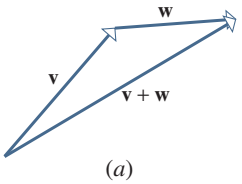
(*c*)

**Figura 11.2.1**

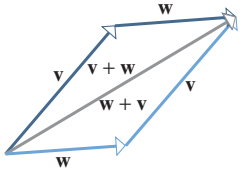



(*a*) (*b*)

**Figura 11.2.2**




(*a*)




(*b*)

**Figura 11.2.3**

gura 11.2.1*a* mostra o vetor deslocamento de uma partícula que se move do ponto $A$ ao ponto $B$ ao longo de um caminho curvilíneo. Note que o comprimento da seta descreve a distância entre os pontos inicial e final, e não a verdadeira distância percorrida pela partícula.

As setas não se limitam apenas a descrever deslocamentos, podendo ser usadas para descrever quaisquer grandezas físicas que envolvam tanto magnitude quanto direção e sentido. Dois exemplos importantes são forças e velocidades. Por exemplo, a seta da Figura 11.2.1*b* mostra um vetor força de 10 kgf agindo numa certa direção e sentido sobre um bloco, e as setas da Figura 11.2.1*c* mostram os vetores velocidade de um barco cujo motor o impulsiona a 2 km/h paralelamente ao litoral e o vento que age num ângulo de 45° com o litoral. A intuição sugere que os dois vetores velocidade serão combinados para formar alguma velocidade líquida para o barco a um certo ângulo com o litoral. Assim, nosso primeiro objetivo nesta seção será definir matematicamente as operações com vetores que possam ser usadas na determinação do efeito combinado de vetores.

## VETORES DO PONTO DE VISTA GEOMÉTRICO

No espaço bi e tridimensional, os vetores podem ser representados geometricamente por setas: a direção e sentido da seta especificam a direção e sentido do vetor, e o comprimento da seta descreve a magnitude do vetor. A cauda da seta indica o ***ponto inicial*** do vetor e a ponta da seta indica o ***ponto final*** do vetor. Denotaremos os vetores com letras minúsculas em negrito, como $\mathbf{a}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{x}$. Quando discutirmos vetores, estaremos nos referindo aos números reais como ***escalares***. Os escalares serão denotados por letras minúsculas em itálico, como $a$, $k$, $v$, $w$ e $x$. Dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são considerados ***iguais*** (ou então, ***equivalentes***) se tiverem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido, caso em que escrevemos $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Geometricamente, dois vetores são iguais se forem translações um do outro; assim, os três vetores da Figura 11.2.2*a* são iguais, mesmo que estejam em posições diferentes.

Como os vetores não são afetados por translação, o ponto inicial de um vetor $\mathbf{v}$ pode ser movido para qualquer ponto conveniente $A$ através de uma translação apropriada. Se o ponto inicial de $\mathbf{v}$ for $A$ e o ponto final for $B$, então escreveremos $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ quando quisermos enfatizar esses pontos inicial e final (Figura 11.2.2*b*). Se os pontos inicial e final de um vetor coincidirem, o vetor terá comprimento nulo; esse vetor é denominado ***vetor nulo*** ou ***vetor zero*** e denotado por $\mathbf{0}$. Ao vetor zero não estão associados quaisquer direção e sentido, motivo pelo qual podemos convencionar que, dependendo do problema, o vetor nulo tem a direção e o sentido que for mais conveniente.

Há varias operações algébricas que são efetuadas com vetores, todas originadas na Física. Começaremos com a adição de vetores.

**11.2.1 DEFINIÇÃO** Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores, então a ***soma*** $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ é o vetor do ponto inicial de $\mathbf{v}$ ao ponto final de $\mathbf{w}$ quando os vetores estiverem posicionados de tal forma que o ponto inicial de $\mathbf{w}$ é o ponto final de $\mathbf{v}$ (Figura 11.2.3*a*).

Na Figura 11.2.3*b*, construímos duas somas, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (flecha mais escura) e $\mathbf{w} + \mathbf{v}$ (flecha mais clara). É evidente que

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

e que a soma coincide com a diagonal do paralelogramo determinado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, quando esses vetores estiverem posicionados de tal forma que tenham o mesmo ponto inicial.

Como os pontos inicial e final de $\mathbf{0}$ coincidem, segue que

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

**11.2.2 DEFINIÇÃO** Se $\mathbf{v}$ for um vetor não nulo e $k$ for um número real não nulo (um escalar), então o ***múltiplo escalar*** $k\mathbf{v}$ é definido como sendo o vetor cujo comprimento é $|k|$ vezes o comprimento de $\mathbf{v}$, cuja direção é a mesma de $\mathbf{v}$ e cujo sentido é o mesmo de $\mathbf{v}$ se $k > 0$ e o oposto a $\mathbf{v}$ se $k < 0$. Definimos $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se $k = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

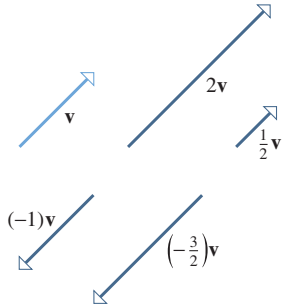



Figura 11.2.4

A Figura 11.2.4 mostra a relação geométrica entre um vetor **v** e vários múltiplos escalares dele. Observe que se $k$ e **v** forem não nulos, então os vetores **v** e $k$**v** situam-se na mesma reta se seus pontos iniciais coincidirem e, caso contrário, em retas paralelas ou coincidentes. Assim, dizemos que **v** e $k$**v** são ***vetores paralelos***. Observe, também, que o vetor $(-1)$**v** tem o mesmo comprimento de **v**, porém com sentido oposto. Dizemos que $(-1)$**v** é o ***negativo*** de **v**, que denotamos por $-$**v** (Figura 11.2.5). Em particular, $-\mathbf{0} = (-1)\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

A subtração de vetores é definida em termos da adição e da multiplicação escalar por

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

A diferença $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ pode ser obtida geometricamente, construindo primeiro o vetor $-\mathbf{w}$ e, então, somando **v** e $-$**w**, pelo método do paralelogramo (Figura 11.2.6*a*). Contudo, se **v** e **w** forem posicionados de tal forma que os pontos iniciais coincidam, então $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ pode ser formado mais diretamente, como mostra a Figura 11.2.6*b*, traçando o vetor do ponto final de **w** (segundo termo) até o ponto final de **v** (o primeiro termo). No caso especial em que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, os pontos finais dos vetores coincidem, logo a sua diferença é **0**; isto é,

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

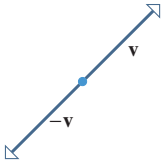



Figura 11.2.5

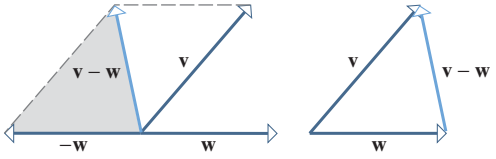



Figura 11.2.6

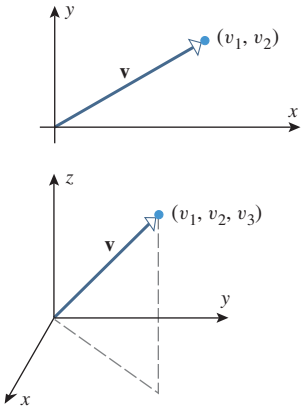



Figura 11.2.7

Repare na diferença de notação entre um *ponto* $(v_1, v_2)$ e um *vetor* $\langle v_1, v_2 \rangle$.

## VETORES EM SISTEMAS DE COORDENADAS

Os problemas envolvendo vetores são, frequentemente, melhor resolvidos introduzindo um sistema de coordenadas retangulares. Se um vetor **v** está posicionado com seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas retangulares, então seu ponto final terá as coordenadas da forma $(v_1, v_2)$ ou $(v_1, v_2, v_3)$, dependendo se estiver no espaço bidimensional ou no espaço tridimensional (Figura 11.2.7). Chamaremos essas coordenadas de ***componentes*** de **v** e escrevemos **v** em *termos de componentes* usando uma notação especial como

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

Espaço bidimensional — Espaço tridimensional

Em particular, os vetores zero nos espaços bi e tridimensional são

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{0} = 0, 0, 0 \rangle$$

respectivamente.

Os componentes fornecem uma maneira simples de identificar vetores equivalentes. Por exemplo, considere os vetores $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ no espaço bidimensional. Se $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, então os vetores têm mesmo comprimento, direção e sentido, e isso significa que seus pontos finais coincidem quando seus pontos iniciais são colocados na origem. Segue que $v_1 = w_1$ e $v_2 = w_2$; portanto, mostramos que os vetores equivalentes têm os mesmos componentes. Reciprocamente, se $v_1 = w_1$ e $v_2 = w_2$, então os pontos finais dos vetores coincidem quando os seus pontos iniciais estiverem localizados na origem. Segue que os vetores têm mesmo comprimento, direção e sentido; portanto, mostramos que vetores com os mesmos componentes são equivalentes. Um argumento análogo é válido no espaço tridimensional, de modo que temos o resultado seguinte.

**11.2.3 TEOREMA** *Dois vetores são equivalentes se, e somente se, seus componentes correspondentes são iguais.*

Por exemplo,

$$\langle a, b, c\rangle = \langle 1, -4, 2\rangle$$

se e somente se $a = 1$, $b = -4$ e $c = 2$.

## OPERAÇÕES ARITMÉTICAS COM VETORES

O próximo teorema mostra como usar componentes para efetuar operações algébricas com vetores.

**11.2.4 TEOREMA** *Se* $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ *e* $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2\rangle$ *forem vetores no espaço bidimensional e* $k$ *for um escalar qualquer, então*

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2\rangle \quad (1)$$
$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle v_1 - w_1, v_2 - w_2\rangle \quad (2)$$
$$k\mathbf{v} = \langle kv_1, kv_2\rangle \quad (3)$$

*Analogamente, se* $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ *e* $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ *forem vetores no espaço tridimensional e* $k$ *for um escalar qualquer, então*

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\rangle \quad (4)$$
$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3\rangle \quad (5)$$
$$k\mathbf{v} = \langle kv_1, kv_2, kv_3\rangle \quad (6)$$

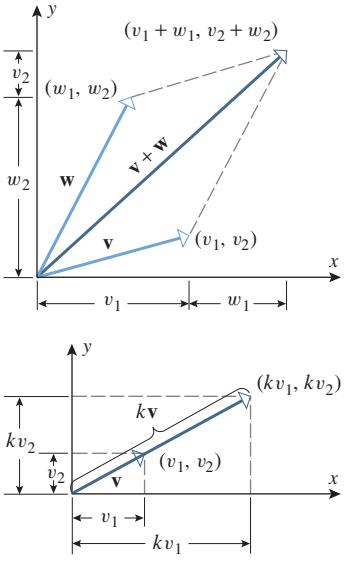



**Figura 11.2.8**

Não provaremos esse teorema. Contudo, (1) e (3) deveriam ser evidentes a partir da Figura 11.2.8. Figuras análogas no espaço tridimensional podem ser usadas para motivar (4) e (6). As Fórmulas (2) e (5) podem ser obtidas escrevendo $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$.

**► Exemplo 1** Se $\mathbf{v} = \langle -2, 0, 1\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle 3, 5, -4\rangle$, então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle -2, 0, 1\rangle + \langle 3, 5, -4\rangle = \langle 1, 5, -3\rangle$$
$$3\mathbf{v} = \langle -6, 0, 3\rangle$$
$$-\mathbf{w} = \langle -3, -5, 4\rangle$$
$$\mathbf{w} - 2\mathbf{v} = \langle 3, 5, -4\rangle - \langle -4, 0, 2\rangle = \langle 7, 5, -6\rangle \quad \blacktriangleleft$$

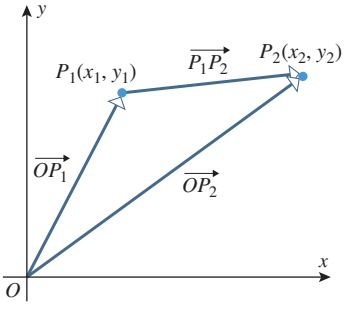



**Figura 11.2.9**

## VETORES COM PONTO INICIAL NÃO NA ORIGEM

Lembre-se de que definimos os componentes de um vetor como as coordenadas de seu ponto final, quando o ponto inicial estiver na origem. Consideraremos agora o problema de encontrar os componentes de um vetor cujo ponto inicial não esteja na origem. Para sermos específicos, suponha que $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sejam pontos no espaço bidimensional e que estejamos interessados em encontrar os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$. Conforme ilustrado na Figura 11.2.9, podemos escrever esse vetor como

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2, y_2\rangle - \langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$

Assim, mostrarmos que os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ podem ser obtidos pela subtração das coordenadas de seu ponto inicial das coordenadas de seu ponto final. Contas análogas valem no espaço tridimensional, de modo que estabelecem o resultado seguinte.

**11.2.5 TEOREMA** *Se $\overrightarrow{P_1P_2}$ for um vetor no espaço bidimensional com ponto inicial $P_1(x_1, y_1)$ e ponto final $P_2(x_2, y_2)$, então*

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \tag{7}$$

*Analogamente, se $\overrightarrow{P_1P_2}$ for um vetor no espaço tridimensional com ponto inicial $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e ponto final $P_2(x_2, y_2, z_2)$,* então

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle \tag{8}$$

► **Exemplo 2** No espaço bidimensional, o vetor de $P_1(1, 3)$ a $P_2(4, -2)$ é

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 4 - 1, -2 - 3 \rangle = \langle 3, -5 \rangle$$

e no espaço tridimensional, o vetor de $A(0, -2, 5)$ a $B(3, 4, -1)$ é

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3 - 0, 4 - (-2), -1 - 5 \rangle = \langle 3, 6, -6 \rangle \quad \blacktriangleleft$$

## REGRAS DA ARITMÉTICA VETORIAL

O seguinte teorema mostra que muitas das regras familiares da aritmética comum também são válidas na aritmética vetorial.

Segue, da parte (*b*) do Teorema 11.2.6, que a expressão

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

não é ambígua, uma vez que resulta o mesmo vetor, independentemente da maneira em que os termos são agrupados.

**11.2.6 TEOREMA** *Dados quaisquer vetores* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *e quaisquer escalares* $a$ *e* $b$, *as seguintes relações são válidas*:

| | |
|---|---|
| (*a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | (*e*) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$ |
| (*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | (*f*) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ |
| (*c*) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ | (*g*) $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$ |
| (*d*) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ | (*h*) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ |

Os resultados nesse teorema podem ser provados algebricamente usando componentes ou geometricamente tratando os vetores como setas. Provaremos a parte (*b*) das duas maneiras e deixaremos o restante das provas como exercícios.

Observe que, na Figura 11.2.10, os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ estão colocados um após o outro, e que a soma

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

é o vetor do ponto inicial de $\mathbf{u}$ (a primeira parcela) ao ponto final de $\mathbf{w}$ (a última parcela). Isso também vale para quatro ou mais vetores (Figura 11.2.11).

**DEMONSTRAÇÃO (*b*)** ***(Algébrica no espaço bidimensional)*** Sejam $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$. Então

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= (\langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle) + \langle w_1, w_2 \rangle \\
&= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle \\
&= \langle (u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2 \rangle \\
&= \langle u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2) \rangle \\
&= \langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2 \rangle \\
&= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})
\end{aligned}$$

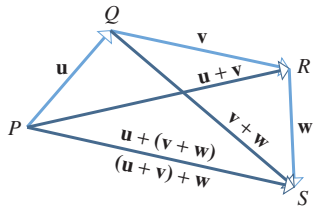



Figura 11.2.10

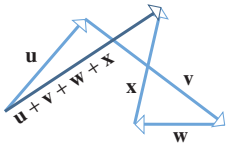



Figura 11.2.11

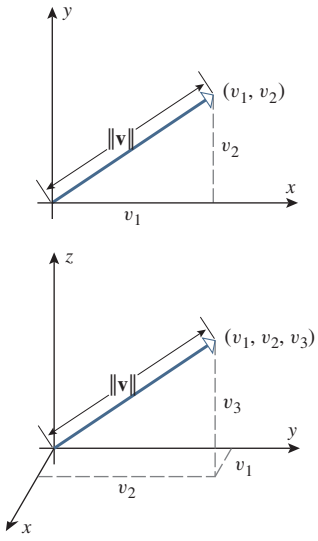



Figura 11.2.12

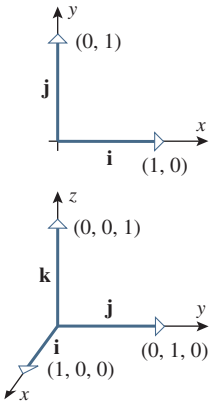



Figura 11.2.13

DEMONSTRAÇÃO (*b*) (***Geométrica***) Sejam **u**, **v** e **w** representados por $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ e $\overrightarrow{RS}$, conforme mostrado na Figura 11.2.10. Então,

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\overrightarrow{QS} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\overrightarrow{PS}$$
$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\overrightarrow{PR} \quad \text{e} \quad (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\overrightarrow{PS}$$

Por consequência,

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \quad \blacksquare$$

## ■ NORMA DE UM VETOR

A distância entre os pontos inicial e final de um vetor **v** é chamada de ***comprimento***, ***norma*** ou ***magnitude*** de **v** e é denotada por $\|\mathbf{v}\|$. Essa distância não muda se o vetor for transladado; portanto, para propósitos de cálculo da norma, podemos supor que o vetor esteja posicionado com seu ponto inicial na origem (Figura 11.2.12). Isso torna evidente que a norma de um vetor $\mathbf{v}=\langle v_1, v_2\rangle$ no espaço bidimensional é dada por

$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2} \tag{9}$$

e a norma de um vetor $\mathbf{v}=\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ no espaço tridimensional é dada por

$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2} \tag{10}$$

► **Exemplo 3** Determine a norma de $\mathbf{v}=\langle -2, 3\rangle$, $10\mathbf{v}=\langle -20, 30\rangle$ e $\mathbf{w}=\langle 2, 3, 6\rangle$.

***Solução*** De (9) e (10)

$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$$
$$\|10\mathbf{v}\|=\sqrt{(-20)^2+30^2}=\sqrt{1.300}=10\sqrt{13}$$
$$\|\mathbf{w}\|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\sqrt{49}=7 \quad \blacktriangleleft$$

Observe que $\|10\mathbf{v}\|=10\|\mathbf{v}\|$ no Exemplo 3. Isso é consistente com a Definição 11.2.2, que estipulou que o comprimento de $k\mathbf{v}$ deve ser $|k|$ vezes o comprimento de **v**; isto é,

$$\|k\mathbf{v}\|=|k|\|\mathbf{v}\| \tag{11}$$

Assim, por exemplo

$$\|3\mathbf{v}\|=|3|\|\mathbf{v}\|=3\|\mathbf{v}\|$$
$$\|-2\mathbf{v}\|=|-2|\|\mathbf{v}\|=2\|\mathbf{v}\|$$
$$\|-1\mathbf{v}\|=|-1|\|\mathbf{v}\|=\|\mathbf{v}\|$$

Isso se aplica tanto a vetores no espaço bi quanto tridimensional.

## ■ VETORES UNITÁRIOS

Um vetor de comprimento 1 é denominado ***vetor unitário***. Em um sistema de coordenadas *xy*, os vetores unitários ao longo dos eixos *x* e *y* são denotados por **i** e **j**, respectivamente e, em um sistema de coordenadas *xyz*, os vetores unitários ao longo dos eixos *x*, *y* e *z* são denotados por **i**, **j** e **k**, respectivamente (Figura 11.2.13). Desse modo,

$\mathbf{i}=\langle 1, 0\rangle, \quad \mathbf{j}=\langle 0, 1\rangle$ — Espaço bidimensional

$\mathbf{i}=\langle 1, 0, 0\rangle, \quad \mathbf{j}=\langle 0, 1, 0\rangle, \quad \mathbf{k}=\langle 0, 0, 1\rangle$ — Espaço tridimensional

Todo vetor no espaço bidimensional pode ser expresso de maneira única em termos de **i** e **j**, enquanto que no espaço tridimensional pode ser expresso de maneira única em termos de **i**, **j** e **k**, como segue:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, 0 \rangle + \langle 0, v_2 \rangle = v_1\langle 1, 0 \rangle + v_2\langle 0, 1 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\langle 1, 0, 0 \rangle + v_2\langle 0, 1, 0 \rangle + v_3\langle 0, 0, 1 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

► **Exemplo 4** A tabela a seguir dá alguns exemplos da notação vetorial nos espaços bi e tridimensional.

| ESPAÇO BIDIMENSIONAL | ESPAÇO TRIDIMENSIONAL |
|---|---|
| $\langle 2, 3 \rangle = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ | $\langle 2, -3, 4 \rangle = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ |
| $\langle -4, 0 \rangle = -4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = -4\mathbf{i}$ | $\langle 0, 3, 0 \rangle = 3\mathbf{j}$ |
| $\langle 0, 0 \rangle = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = \mathbf{0}$ | $\langle 0, 0, 0 \rangle = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$ |
| $(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ | $(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) - (4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ |
| $5(6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = 30\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ | $2(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) + 4(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ |
| $\|2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ | $\|\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$ |
| $\|v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ | $\|\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ |

◄

As duas notações para vetores ilustradas no Exemplo 4 são completamente intercambiáveis, sendo a escolha uma questão de conveniência ou de preferência pessoal.

## ■ NORMALIZANDO UM VETOR

Um problema comum nas aplicações é encontrar um vetor unitário **u** que tenha a mesma direção e sentido de algum vetor **v** não nulo dado. Isso pode ser feito multiplicando-se **v** pelo recíproco de seu comprimento; isto é,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

é um vetor unitário com a mesma direção e sentido que o vetor **v**: a direção e o sentido são os mesmos, pois $k = 1/\|\mathbf{v}\|$ é um escalar positivo, e o comprimento é 1, pois

$$\|\mathbf{u}\| = \|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\| = k\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1$$

O processo de multiplicação de um vetor **v** pelo recíproco de seu comprimento para obter um vetor unitário com a mesma direção e sentido é chamado de ***normalização*** de **v**.

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Muitos recursos computacionais podem realizar operações vetoriais, e alguns têm embutidas operações de norma e normalização. Se a sua calculadora tiver essas capacidades, use-a para verificar os cálculos nos Exemplos 1, 3 e 5.

► **Exemplo 5** Determine o vetor unitário com a mesma direção e sentido que $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

***Solução*** O vetor **v** tem o comprimento

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

portanto, o vetor unitário **u** na mesma direção e sentido de **v** é

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{3}\mathbf{v} = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}$$ ◄

## ■ VETORES DETERMINADOS POR COMPRIMENTO E ÂNGULO

Se **v** for um vetor não nulo com o seu ponto inicial na origem de um sistema de coordenadas $xy$, e se $\theta$ for o ângulo entre o eixo $x$ positivo e a reta radial através de **v**, então o componente $x$ de **v** pode ser escrito como $\|\mathbf{v}\|\cos\theta$, enquanto que $\|\mathbf{v}\|\text{sen}\,\theta$ é o componente $y$ (Figura 11.2.14); portanto, **v** pode ser expresso na forma trigonométrica como

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\langle \cos\theta, \text{sen}\,\theta \rangle \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\cos\theta\mathbf{i} + \|\mathbf{v}\|\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} \tag{12}$$

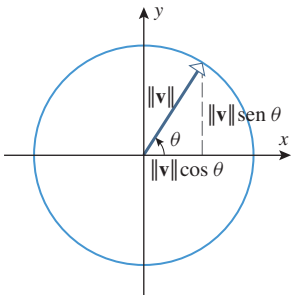



Figura 11.2.14

No caso especial de um vetor unitário **u**, isso simplifica para

$$\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} \tag{13}$$

**► Exemplo 6**

(a) Determine o vetor de comprimento 2 que faz um ângulo de $\pi/4$ com o eixo $x$ positivo.

(b) Determine o ângulo que o vetor $\mathbf{v} = -\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$ forma com o eixo $x$ positivo.

***Solução (a)*** De (12)

$$\mathbf{v} = 2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = \sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$$

***Solução (b)*** Vamos normalizar **v**, usar (13) para encontrar sen $\theta$ e cos $\theta$ e, então, usar esses valores para encontrar $\theta$. Normalizando **v**, obtém-se

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{-\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

Assim, $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$ e $\operatorname{sen}\theta = 1/2$, de onde concluímos que $\theta = 5\pi/6$. ◄

## ■ VETORES DETERMINADOS POR COMPRIMENTO E UM VETOR NA MESMA DIREÇÃO E SENTIDO

É um problema comum em aplicações que a direção e o sentido nos espaços bi ou tridimensional sejam determinados por algum vetor unitário **u** e que queiramos encontrar os componentes do vetor **v** que tenha a mesma direção e sentido que **u** e algum comprimento especificado $\|\mathbf{v}\|$. Isso pode ser feito expressando **v** como

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$$

**v** é igual a seu comprimento vezes um vetor unitário na mesma direção e sentido

e então observando os componentes de $\|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$.

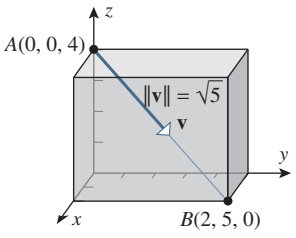



Figura 11.2.15

**► Exemplo 7** A Figura 11.2.15 mostra um vetor **v** de comprimento $\sqrt{5}$ que se estende ao longo da reta passando por $A$ e $B$. Encontre os componentes de **v**.

***Solução*** Vamos encontrar, primeiro, os componentes do vetor $\overrightarrow{AB}$, então normalizamos este vetor para obter um vetor unitário na direção de **v** e depois multiplicamos este vetor unitário por $\|\mathbf{v}\|$ para obter o vetor **v**. Os cálculos são os seguintes:

$$\overrightarrow{AB} = \langle 2, 5, 0\rangle - \langle 0, 0, 4\rangle = \langle 2, 5, -4\rangle$$

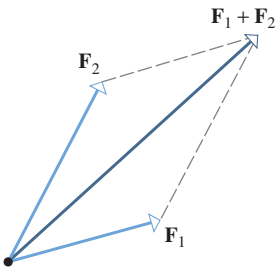
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \left\langle \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \right) = \sqrt{5}\left\langle \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}} \right\rangle = \left\langle \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3} \right\rangle$$ ◄

## ■ RESULTANTE DE DUAS FORÇAS CONCORRENTES

O efeito que uma força exerce sobre um objeto depende da magnitude, da direção e do sentido da força e do ponto na qual foi aplicada. Assim, as forças são consideradas como sendo grandezas vetoriais e, de fato, as operações algébricas com vetores que definimos nesta seção têm sua origem no estudo das forças. Por exemplo, é um fato da Física que se duas forças $\mathbf{F}_1$




A única força $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ tem o mesmo efeito do que as duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$.

**Figura 11.2.16**

e $\mathbf{F}_2$ forem aplicadas em um mesmo ponto de um objeto, então as duas forças têm o mesmo efeito sobre o objeto do que a única força $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ aplicada naquele ponto (Figura 11.2.16). Os físicos e engenheiros denominam $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ a ***resultante*** de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ e dizem que as forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ são ***concorrentes***, para indicar que elas foram aplicadas no mesmo ponto.

Em muitas aplicações, são conhecidas as magnitudes de duas forças concorrentes e o ângulo entre elas, e o problema é encontrar magnitude, direção e sentido da resultante. Uma abordagem para resolver esse problema é usar (12) para encontrar os componentes das forças e, depois, usar (1) para encontrar os componentes da resultante. O próximo exemplo ilustra esse método.

► **Exemplo 8** Suponha que duas forças sejam aplicadas em uma argola, conforme a Figura 11.2.17. Encontre a magnitude da resultante e o ângulo $\theta$ que ela faz com o eixo $x$ positivo.

***Solução*** Observe que $\mathbf{F}_1$ faz um ângulo de 30° com o eixo $x$ positivo e que $\mathbf{F}_2$ faz um ângulo de $30° + 40° = 70°$ com o eixo $x$ positivo. Como sabemos que $\|\mathbf{F}_1\| = 200$ N e $\|\mathbf{F}_2\| = 300$ N, segue de (12) que

$$\mathbf{F}_1 = 200\langle \cos 30°, \operatorname{sen} 30° \rangle = \langle 100\sqrt{3}, 100 \rangle$$

e

$$F_2 = 300\langle \cos 70°, \operatorname{sen} 70° \rangle = \langle 300 \cos 70°, 300 \operatorname{sen} 70° \rangle$$

Portanto, em componentes, a resultante $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 &= \langle 100\sqrt{3} + 300 \cos 70°, 100 + 300 \operatorname{sen} 70° \rangle \\ &= 100\langle \sqrt{3} + 3 \cos 70°, 1 + 3 \operatorname{sen} 70° \rangle \approx \langle 275{,}8, 381{,}9 \rangle \end{aligned}$$

A magnitude dessa resultante é

$$\|\mathbf{F}\| = 100\sqrt{\left(\sqrt{3} + 3 \cos 70°\right)^2 + \left(1 + 3 \operatorname{sen} 70°\right)^2} \approx 471 \text{ N}$$

Seja $\theta$ o ângulo que $\mathbf{F}$ faz com o eixo $x$ positivo quando o ponto inicial de $\mathbf{F}$ for colocado na origem. Usando (12) e igualando os componentes $x$ de $\mathbf{F}$, obtemos

$$\|\mathbf{F}\| \cos\theta = 100\sqrt{3} + 300 \cos 70° \quad \text{ou} \quad \cos\theta = \frac{100\sqrt{3} + 300 \cos 70°}{\|\mathbf{F}\|}$$

Como o ponto final de $\mathbf{F}$ está no primeiro quadrante, obtemos

$$\theta = \arccos\left(\frac{100\sqrt{3} + 300 \cos 70°}{\|\mathbf{F}\|}\right) \approx 54{,}2°$$

(Figura 11.2.18). ◄

A resultante de três ou mais forças concorrentes pode ser determinada trabalhando em pares. Por exemplo, a resultante de três forças concorrentes pode ser determinada descobrindo a resultante de quaisquer duas das três forças e, então, descobrindo a resultante daquela resultante com a terceira força.

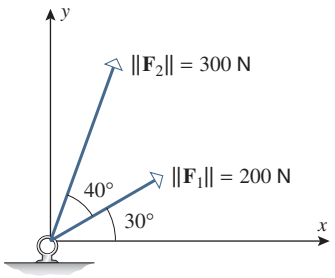



**Figura 11.2.17**

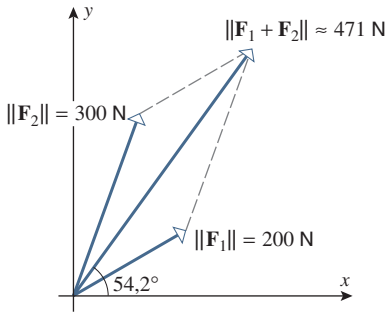



**Figura 11.2.18**

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.2 (Ver página 785 para respostas.)

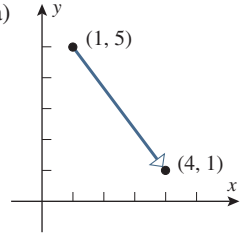
1. Se $\mathbf{v} = \langle 3, -1, 7\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle 4, 10 -5\rangle$, então
   (a) $||\mathbf{v}|| =$ _____ (b) $\mathbf{v} + \mathbf{w} =$ _____
   (c) $\mathbf{v} - \mathbf{w} =$ _____ (d) $2\mathbf{v} =$ _____.
2. O vetor unitário na direção e sentido de $\mathbf{v} = \langle 3, -1, 7\rangle$ é _____.
3. O vetor unitário do espaço bidimensional que faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo $x$ positivo é _____.
4. Considere os pontos $A(3, 4, 0)$ e $B(0, 0, 5)$.
   (a) $\overrightarrow{AB} =$ _____
   (b) Se $\mathbf{v}$ for um vetor com mesma direção e sentido que $\overrightarrow{AB}$ e de comprimento igual a $\sqrt{2}$, então $\mathbf{v} =$ _____.

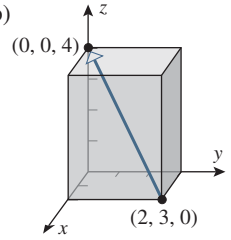
## EXERCÍCIOS 11.2 Recurso Gráfico

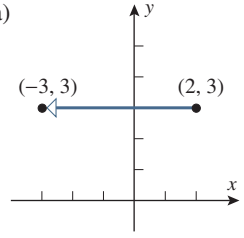
**1-4** Esboce os vetores com seus pontos iniciais na origem. ■

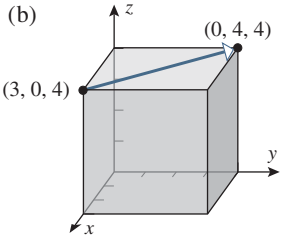
1. (a) $\langle 2, 5\rangle$ (b) $\langle -5, -4\rangle$ (c) $\langle 2, 0\rangle$
   (d) $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ (e) $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (f) $-6\mathbf{j}$
2. (a) $\langle -3, 7\rangle$ (b) $\langle 6, -2\rangle$ (c) $\langle 0, -8\rangle$
   (d) $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ (e) $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (f) $4\mathbf{i}$
3. (a) $\langle 1, -2, 2\rangle$ (b) $\langle 2, 2, -1\rangle$
   (c) $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ (d) $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
4. (a) $\langle -1, 3, 2\rangle$ (b) $\langle 3, 4, 2\rangle$
   (c) $2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (d) $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

**5-6** Determine os componentes do vetor e esboce um vetor equivalente com seu ponto inicial na origem. ■

5. (a)


(b)



6. (a)


(b)



**7-8** Determine os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$. ■

7. (a) $P_1\,(3, 5)$, $P_2\,(2, 8)$ (b) $P_1\,(7, -2)$, $P_2\,(0, 0)$
   (c) $P_1\,(5, -2, 1)$, $P_2\,(2, 4, 2)$
8. (a) $P_1\,(-6, -2)$, $P_2\,(-4, -1)$ (b) $P_1\,(0, 0, 0)$, $P_2\,(-1, 6, 1)$
   (c) $P_1\,(4, 1, -3)$, $P_2\,(9, 1, -3)$
9. (a) Determine o ponto final de $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ se o ponto inicial for $(1, -2)$.
   (b) Determine o ponto inicial de $\mathbf{v} = \langle -3, 1, 2\rangle$ se o ponto final for $(5, 0, -1)$.
10. (a) Determine o ponto final de $\mathbf{v} = \langle 7, 6\rangle$ se o ponto inicial for $(2, -1)$.
    (b) Determine o ponto final de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ se o ponto inicial for $(-2, 1, 4)$.

**11-12** Efetue as operações indicadas com os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. ■

11. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{j}$
    (a) $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ (b) $6\mathbf{u} + 4\mathbf{w}$
    (c) $-\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ (d) $4(3\mathbf{u} + \mathbf{v})$
    (e) $-8(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + 2\mathbf{u}$ (f) $3\mathbf{w} - (\mathbf{v} - \mathbf{w})$
12. $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 0, -2\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 1, 1, 3\rangle$
    (a) $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ (b) $7\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ (c) $-\mathbf{w} + \mathbf{v}$
    (d) $3(\mathbf{u} - 7\mathbf{v})$ (e) $-3\mathbf{v} - 8\mathbf{w}$ (f) $2\mathbf{v} - (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

**13-14** Determine a norma de $\mathbf{v}$. ■

13. (a) $\mathbf{v} = \langle 1, -1\rangle$ (b) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
    (c) $\mathbf{v} = \langle -1, 2, 4\rangle$ (d) $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
14. (a) $\mathbf{v} = \langle 3, 4\rangle$ (b) $\mathbf{v} = \sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{7}\mathbf{j}$
    (c) $\mathbf{v} = \langle 0, -3, 0\rangle$ (d) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
15. Sejam $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Determine
    (a) $||\mathbf{u} + \mathbf{v}||$ (b) $||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$
    (c) $||-2\mathbf{u}|| + 2||\mathbf{v}||$ (d) $||3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}||$
    (e) $\dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$ (f) $\left\| \dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w} \right\|$.
16. É possível ter $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores não nulos? Justifique sua conclusão geometricamente.

**17-20 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

17. A norma da soma de dois vetores é igual à soma das normas dos dois vetores.
18. Se traçarmos dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ com um mesmo ponto inicial, então o vetor traçando entre os pontos finais de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ será $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ ou $\mathbf{w} - \mathbf{v}$.
19. Existem exatamente dois vetores unitários paralelos a um dado vetor não nulo.
20. Dados um escalar não nulo $c$ e dois vetores $\mathbf{b}$ e $\mathbf{d}$, a equação vetorial $c\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{d}$ tem uma única solução $\mathbf{a}$.

**21-22** Determine os vetores unitários que satisfaçam as condições dadas. ■

**21.** (a) Mesma direção e sentido que $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.
(b) Sentido oposto a $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
(c) Mesma direção e sentido que o vetor do ponto $A(-1, 0, 2)$ até o ponto $B(3, 1, 1)$.

**22.** (a) Sentido oposto a $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.
(b) Mesma direção e sentido que $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
(c) Mesma direção e sentido que o vetor do ponto $A(-3, 2)$ até o ponto $B(1, -1)$.

**23-24** Determine os vetores que satisfaçam as condições dadas. ■

**23.** (a) Sentido oposto a $\mathbf{v} = \langle 3, -4\rangle$ e a metade do tamanho de $\mathbf{v}$.
(b) Comprimento $\sqrt{17}$ e mesmo sentido e direção que $\mathbf{v} = \langle 7, 0, -6\rangle$.

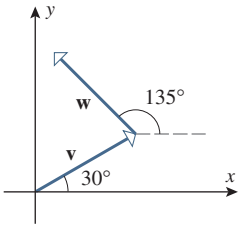
**24.** (a) Mesma direção e sentido que $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e três vezes o comprimento de $\mathbf{v}$.
(b) Comprimento 2, direção igual e sentido oposto a $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + k$.

**25.** Em cada parte, determine a forma em componentes do vetor $\mathbf{v}$ no espaço bidimensional que tenha o comprimento dado e faça o ângulo $\theta$ dado com o eixo $x$ positivo.
(a) $\|\mathbf{v}\| = 3;\ \theta = \pi/4$ (b) $\|\mathbf{v}\| = 2;\ \theta = 90°$
(c) $\|\mathbf{v}\| = 5;\ \theta = 120°$ (d) $\|\mathbf{v}\| = 1;\ \theta = \pi$

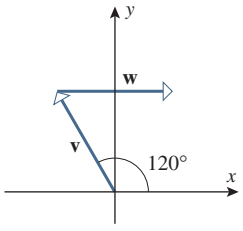
**26.** Determine a forma em componentes de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ no espaço bidimensional, dado que $\|\mathbf{v}\| = 1$, $\|\mathbf{w}\| = 1$, $\mathbf{v}$ faz um ângulo de $\pi/6$ com o eixo $x$ positivo e $\mathbf{w}$ faz um ângulo de $3\pi/4$ com o eixo $x$ positivo.

**27-28** Determine a forma em componentes de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, dado que $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores unitários. ■

**27.**

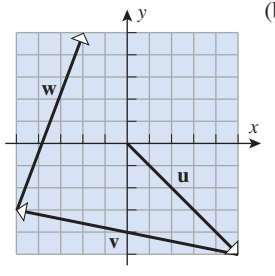



**28.**

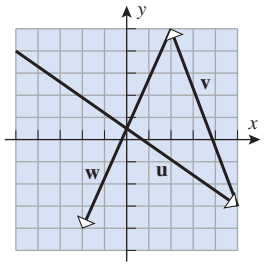



**29.** Em cada parte, esboce o vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ e expresse-o em forma de componentes.

(a)




(b)




**30.** Em cada parte do Exercício 29, esboce o vetor $\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$ e expresse-o em forma de componentes.

**31.** Sejam $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle 4, -1\rangle$. Determine o vetor $\mathbf{x}$ que satisfaça $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$.

**32.** Sejam $\mathbf{u} = \langle -1, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 1\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle 3, 4\rangle$. Determine o vetor $\mathbf{x}$ que satisfaça $\mathbf{u} - 2\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{w} + 3\mathbf{v}$.

**33.** Determine $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ se $\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$ e $3\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

**34.** Determine $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 2, -3\rangle$ e $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$.

**35.** Use vetores para determinar o comprimento das diagonais do paralelogramo que tem lados adjacentes $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

**36.** Use vetores para determinar o quarto vértice de um paralelogramo, três dos quais são (0, 0), (1, 3) e (2, 4). [*Nota:* Há mais de uma resposta.]

**37.** (a) Dado que $\|\mathbf{v}\| = 3$, determine todos os valores de $k$ tais que $\|k\mathbf{v}\| = 5$.
(b) Dado que $k = -2$ e $\|k\mathbf{v}\| = 6$, determine $\|\mathbf{v}\|$.

**38.** O que sabemos sobre $k$ e $\mathbf{v}$ se $\|k\mathbf{v}\| = 0$?

**39.** Em cada parte, determine dois vetores unitários no espaço bidimensional que satisfaçam a condição dada.
(a) Paralelo à reta $y = 3x + 2$.
(b) Paralela à reta $x + y = 4$.
(c) Perpendicular à reta $y = -5x + 1$.

**40.** Em cada parte, determine dois vetores unitários no espaço tridimensional que satisfaçam a condição dada.
(a) Perpendicular ao plano $xy$.
(b) Perpendicular ao plano $xz$.
(c) Perpendicular ao plano $yz$.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**41.** Seja $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle$ um vetor arbitrário. Em cada parte, descreva o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ no espaço bidimensional que satisfaçam a condição dada.
(a) $\|\mathbf{r}\| = 1$ (b) $\|\mathbf{r}\| \le 1$ (c) $\|\mathbf{r}\| > 1$.

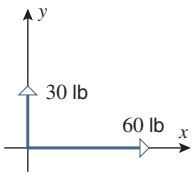
**42.** Sejam $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0\rangle$. Em cada parte, descreva o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ no espaço bidimensional que satisfaçam a condição dada.
(a) $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = 1$ (b) $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| \le 1$ (c) $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| > 1$.

**43.** Seja $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ um vetor arbitrário. Em cada parte, descreva o conjunto de todos os pontos $(x, y, z)$ no espaço tridimensional que satisfaçam a condição dada.
(a) $\|\mathbf{r}\| = 1$ (b) $\|\mathbf{r}\| \le 1$ (c) $\|\mathbf{r}\| > 1$.

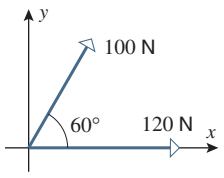
**44.** Sejam $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1\rangle$, $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2\rangle$ e $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle$. Supondo que $k > \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$, descreva o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ com os quais $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| + \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\| = k$.

**45-50** Determine a magnitude da força resultante e o ângulo que ela faz com o eixo $x$ positivo. ■

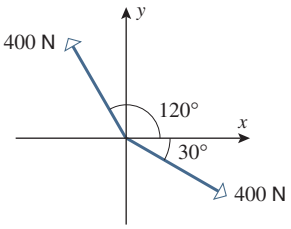
**45.**



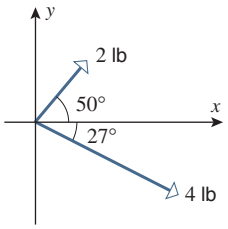

**46.**



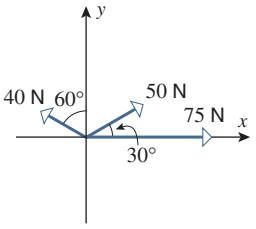
**47.**



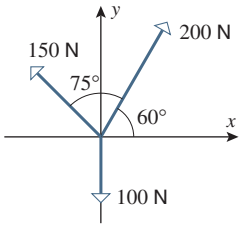

**48.**




**49.**

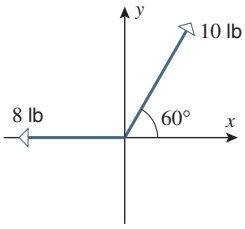



**50.**

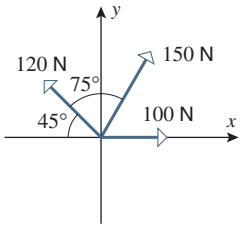



**51-52** Diz-se que uma partícula está em ***equilíbrio estático*** se a resultante de todas as forças aplicadas nela for zero. Nestes exercícios, determine a força **F** que deve ser aplicada no ponto para produzir o equilíbrio estático. Descreva **F** especificando sua magnitude e o ângulo que ela faz com o eixo $x$ positivo. ■

**51.**




**52.**




**53.** A figura a seguir mostra um sinal de tráfego de 250 lb sustentado por dois cabos flexíveis. As magnitudes das forças que os cabos aplicam na argola são chamadas de ***tensões*** nos cabos. Encontre as tensões nos cabos se o sinal de tráfego estiver em equilíbrio estático (definido acima, no Exercício 51).

**54.** Determine as tensões nos cabos mostrados na figura abaixo se o bloco estiver em equilíbrio estático (ver Exercício 53).

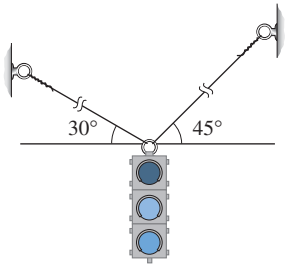



**Figura Ex-53**

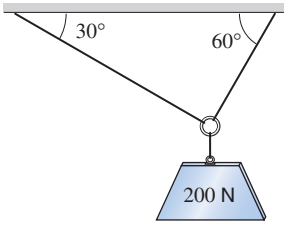



**Figura Ex-54**

**55.** Um bloco pesando 300 lb está suspenso pelos cabos $A$ e $B$, conforme a figura a seguir. Determine as forças que o bloco exerce ao longo dos cabos.

**56.** Um bloco pesando 100 N está suspenso pelos cabos $A$ e $B$, conforme a figura a seguir.

(a) Use um recurso computacional para traçar as forças que o bloco exerce ao longo dos cabos $A$ e $B$ como função da flecha $d$.

(b) Aumentando a flecha $d$, as forças nos cabos aumentam ou diminuem?

(c) Qual é a flecha exigida se os cabos não toleram forças acima de 150 N?

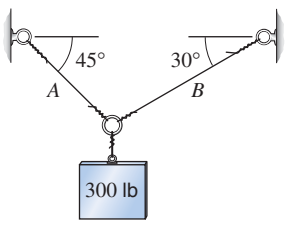



**Figura Ex-55**

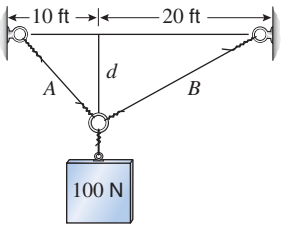



**Figura Ex-56**

**57.** Diz-se que um vetor **w** é uma ***combinação linear*** dos vetores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ se **w** puder ser expresso como $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$, onde $c_1$ e $c_2$ são escalares.

(a) Determine escalares $c_1$ e $c_2$ para expressar o vetor $4\mathbf{j}$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

(b) Mostre que o vetor $\langle 3, 5\rangle$ não pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = \langle 1, -3\rangle$ e $\mathbf{v_2} = \langle -2, 6\rangle$.

**58.** Diz-se que um vetor **w** é uma ***combinação linear*** dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ se **w** puder ser expresso como $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, onde $c_1$, $c_2$ e $c_3$ são escalares.

(a) Determine escalares $c_1$, $c_2$ e $c_3$ para expressar $\langle -1, 1, 5\rangle$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 0, 1\rangle$, $\mathbf{v}_2 = \langle 3, 2, 0\rangle$ e $\mathbf{v}_3 = \langle 0, 1, 1\rangle$.

(b) Mostre que o vetor $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ não pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_3 = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

**59.** Use um teorema da Geometria Plana para mostrar que se **u** e **v** forem vetores no espaço bi ou tridimensional, então

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

que é chamada de ***desigualdade triangular para vetores***. Dê alguns exemplos para ilustrar essa desigualdade.

**60.** Prove algebricamente as partes $(a)$, $(c)$ e $(e)$ do Teorema 11.2.6 no espaço bidimensional.

**61.** Prove algebricamente as partes $(d)$, $(g)$ e $(h)$ do Teorema 11.2.6 no espaço bidimensional.

**62.** Prove geometricamente a parte $(f)$ do Teorema 11.2.6.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**63.** Use vetores para provar que o segmento de reta que une o ponto médio de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e mede a metade do comprimento do terceiro lado.

**64.** Use vetores para provar que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são os vértices de um paralelogramo.

**65.** **Texto** Faça uma pesquisa e escreva alguns parágrafos sobre a pré-história do uso de vetores na Matemática.

**66.** **Texto** Escreva um parágrafo discutindo algumas das semelhanças e diferenças entre as regras da aritmética vetorial e a dos números reais.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.2

**1.** (a) $\sqrt{59}$ (b) $\langle 7, 9, 2\rangle$ (c) $\langle -1, -11, 12\rangle$ (d) $\langle 6, -2, 14\rangle$ **2.** $\frac{1}{\sqrt{59}}\mathbf{v} = \left\langle \frac{3}{\sqrt{59}}, -\frac{1}{\sqrt{59}}, \frac{7}{\sqrt{59}} \right\rangle$ **3.** $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$

**4.** (a) $\langle -3, -4, 5\rangle$ (b) $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \left\langle -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right\rangle$

# 11.3 PRODUTO ESCALAR; PROJEÇÕES

*Na última seção, definimos três operações com vetores – adição, subtração e multiplicação por escalar. Na multiplicação por escalar, um vetor é multiplicado por um escalar e o resultado é um vetor. Nesta seção, definiremos um novo tipo de multiplicação na qual dois vetores são multiplicados para produzir um escalar. Essa operação de multiplicação tem muitos usos, alguns dos quais também discutiremos aqui.*

## DEFINIÇÃO DO PRODUTO ESCALAR

**11.3.1 DEFINIÇÃO** Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ forem vetores no espaço bidimensional, então o ***produto escalar*** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é escrito como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e é definido como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

Analogamente, se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ forem vetores no espaço tridimensional, então seu produto escalar é definido como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Em palavras, o produto escalar de dois vetores é formado pela multiplicação de seus componentes correspondentes e pela soma dos produtos resultantes. Note que o produto escalar de dois vetores é um escalar.

### ▶ Exemplo 1

$$\langle 3, 5\rangle \cdot \langle -1, 2\rangle = 3(-1) + 5(2) = 7$$
$$\langle 2, 3\rangle \cdot \langle -3, 2\rangle = 2(-3) + 3(2) = 0$$
$$\langle 1, -3, 4\rangle \cdot \langle 1, 5, 2\rangle = 1(1) + (-3)(5) + 4(2) = -6$$

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Muitos recursos computacionais têm à disposição a operação produto escalar. Se sua calculadora tiver essa capacidade, use-a para verificar os cálculos do Exemplo 1.

Aqui estão os mesmos cálculos expressos de outra maneira:

$$(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = 3(-1) + 5(2) = 7$$
$$(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = 2(-3) + 3(2) = 0$$
$$(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 1(1) + (-3)(5) + 4(2) = -6 \quad \blacktriangleleft$$

## PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO PRODUTO ESCALAR

O teorema seguinte fornece algumas das propriedades algébricas básicas do produto escalar.

**11.3.2 TEOREMA** *Se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *forem vetores no espaço bi ou tridimensional e* $a$ *for um escalar, então*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(*c*) $a\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$

(*d*) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{v}||^2$

(*e*) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$

Observe a diferença entre os dois zeros que aparecem na parte (*e*) do Teorema 11.3.2 – o zero no lado esquerdo é o *vetor zero* (em negrito), enquanto que o zero no lado direito é o *escalar zero* (tipo fino).

Provaremos as partes (*c*) e (*d*) para os vetores no espaço tridimensional e deixaremos outras partes como exercícios.

**DEMONSTRAÇÃO (*c*)** Sejam $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Então

$$a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = a(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = (au_1)v_1 + (au_2)v_2 + (au_3)v_3 = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

Analogamente, $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$

**DEMONSTRAÇÃO (*d*)** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1v_1 + v_2v_2 + v_3v_3 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \|\mathbf{v}\|^2$. ■

A seguinte forma alternativa da fórmula na parte (*d*) do Teorema 11.3.2 fornece uma maneira útil de expressar a norma de um vetor em termos de um produto escalar:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{1}$$

## ■ ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

Suponha que **u** e **v** sejam vetores não nulos no espaço bi ou tridimensional que estejam posicionados de modo que seus pontos iniciais coincidam. Definimos o ***ângulo entre*** **u** ***e*** **v** como sendo o ângulo $\theta$ determinado pelos vetores que satisfaz a condição $0 \le \theta \le \pi$ (Figura 11.3.1). No espaço bidimensional, $\theta$ é o menor ângulo no sentido anti-horário que um dos vetores pode ser girado até se alinhar com o outro.

O próximo teorema fornece uma maneira de calcular o ângulo entre dois vetores a partir de seus componentes.

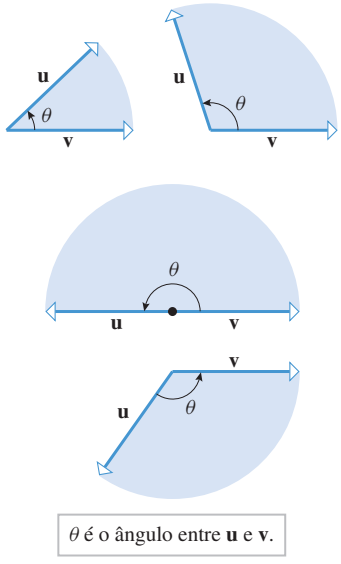



**Figura 11.3.1**

**11.3.3 TEOREMA** *Se* **u** *e* **v** *forem vetores não nulos no espaço bi ou tridimenssional e se* $\theta$ *for o ângulo entre eles, então*

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \tag{2}$$

**DEMONSTRAÇÃO** Suponha que os vetores **u**, **v** e $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ estejam posicionados para formar três lados de um triângulo, como mostrado na Figura 11.3.2. Segue da lei dos cossenos que

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta \tag{3}$$

Usando as propriedades do produto escalar do Teorema 11.3.2, podemos reescrever o lado esquerdo dessa equação como

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2\end{aligned}$$

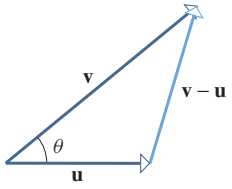



**Figura 11.3.2**

Substituindo de volta em (3), temos

$$\|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

que podemos simplificar e reescrever como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Finalmente, dividindo ambos os lados dessa equação por $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$, obtemos (2). ■

**▶ Exemplo 2** Determine o ângulo entre o vetor $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e

(a) $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (c) $\mathbf{z} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

***Solução (a)***

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{-11}{(3)(7)} = -\frac{11}{21}$$

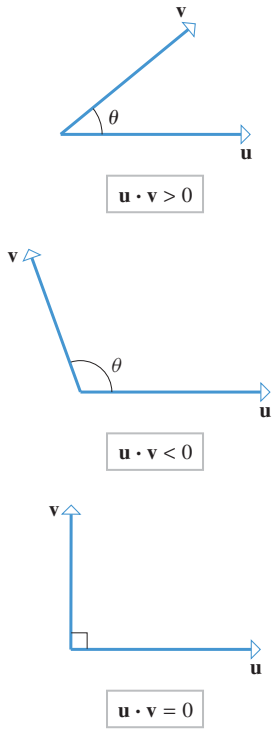



Figura 11.3.3

Assim,

$$\theta = \arccos\left(-\tfrac{11}{21}\right) \approx 2{,}12 \text{ radianos} \approx 121{,}6^\circ$$

***Solução (b)***

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{0}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\|} = 0$$

Desse modo, $\theta = \pi/2$, o que significa que os vetores são perpendiculares.

***Solução (c)***

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{z}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{z}\|} = \frac{-27}{(3)(9)} = -1$$

Logo, $\theta = \pi$, o que significa que os vetores têm sentidos opostos. (Observe que poderíamos ter visto isso sem calcular $\theta$, uma vez que $\mathbf{z} = -3\mathbf{u}$.) ◀

## INTERPRETANDO O SINAL DO PRODUTO ESCALAR

É frequentemente conveniente expressar a Fórmula (2) como

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \tag{4}$$

que dá o produto escalar de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em termos dos comprimentos desses vetores e do ângulo entre eles. Uma vez que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não nulos, essa versão da fórmula torna claro que o sinal de $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ é o mesmo que o sinal de $\cos\theta$. Assim, do produto escalar podemos deduzir se o ângulo entre os dois vetores é agudo ou obtuso ou, então, se os vetores são ortogonais (Figura 11.3.3).

**OBSERVAÇÃO** Os termos "perpendicular", "ortogonal" e "normal" são comumente usados para descrever os objetos geométricos que se encontram em ângulo reto. Por consistência, diremos que dois vetores são *ortogonais*, um vetor é *normal* a um plano e dois planos são *perpendiculares*. Além disso, embora o vetor zero não tenha um ângulo bem definido com os outros vetores, vamos considerar $\mathbf{0}$ ortogonal a *todos* os vetores. Essa convenção permite-nos dizer que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais se, e somente se, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ e torna a Fórmula (4) válida se $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v}$ (ou ambos) forem nulos.

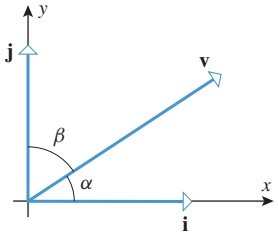



Figura 11.3.4

## ÂNGULOS DIRETORES

Em um sistema de coordenadas $xy$, a direção e o sentido de um vetor não nulo $\mathbf{v}$ ficam completamente determinados pelos ângulos $\alpha$ e $\beta$ entre $\mathbf{v}$ e os vetores unitários $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ (Figura 11.3.4); e em um sistema de coordenadas $xyz$, a direção e o sentido ficam completamente determinados pelos ângulos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ entre $\mathbf{v}$ e os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ (Figura 11.3.5). Em ambos, os espaços, bi e tridimensional, os ângulos entre um vetor $\mathbf{v}$ e os vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ são chamados de ***ângulos diretores*** de $\mathbf{v}$, e os cossenos desses ângulos são chamados de ***cossenos diretores*** de $\mathbf{v}$. As fórmulas para os cossenos diretores de um vetor podem ser obtidas a partir da Fórmula (2). Por exemplo, se $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, então

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{i}\|} = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \cos\beta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{j}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{j}\|} = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{k}\|} = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$$

Assim, temos o resultado seguinte.

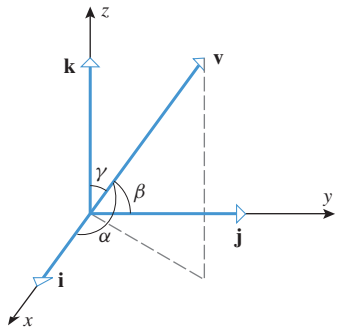



Figura 11.3.5

**11.3.4 TEOREMA** *Os cossenos diretores de um vetor não nulo* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ *são*

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \cos\beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$$

Os cossenos diretores de um vetor $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ podem ser calculados normalizando $\mathbf{v}$ e observando os componentes de $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, pois

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{i} + \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{j} + \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{k} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$$

Deixamos como exercício para o leitor mostrar que os cossenos diretores de um vetor satisfazem a equação

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{5}$$

**▶ Exemplo 3** Determine os cossenos diretores do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e os ângulos diretores aproximados até o grau mais próximo.

***Solução*** Vamos, primeiramente, normalizar o vetor $\mathbf{v}$ e, então, obter seus componenetes. Temos que $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$, logo $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$. Assim,

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{3}, \quad \cos\beta = -\tfrac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \tfrac{2}{3}$$

Com a ajuda de um recurso computacional, obtemos

$$\alpha = \arccos\left(\tfrac{1}{3}\right) \approx 71^\circ, \quad \beta = \arccos\left(-\tfrac{2}{3}\right) \approx 132^\circ, \quad \gamma = \arccos\left(\tfrac{2}{3}\right) \approx 48^\circ \ \blacktriangleleft$$

**▶ Exemplo 4** Determine o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

***Solução*** Suponha que o cubo tenha lado $a$ e introduza um sistema de coordenadas como na Figura 11.3.6. Neste sistema de coordenadas, o vetor

$$\mathbf{d} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$$

é a diagonal do cubo e os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ estão ao longo das arestas. Por simetria, a diagonal forma ângulos iguais com cada lado, portanto é suficiente encontrar o ângulo entre $\mathbf{d}$ e $\mathbf{i}$ (o ângulo diretor $\alpha$). Assim,

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{i}}{\|\mathbf{d}\|\|\mathbf{i}\|} = \frac{a}{\|\mathbf{d}\|} = \frac{a}{\sqrt{3a^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e, portanto,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}955 \text{ rad} \approx 54{,}7^\circ \ \blacktriangleleft$$

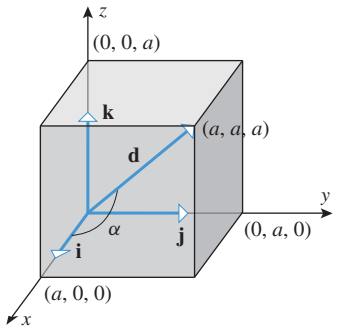


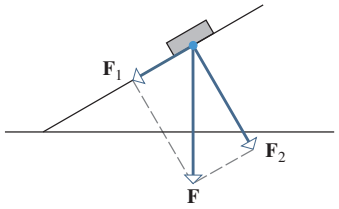

**Figura 11.3.6**

## DECOMPOSIÇÃO DE VETORES EM SEUS COMPONENTES ORTOGONAIS

Em muitas aplicações, é desejável "decompor" um vetor em uma soma de dois vetores ortogonais com direções convenientemente especificadas. Por exemplo, a Figura 11.3.7 mostra um bloco sobre um plano inclinado. A força $\mathbf{F}$ dirigida para baixo que a gravidade exerce sobre o bloco pode ser decomposta na soma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

na qual a força $\mathbf{F}_1$ é paralela à rampa e a força $\mathbf{F}_2$ é perpendicular à rampa. As forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ são úteis, pois $\mathbf{F}_1$ é a força que puxa o bloco *ao longo* da rampa e $\mathbf{F}_2$ é a força que o bloco exerce *contra* a rampa.




A força da gravidade puxa o bloco contra a rampa e ao longo da rampa para baixo.

**Figura 11.3.7**

Assim, nosso próximo objetivo é desenvolver um procedimento computacional para decompor um vetor em uma soma de vetores ortogonais. Com essa finalidade, sejam $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ dois vetores *unitários* ortogonais no espaço bidimensional e suponha que desejemos expressar um dado vetor $\mathbf{v}$ como uma soma

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

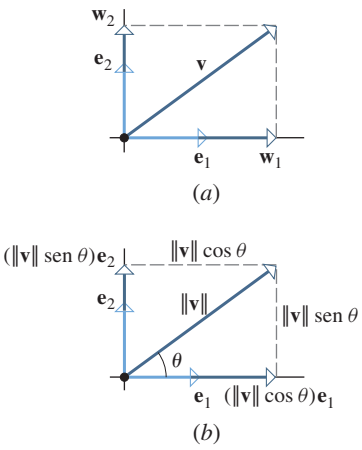



**Figura 11.3.8**

na qual $\mathbf{w}_1$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{w}_2$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{e}_2$ (Figura 11.3.8*a*); isto é, queremos encontrar escalares $k_1$ e $k_2$ tais que

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 \tag{6}$$

Podemos encontrar $k_1$ tomando o produto escalar de $\mathbf{v}$ com $\mathbf{e}_1$. Isso dá

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1 &= (k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_1\\ &= k_1(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1) + k_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1)\\ &= k_1\|\mathbf{e}_1\|^2 + 0 = k_1\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2 = (k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}^2)\cdot\mathbf{e}_2 = k_1(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2) + k_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2) = 0 + k_2||\mathbf{e}_2||^2 = k_2$$

Substituindo essas expressões para $k_1$ e $k_2$ em (6), obtemos

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 \tag{7}$$

Nessa fórmula, chamamos $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$ e $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$ de ***componentes vetoriais*** de $\mathbf{v}$ ao longo de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, respectivamente, e chamamos $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2$ de ***componentes escalares*** de $\mathbf{v}$ ao longo de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, respectivamente. Se $\theta$ denotar o ângulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{e}_1$, então os componentes escalares de $\mathbf{v}$ podem ser escritos na forma trigonométrica como

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1 = \|\mathbf{v}\|\cos\theta \quad \text{e} \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2 = \|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta \tag{8}$$

(Figura 11.3.8*b*). Além disso, os componentes vetoriais de $\mathbf{v}$ podem ser expressos como

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = (\|\mathbf{v}\|\cos\theta)\mathbf{e}_1 \quad \text{e} \quad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = (\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta)\mathbf{e}_2 \tag{9}$$

e a decomposição (6) pode ser expressa como

$$\mathbf{v} = (\|\mathbf{v}\|\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta)\mathbf{e}_2 \tag{10}$$

desde que o ângulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{e}_2$ não seja maior do que $\pi/2$.

Observe que os componentes vetoriais de $\mathbf{v}$ ao longo de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são *vetores*, enquanto os componentes escalares de $\mathbf{v}$ ao longo de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são *números*.

**▶ Exemplo 5** Sejam

$$\mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle, \quad \mathbf{e}_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Encontre os componentes escalares de $\mathbf{v}$ ao longo de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ e os componentes vetoriais de $\mathbf{v}$ ao longo de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$.

***Solução*** Os componentes escalares de $\mathbf{v}$ ao longo de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2 = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

portanto, os componentes vetoriais são

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \frac{5}{\sqrt{2}}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle$$
$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \blacktriangleleft$$

Observe que, no Exemplo 5,

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \langle 2, 3\rangle = \mathbf{v}$$

conforme garante (7).

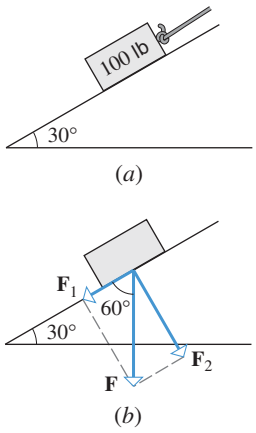



**Figura 11.3.9**

► **Exemplo 6** Uma corda é amarrada em um bloco de 100 lb sobre uma rampa que tem uma inclinação de 30° em relação ao solo (Figura 11.3.9*a*). Qual é a força que o bloco exerce contra a rampa e qual é a força que deve ser aplicada à corda na direção paralela à rampa para evitar que o bloco deslize? (Suponha que a rampa seja lisa, isto é, não há força de atrito.)

***Solução*** Seja $\mathbf{F}$ a força para baixo devido à gravidade sobre o bloco (assim $\|\mathbf{F}\| = 100$ lb), e sejam $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ os componentes vetoriais de $\mathbf{F}$ paralelos e perpendiculares à rampa (conforme mostra a Figura 11.3.9*b*). Os comprimentos de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ são

$$\|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}\|\cos 60^\circ = 100\left(\frac{1}{2}\right) = 50 \text{ lb}$$

$$\|\mathbf{F}_2\| = \|\mathbf{F}\|\operatorname{sen} 60^\circ = 100\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 86{,}6 \text{ lb}$$

Assim, o bloco exerce uma força de aproximadamente 86,6 lb contra a rampa, e se requer uma força de 50 lb para evitar que o bloco deslize rampa abaixo. ◄

## PROJEÇÕES ORTOGONAIS

Os componentes vetoriais do vetor $\mathbf{v}$ ao longo de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ em (7) são também chamados de *projeções ortogonais* de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ e, comumente, denotados por

$$\text{proj}_{\mathbf{e}_1}\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 \quad \text{e} \quad \text{proj}_{\mathbf{e}_2}\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$$

Em geral, se $\mathbf{e}$ for um vetor unitário, então definimos a ***projeção ortogonal de*** $\mathbf{v}$ ***sobre*** $\mathbf{e}$ como sendo

$$\text{proj}_{\mathbf{e}}\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e} \tag{11}$$

A projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre um vetor arbitrário não nulo $\mathbf{b}$ pode ser obtida normalizando $\mathbf{b}$ e, então, aplicando a Fórmula (11); isto é,

$$\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{v} = \left(\mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\right)\left(\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\right)$$

o que pode ser reescrito como

$$\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b} \tag{12}$$

Geometricamente, se $\mathbf{b}$ e $\mathbf{v}$ tiverem um ponto inicial comum, então $\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{v}$ é o vetor determinado quando a perpendicular é baixada do ponto final de $\mathbf{v}$ sobre a reta que passa por $\mathbf{b}$ (ilustrado na Figura 11.3.10 em dois casos).

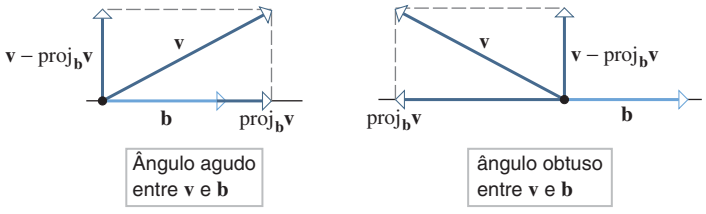



**Figura 11.3.10**

Além disso, é evidente da Figura 11.3.10 que se subtrairmos a $\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{v}$ de $\mathbf{v}$, então o vetor resultante

$$\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{v}$$

será ortogonal a $\mathbf{b}$; vamos chamá-lo de ***componente vetorial de*** $\mathbf{v}$ ***ortogonal a*** $\mathbf{b}$.

Dito informalmente, a projeção ortogonal $\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{v}$ é a "sombra" que $\mathbf{v}$ produz na reta por $\mathbf{b}$.

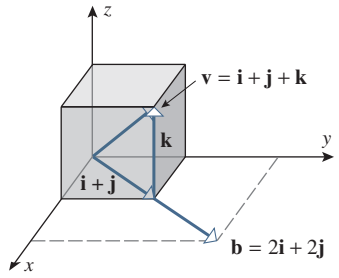



**Figura 11.3.11**

► **Exemplo 7** Determine a projeção ortogonal de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ sobre $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ e, então, encontre o componente vetorial de $\mathbf{v}$ ortogonal a $\mathbf{b}$.

***Solução*** Temos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = 2 + 2 + 0 = 4$$
$$\|\mathbf{b}\|^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

Assim, a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{b}$ é

$$\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b} = \frac{4}{8}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

e o componente vetorial de $\mathbf{v}$ ortogonal a $\mathbf{b}$ é

$$\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{v} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) - (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{k}$$

Esses resultados estão de acordo com a Figura 11.3.11. ◄

## TRABALHO

Na Seção 6.6, no Volume 1, discutimos o trabalho realizado por uma força constante agindo sobre um objeto que se move sobre uma linha reta. Definimos o trabalho $W$ realizado sobre um objeto por uma força de magnitude constante $F$ agindo na direção do movimento por uma distância $d$ como sendo

$$W = Fd = \text{força} \times \text{distância} \tag{13}$$

Se denotarmos por $\mathbf{F}$ o vetor força de magnitude $\|\mathbf{F}\| = F$ *agindo na direção do movimento*, então podemos escrever (13) como

$$W = \|\mathbf{F}\|d$$

Além disso, supondo que o objeto se mova ao longo de uma reta de um ponto $P$ a um ponto $Q$, então $d = \|\overrightarrow{PQ}\|$, de modo que o trabalho pode ser expresso inteiramente na forma vetorial como

$$W = \|\mathbf{F}\|\|\overrightarrow{PQ}\|$$

Note que, na Fórmula (14), a quantidade $\|\mathbf{F}\|\cos\theta$ é o componente escalar da força ao longo do vetor deslocamento. Assim, no caso em que $\cos\theta > 0$, uma força de magnitude $\|\mathbf{F}\|$ agindo em um ângulo $\theta$ realiza o mesmo trabalho que uma força de magnitude $\|\mathbf{F}\|\cos\theta$ agindo na direção do movimento.

(Figura 11.3.12*a*). O vetor $\overrightarrow{PQ}$ é chamado de ***vetor deslocamento*** do objeto. No caso em que a força $\mathbf{F}$ é constante e não está na direção do movimento, mas faz um ângulo $\theta$ com o vetor deslocamento, *definimos* o trabalho $W$ realizado por $\mathbf{F}$ como sendo

$$W = (\|\mathbf{F}\|\cos\theta)\|\overrightarrow{PQ}\| = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ} \tag{14}$$

(Figura 11.3.12*b*).

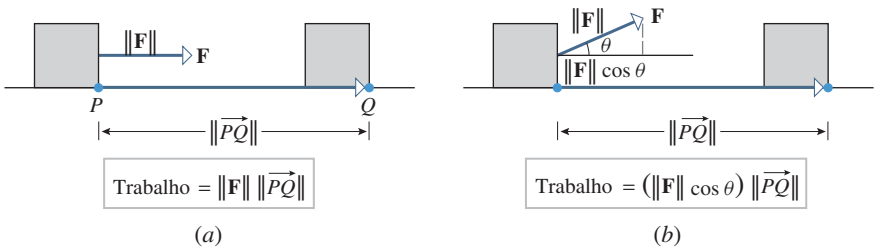



**Figura 11.3.12**

Segue da Fórmula (14) que o trabalho $W$ pode ser dado por $W = (\|\mathbf{F}\|\cos\theta)\|\overrightarrow{PQ}\|$ ou $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$. Embora essas duas expressões sejam equivalentes matematicamente, na prática pode ser mais conveniente usar uma em vez de outra.

### ► Exemplo 8

(a) Um carrinho é puxado horizontalmente por meio de uma força constante de 10 lb na direção do cabo e a um ângulo de 60° com a horizontal. Qual é o trabalho realizado para mover o carrinho ao longo de 50 pés?

(b) Uma força de $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ lb é aplicada em um ponto que move ao longo de uma reta de $P(-1, 1, 2)$ até $Q(3, 0, -2)$. Se a distância for medida em pés, qual será o trabalho realizado?

***Solução (a)*** Com $\|\mathbf{F}\| = 10$, $\theta = 60°$ e $\|\overrightarrow{PQ}\| = 50$, segue que o trabalho realizado é

$$W = (\|\mathbf{F}\| \cos\theta)\|\overrightarrow{PQ}\| = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 = 250 \text{ pés·lb}$$

***Solução (b)*** Como $\overrightarrow{PQ} = (3 - (-1))\mathbf{i} + (0 - 1)\mathbf{j} + (-2 - 2)\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, o trabalho realizado é

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ} = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = 12 + 1 - 8 = 5 \text{ pés·lb} \quad ◄$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.3 (Ver página 794 para respostas.)

**1.** $\langle 3, 1, -2\rangle \cdot \langle 6, 0, 5\rangle =$ _____.

**2.** Suponha que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sejam vetores no espaço tridimensional tais que $\|\mathbf{u}\| = 5$, $\mathbf{v} = 7$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -3$.
(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} =$ _____ (b) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} =$ _____
(c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) =$ _____ (d) $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{w}) =$ _____

**3.** Para os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ do exercício precedente, se o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ for $\pi/3$, então $\|\mathbf{v}\| =$ _____.

**4.** Os cossenos diretores de $\langle 2, -1, 3\rangle$ são $\cos\alpha =$ _____, $\cos\beta =$ _____ e $\cos\gamma =$ _____.

**5.** A projeção ortogonal de $\mathbf{v} = 10\mathbf{i}$ sobre $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ é _____.

## EXERCÍCIOS 11.3 C CAS

**1.** Em cada parte, determine o produto escalar dos vetores e o cosseno do ângulo entre eles.
(a) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
(b) $\mathbf{u} = \langle -7, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 1\rangle$
(c) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
(d) $\mathbf{u} = \langle -3, 1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 2, -5\rangle$

**2.** Em cada parte, use a informação dada para encontrar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
(a) $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é $\pi/6$.
(b) $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$, o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é 135°.

**3.** Em cada parte, determine se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ fazem um ângulo agudo, um ângulo obtuso ou se são ortogonais.
(a) $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
(b) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 0, 0\rangle$
(d) $\mathbf{u} = \langle 4, 1, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 0, 2\rangle$

### ENFOCANDO CONCEITOS

**4.** O triângulo no espaço tridimensional com vértices $(-1, 2, 3)$, $(2, -2, 0)$ e $(3, 1, -4)$ tem um ângulo obtuso? Justifique sua resposta.

**5.** A figura a seguir mostra oito vetores que estão espaçados igualmente em torno de um círculo de raio 1. Determine o produto escalar de $\mathbf{v}_0$ com cada um dos outros sete vetores.

**6.** A figura a seguir mostra seis vetores que estão igualmente espaçados em torno de um círculo de raio 5. Determine o produto escalar de $\mathbf{v}_0$ com cada um dos outros cinco vetores.

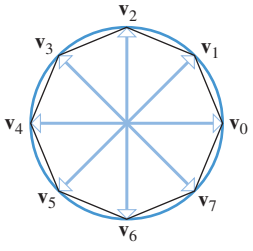


Figura Ex-5

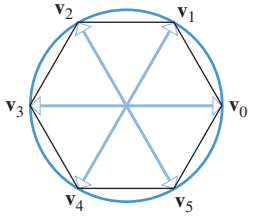


Figura Ex-6

**7.** (a) Use vetores para mostrar que $A(2, -1, 1)$, $B(3, 2, -1)$ e $C(7, 0, -2)$ são vértices de um triângulo retângulo. Em qual vértice está o ângulo reto?
(b) Use vetores para encontrar os ângulos interiores do triângulo com vértices $(-1, 0)$, $(2, -1)$ e $(1, 4)$. Dê os ângulos até o grau mais próximo.

**8.** (a) Mostre que se $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ for um vetor no espaço bidimensional, então os vetores

$$\mathbf{v}_1 = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = b\mathbf{i} - a\mathbf{j}$$

são ambos ortogonais a $\mathbf{v}$.
(b) Use o resultado da parte (a) para determinar dois vetores unitários que sejam ortogonais ao vetor $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. Esboce os vetores $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

**9.** Explique por que cada uma das seguintes expressões não faz sentido.
(a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
(c) $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$ (d) $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$

**10.** Explique por que cada uma das seguintes expressões faz sentido

(a) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$ (b) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+a$ (d) $(a\,\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$

**11.** Verifique as partes (*b*) e (*c*) do Teorema 11.3.2 com os vetores $\mathbf{u}=6\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+7\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{w}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ e $a=-5$.

**12.** Sejam $\mathbf{u}=\langle 1,2\rangle$, $\mathbf{v}=\langle 4,-2\rangle$ e $\mathbf{w}=\langle 6,0\rangle$. Determine

(a) $\mathbf{u}\cdot(7\mathbf{v}+\mathbf{w})$ (b) $\|(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{w}\|$

(c) $\|\mathbf{u}\|(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ (d) $(\|\mathbf{u}\|\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$

**13.** Determine $r$ tal que o vetor do ponto $A(1,-1,3)$ ao ponto $B(3,0,5)$ seja perpendicular ao vetor que parte de $A$ ao ponto $P(r,r,r)$.

**14.** Determine dois vetores unitários no espaço bidimensional que façam um ângulo de 45° com $4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$.

**15-16** Determine os cossenos diretores de $\mathbf{v}$ e confirme que eles satisfazem a Equação (5). Então, use os cossenos diretores para aproximar os ângulos diretores até o grau mais próximo. ■

**15.** (a) $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$

**16.** (a) $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-4\mathbf{k}$

## ENFOCANDO CONCEITOS

**17.** Mostre que os cossenos diretores de um vetor satisfazem

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

**18.** Sejam $\theta$ e $\lambda$ os ângulos mostrados na figura a seguir. Mostre que os cossenos diretores de $\mathbf{v}$ podem ser expressos como

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\lambda\cos\theta\\ \cos\beta &= \cos\lambda\,\operatorname{sen}\theta\\ \cos\gamma &= \operatorname{sen}\lambda\end{aligned}$$

[*Sugestão*: Expresse $\mathbf{v}$ em forma de componentes e normalize.]

**19.** A figura abaixo mostra um cubo.

(a) Determine o ângulo entre os vetores $\mathbf{d}$ e $\mathbf{u}$ até o grau mais próximo.

(b) Faça uma conjectura sobre o ângulo entre os vetores $\mathbf{d}$ e $\mathbf{v}$ e confirme sua conjectura calculando o ângulo.

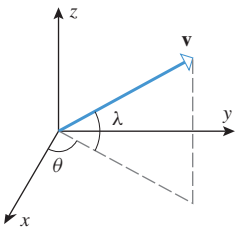



**Figura Ex-18**

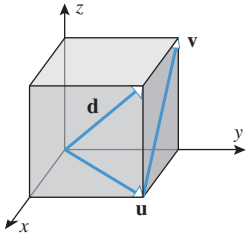



**Figura Ex-19**

**20.** Mostre que os vetores não nulos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são ortogonais se e somente se seus cossenos diretores satisfazem

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0$$

**21.** Use o resultado do Exercício 18 para determinar os ângulos diretores do vetor mostrado na figura até o grau mais próximo.

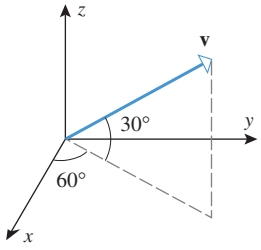



**Figura Ex-21**

**22.** Determine, até o grau mais próximo, o ângulo agudo formado por duas diagonais de um cubo.

**23.** Determine, até o grau mais próximo, os ângulos que uma diagonal de uma caixa com dimensões 10 cm por 15 cm por 25 cm faz com as arestas da caixa.

**24.** Em cada parte, determine o componente vetorial de $\mathbf{v}$ ao longo de $\mathbf{b}$ e o componente vetorial de $\mathbf{v}$ ortogonal a $\mathbf{b}$. Então, esboce os vetores $\mathbf{v}$, $\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}-\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{v}$.

(a) $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{v}=\langle 4,5\rangle$, $\mathbf{b}=\langle 1,-2\rangle$

(c) $\mathbf{v}=-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$

**25.** Em cada parte, determine o componente vetorial de $\mathbf{v}$ ao longo de $\mathbf{b}$ e o componente vetorial de $\mathbf{v}$ ortogonal a $\mathbf{b}$.

(a) $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{v}=\langle 4,-1,7\rangle$, $\mathbf{b}=\langle 2,3,-6\rangle$

**26-27** Expresse o vetor $\mathbf{v}$ como a soma de um vetor paralelo a $\mathbf{b}$ e um vetor ortogonal a $\mathbf{b}$. ■

**26.** (a) $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{v}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$

**27.** (a) $\mathbf{v}=\langle -3,5\rangle$, $\mathbf{b}=\langle 1,1\rangle$

(b) $\mathbf{v}=\langle -2,1,6\rangle$, $\mathbf{b}=\langle 0,-2,1\rangle$

(c) $\mathbf{v}=\langle 1,4,1\rangle$, $\mathbf{b}=\langle 3,-2,5\rangle$

**28-31 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**28.** Se $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ e $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, então $\mathbf{b}=\mathbf{c}$.

**29.** Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores ortogonais não nulos, então $\mathbf{v}+\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$.

**30.** Se $\mathbf{u}$ for um vetor unitário paralelo a um vetor não nulo $\mathbf{v}$, então $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\pm\|\mathbf{v}\|$.

**31.** Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{b}$ forem vetores não nulos, então a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{b}$ será um vetor paralelo a $\mathbf{b}$.

**32.** Se $L$ for uma reta no espaço bi ou tridimensional que passa pelos pontos $A$ e $B$, então a distância de um ponto $P$ à reta $L$ é igual ao comprimento do componente do vetor $\overrightarrow{AP}$ que é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AB}$ (ver figura a seguir). Use esse resultado para determinar a distância entre o ponto $P(1,0)$ e a reta que passa por $A(2,-3)$ e $B(5,1)$.

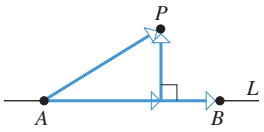



**Figura Ex-32**

**33.** Use o método do Exercício 32 para determinar a distância do ponto $P(-3, 1, 2)$ à reta que passa pelos pontos $A(1, 1, 0)$ e $B(-2, 3, -4)$.

**34.** Conforme mostrado na figura abaixo, uma criança com uma massa de 34 kg repousa sobre um escorregador liso (sem atrito), que está inclinado em um ângulo de 27° com o chão. Quanta força a criança exerce sobre o escorregador e quanta força deve ser aplicada na direção de **P** para evitar que a criança deslize para baixo no escorregador? Tome a aceleração devido à gravidade como 9,8 m/s$^2$.

**35.** Para a criança do Exercício 34, quanta força deve ser aplicada na direção e no sentido de **Q** (mostrado na figura) para evitar que a criança deslize para baixo no escorregador?

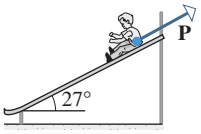



**Figura Ex-34**

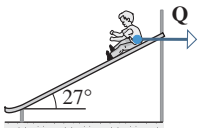



**Figura Ex-35**

**36.** Suponha que o escorregador do Exercício 34 tenha 4 m de comprimento. Dê uma estimativa para o trabalho efetuado pela gravidade se a criança deslizar ao longo de todo o escorregador.

**37.** Uma caixa é arrastada ao longo do chão por uma corda que aplica uma força de 50 lb em um ângulo de 60° com o chão. Quanto trabalho é realizado para movimentar a caixa 15 pés?

**38.** Determine o trabalho realizado pela força $\mathbf{F} = -3\mathbf{j}$ (libras) aplicada a um ponto que se move sobre um reta de (1, 3) a (4, 7). Suponha que a distância seja medida em pés.

**39.** Uma força de $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ newtons é aplicada a um ponto que se move uma distância de 15 metros na direção e sentido do vetor $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Quanto trabalho foi realizado?

**40.** Um barco viaja 100 metros exatamente para o norte enquanto o vento exerce uma força de 500 newtons em direção ao nordeste. Quanto trabalho o vento faz?

## ENFOCANDO CONCEITOS

**41.** Sejam **u** e **v** lados adjacentes de um paralelogramo. Use vetores para provar que as diagonais do paralelogramo são perpendiculares se os lados forem de comprimentos iguais.

**42.** Sejam **u** e **v** lados adjacentes de um paralelogramo. Use vetores para provar que o paralelogramo é um retângulo se as diagonais tiverem os mesmos comprimentos.

**43.** Prove que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

e interprete o resultado geometricamente, transladando-o para um teorema sobre paralelogramos.

**44.** Prove: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$.

**45.** Mostre que se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ forem vetores não nulos mutuamente ortogonais no espaço tridimensional, e se um vetor **v** no espaço tridimensional for expresso como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

então os escalares $c_1$, $c_2$ e $c_3$ são dados pelas fórmulas

$$c_i = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i)/\|\mathbf{v}_i\|^2, \quad i = 1, 2, 3$$

**46.** Mostre que os três vetores

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

são mutuamente ortogonais e, então, use o resultado do Exercício 45 para determinar os escalares $c_1$, $c_2$ e $c_3$ tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

**C 47.** Dado $x$ em $(-\infty, +\infty)$, sejam $\mathbf{u}(x)$ o vetor que vai da origem ao ponto $P(x, y)$ da curva $y = x^2 + 1$ e $\mathbf{v}(x)$ o vetor que vai da origem ao ponto $Q(x, y)$ da reta $y = -x - 1$.

(a) Use um CAS para determinar, até o grau mais próximo, o ângulo mínimo entre $\mathbf{u}(x)$ e $\mathbf{v}(x)$ com $x$ em $(-\infty, +\infty)$.

(b) Determine se existem valores reais de $x$ com os quais $\mathbf{u}(x)$ e $\mathbf{v}(x)$ sejam ortogonais.

**C 48.** Seja **u** um vetor unitário no plano $xy$ de um sistema de coordenadas $xyz$ e seja **v** um vetor unitário no plano $yz$. Sejam $\theta_1$ o ângulo entre **u** e **i**, $\theta_2$ o ângulo entre **v** e **k** e seja $\theta$ o ângulo entre **u** e **v**.

(a) Mostre que $\cos\theta = \pm \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$.

(b) Determine $\theta$ se $\theta$ for agudo e $\theta_1 = \theta_2 = 45°$.

(c) Use um CAS para determinar, até o grau mais próximo, os valores máximo e mínimo de $\theta$ se $\theta$ for agudo e $\theta_2 = 2\theta_1$.

**49.** Prove as partes (*b*) e (*e*) do Teorema 11.3.2 com vetores no espaço tridimensional.

**50.** **Texto** Discuta algumas das semelhanças e das diferenças entre as propriedades da multiplicação de números reais e as do produto escalar de vetores.

**51.** **Texto** Discuta os méritos da seguinte afirmação: "Suponha que uma identidade algébrica envolva apenas a adição, a subtração e a multiplicação de números reais. Se os números forem substituídos por vetores e a multiplicação pelo produto escalar, resultará uma identidade envolvendo vetores."

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.3

**1.** 8 **2.** (a) 25 (b) 7 (c) 10 (d) −6 **3.** $\frac{14}{5}$ **4.** $\frac{2}{\sqrt{14}}; -\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}$ **5.** $9\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

## 11.4 PRODUTO VETORIAL

*Em muitas aplicações de vetores na Matemática, na Física e na Engenharia, existe a necessidade de determinar um vetor que seja ortogonal a dois vetores dados. Nesta seção, discutiremos um novo tipo de multiplicação de vetores que pode ser usada para esse fim.*

### DETERMINANTES

Alguns dos conceitos que desenvolveremos nesta seção exigem ideias básicas sobre ***determinantes***, que são funções que associam valores numéricos a arranjos quadrados de números. Por exemplo, se $a_1$, $a_2$, $b_1$ e $b_2$ forem números reais, então definimos um ***determinante*** **2 × 2** por

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{1}$$

O propósito das flechas é ajudar a lembrar a fórmula – o determinante é o produto das entradas da flecha que vai para a direita menos o produto das entradas da flecha que vai para a esquerda. Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (-2)(4) = 15 + 8 = 23$$

Um ***determinante*** **3 × 3** é definido em termos de determinantes 2 × 2 por

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

O lado direito desta fórmula é facilmente lembrado notando que $a_1$, $a_2$ e $a_3$ são as entradas na primeira "linha" do lado esquerdo, e os determinantes 2 × 2 do lado direito surgem suprimindo a primeira linha e uma coluna apropriada do lado esquerdo. O padrão é o seguinte:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(20) + 2(2) - 5(3) = 49$$

Há, também, definições para determinantes 4 × 4, 5 × 5 e ordens maiores, mas não precisaremos delas neste livro. As propriedades dos determinantes são estudadas em um ramo da Matemática chamado de ***Álgebra Linear***, mas precisaremos apenas das duas propriedades dadas no teorema seguinte.

**11.4.1 TEOREMA**

(*a*) *Se duas linhas do arranjo de um determinante são iguais, então o valor do determinante é* 0.

(*b*) *Trocando entre si duas linhas do arranjo de um determinante, multiplicamos o valor desse determinante por* − 1.

Daremos as provas das partes $(a)$ e $(b)$ para determinantes $2 \times 2$ e deixaremos as provas para determinantes $3 \times 3$ como exercícios.

**DEMONSTRAÇÃO $(a)$**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_2a_1 = 0$$

**DEMONSTRAÇÃO $(b)$**

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - b_2a_1 = -(a_1b_2 - a_2b_1) = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \blacksquare$$

## PRODUTO VETORIAL

Agora passamos para o conceito principal desta seção.

**11.4.2 DEFINIÇÃO** Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ forem vetores no espaço tridimensional, então o ***produto vetorial*** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é o vetor definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \tag{3}$$

ou de modo equivalente,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\,\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \tag{4}$$

Observe que o lado direito da Fórmula (3) tem a mesma forma que o lado direito da Fórmula (2), a diferença sendo a notação e a ordem dos fatores dos três termos. Assim, podemos reescrever (3) como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{5}$$

Entretanto, isso é somente um esquema mnemônico e, na verdade, não é um determinante, uma vez que as entradas em um determinante são números, não vetores.

**▶ Exemplo 1** Sejam $\mathbf{u} = \langle 1, 2, -2 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 3, 0, 1 \rangle$, Determine

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

***Solução $(a)$***

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

***Solução $(b)$*** Poderíamos usar o método da parte (a), mas não é realmente necessário efetuar qualquer conta. Precisamos apenas observar que, trocando $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v}$, trocamos a segunda com a terceira linha em (5), o que, por sua vez, troca entre si as linhas dos determinantes

$2 \times 2$ em (3). Contudo, trocando as linhas de um determinante $2 \times 2$, invertemos o seu sinal, de modo que o efeito final da troca dos fatores em um produto vetorial é inverter o sinal dos componentes. Assim temos, simplesmente,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

**► Exemplo 2** Mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ com qualquer vetor $\mathbf{u}$ no espaço tridimensional.

***Solução*** Poderíamos tomar $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ e aplicar o método da parte (a) do Exemplo 1 para mostrar que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

Entretanto, o cálculo efetivo é desnecessário. Precisamos somente observar que se os dois fatores no produto vetorial são os mesmos, então cada determinante $2 \times 2$ em (3) é zero, pois suas linhas são idênticas. Assim, $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ por inspeção. ◄

## PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO PRODUTO VETORIAL

Nosso próximo objetivo é estabelecer algumas das propriedades algébricas básicas do produto vetorial. No que segue, é conveniente que o leitor não esqueça as diferenças essenciais entre o produto vetorial e o produto escalar:

- O produto vetorial está definido somente para vetores no espaço tridimensional, enquanto que o produto escalar está definido para vetores no espaço bi e tridimensional.
- O produto vetorial de dois vetores é um vetor, enquanto que o produto escalar de dois vetores é um escalar.

As principais propriedades algébricas do produto vetorial estão listadas no teorema a seguir.

Em multiplicações numéricas ordinárias e produtos escalares, a ordem dos fatores não importa, mas no produto vetorial ela é importante. A parte (*a*) do Teorema 11.4.3 mostra que, trocando a ordem dos fatores no produto vetorial, invertemos o sentido do vetor resultante.

**11.4.3 TEOREMA** *Se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *forem vetores no espaço tridimensional e* $a$ *for um escalar, então*

(*a*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

(*b*) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

(*c*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(*d*) $a(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (a\mathbf{v})$

(*e*) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*f*) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

As partes (*a*) e (*f*) foram tratadas nos Exemplos 1 e 2. As outras provas são deixadas como exercícios.

Os seguintes produtos vetoriais ocorrem tão frequentemente que é útil familiarizar-se com eles:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array} \tag{6}$$

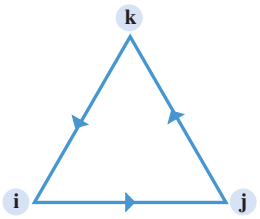



Figura 11.4.1

Esses resultados são facilmente obtidos; por exemplo

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

Entretanto, em vez de calcular esses produtos vetoriais cada vez que forem utilizados, é melhor usar o diagrama da Figura 11.4.1. Nesse diagrama, o produto vetorial de dois vetores consecutivos no sentido anti-horário é o próximo vetor a seguir, e o produto vetorial de dois vetores consecutivos no sentido horário é o negativo do próximo vetor a seguir.

**ADVERTÊNCIA** Podemos escrever um produto de três números reais como $uvw$, pois a lei associativa $u(vw) = (uv)w$ garante o mesmo valor para o produto, não importa onde os parênteses forem colocados. Contudo, a lei associativa *não* é válida para os produtos vetoriais. Por exemplo,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

e, portanto, $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$. Assim, não podemos escrever o produto vetorial de três vetores como $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, uma vez que essa expressão é ambígua sem parênteses.

## PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO PRODUTO VETORIAL

O seguinte teorema mostra que o produto vetorial de dois vetores é ortogonal a ambos os fatores. Essa propriedade do produto vetorial será utilizada seguidamente nas próximas seções.

**11.4.4 TEOREMA** *Se* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *forem vetores no espaço tridimensional, então*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *é ortogonal a* $\mathbf{u}$)

(*b*) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *é ortogonal a* $\mathbf{v}$)

Demonstraremos a parte (*a*). A prova da parte (*b*) é análoga.

**DEMONSTRAÇÃO (*a*)** Sejam $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Então, de (4),

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1 \rangle \tag{7}$$

e, portanto,

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0 \quad \blacksquare$$

**▶ Exemplo 3** Encontre um vetor que seja ortogonal aos vetores $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle -7, 2, -1 \rangle$.

***Solução*** Pelo Teorema 11.4.4, o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ será ortogonal a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Calculando, obtemos

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -7 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = -5\mathbf{i} - 19\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

Confirme que o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ no Exemplo 3 é ortogonal a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ calculando $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ e $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

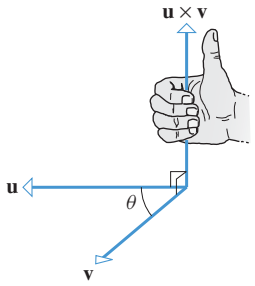



Figura 11.4.2

Pode se provar que se **u** e **v** forem vetores não nulos e não paralelos, então o sentido de **u** × **v** relativo a **u** e **v** é determinado pela regra da mão direita;* isto é, se os dedos da mão direita estão postos em forma de concha, de tal forma que eles fecham de **u** para **v** no sentido de rotação que leva **u** em **v** com menos de 180°, então o polegar irá apontar grosseiramente na direção de **u** × **v** (Figura 11.4.2). Por exemplo, afirmamos em (6) que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

que está de acordo com a regra da mão direita (verifique).

O teorema a seguir lista mais algumas propriedades geométricas importantes do produto vetorial.

**11.4.5 TEOREMA** *Sejam* **u** *e* **v** *vetores não nulos do espaço tridimensional, e seja* $\theta$ *o ângulo entre esses vetores quando estiverem posicionados de tal forma que os seus pontos iniciais coincidam.*

(*a*) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$

(*b*) *A área A do paralelogramo que tem* **u** *e* **v** *como lados adjacentes é*

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \tag{8}$$

(*c*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *se, e somente se,* **u** *e* **v** *forem vetores paralelos, isto é, se e somente se eles forem múltiplos escalares um do outro.*

**DEMONSTRAÇÃO (*a*)**

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\
&= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2}} \qquad \text{Teorema 11.3.3} \\
&= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} \\
&= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2} \\
&= \sqrt{(u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2} \\
&= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \qquad \text{Ver Fórmula (4)}
\end{aligned}$$

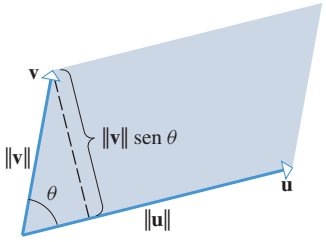



Figura 11.4.3

**DEMONSTRAÇÃO (*b*)** Com referência à Figura 11.4.3, o paralelogramo que tenha **u** e **v** como lados adjacentes pode ser visto como tendo base $\|\mathbf{u}\|$ e altura $\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$. Assim, sua área $A$ é

$$A = (\text{base})(\text{altura}) = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

**DEMONSTRAÇÃO (*c*)** Supondo que **u** e **v** sejam vetores não nulos, segue da parte (*a*) que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se, e somente se, $\operatorname{sen} \theta = 0$; isso é verdadeiro se, e somente se, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (uma vez que $0 \leq \theta \leq \pi$). Geometricamente, isso significa que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se, e somente se, **u** e **v** forem vetores paralelos. ■

**▶ Exemplo 4** Determine a área do triângulo determinado pelos pontos $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$ e $P_3(0, 4, 3)$.

* Lembre-se de que concordamos em considerar, neste livro, somente sistemas de coordenadas que satisfaçam a regra da mão direita. Se tivéssemos usado sistemas de coordenadas que satisfazem a regra da mão esquerda, usaríamos aqui uma "regra da mão esquerda."

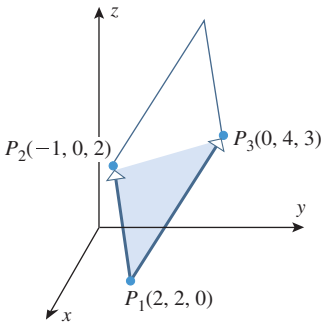



**Figura 11.4.4**

***Solução*** A área $A$ do triângulo é a metade da área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ (Figura 11.4.4). No entanto, $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -3, -2, 2\rangle$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = \langle -2, 2, 3\rangle$, logo,

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \langle -10, 5, -10\rangle$$

(verifique) e consequentemente

$$A = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \tfrac{15}{2} \blacktriangleleft$$

## PRODUTO MISTO

Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ forem vetores no espaço tridimensional, então o número

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

é chamado de ***produto misto*** de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Não é necessário calcular o produto escalar e o vetorial para calcular o produto misto – o valor pode ser obtido diretamente da fórmula

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

cuja validade pode ser vista escrevendo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \left( \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Muitas calculadoras estão munidas das operações produto vetorial e determinante. Se você tiver uma calculadora que tenha essa capacidade, use-a para conferir as contas dos Exemplos 1 e 5.

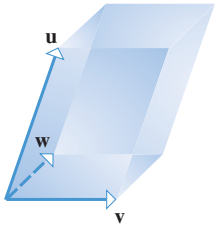



**Figura 11.4.5**

Segue da Fórmula (10) que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \pm V$$

O $+$ ocorre quando $\mathbf{u}$ faz um ângulo agudo com $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ e o $-$ ocorre quando ele faz um ângulo obtuso.

**► Exemplo 5** Calcule o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ dos vetores

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

***Solução***

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 49 \blacktriangleleft$$

## PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO PRODUTO MISTO

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores não nulos no espaço tridimensional que estão posicionados de forma tal que os pontos iniciais coincidam, então esses vetores formam lados adjacentes de um paralelepípedo (Figura 11.4.5). O teorema seguinte estabelece uma relação entre o volume desse paralelepípedo e o produto misto de seus lados.

**11.4.6 TEOREMA** *Sejam* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *vetores não nulos no espaço tridimensional.*

(*a*) *O volume* $V$ *do paralelepípedo que tem* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *como arestas adjacentes é*

$$V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \tag{10}$$

(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ *se, e somente se,* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *estiverem situados no mesmo plano.*

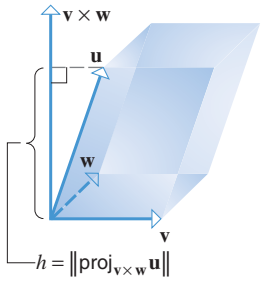



**Figura 11.4.6**

**DEMONSTRAÇÃO (*a*)** Em referência à Figura 11.4.6, vamos considerar a base do paralelepípedo com $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ como lados adjacentes como sendo o paralelogramo determinado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Assim, a área da base é $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ e a altura $h$ do paralelepípedo (mostrado na figura) é o comprimento da projeção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre o vetor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Por consequência, da Fórmula (12) da Seção 11.3, temos

$$h = \|\text{proj}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2}\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}$$

Agora, segue que o volume do paralelepípedo é

$$V = (\text{área da base})(\text{altura}) = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|h = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

**DEMONSTRAÇÃO (*b*)** Os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ situam-se no mesmo plano se, e somente se, o paralelepípedo com esses vetores como lados adjacentes tiver volume zero (por quê?). Assim, da parte (*a*) os vetores situam-se no mesmo plano se, e somente se, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$. ■

## ■ PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO PRODUTO MISTO

Observamos anteriormente, nesta seção, que a expressão $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ deve ser evitada, pois é ambígua sem parênteses. Entretanto, a expressão $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ não é ambígua – significa $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, e não $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$, porque não podemos fazer o produto vetorial de um escalar com um vetor. Analogamente, a expressão $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ deve significar $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$, e não $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$. Desse modo, em uma expressão da forma $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ou $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, o produto vetorial é feito primeiro e depois o produto escalar.

Uma vez que trocando entre si duas linhas de um determinante, o seu valor fica multiplicado por $-1$, fazendo-se duas trocas de linhas em um determinante não afeta o seu valor. Assim sendo, segue que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \tag{11}$$

uma vez que os determinantes $3 \times 3$ que foram usados para calcular esses produtos mistos podem ser obtidos um do outro fazendo duas mudanças de linhas (verifique).

Outra fórmula útil pode ser obtida reescrevendo a primeira igualdade em (11) como

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

e, então, omitindo os parênteses supérfluos para obter

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \tag{12}$$

Em palavras, essa fórmula afirma que o produto escalar e vetorial no produto misto podem ser trocados (desde que os fatores sejam agrupados apropriadamente).

Uma boa maneira de lembrar da Fórmula (11) é observar que a segunda expressão nessa fórmula pode ser obtida da primeira deixando fixos os símbolos do produto escalar, do vetorial e os parênteses, movendo-se para a direita os dois primeiros vetores e trazendo-se o terceiro vetor para a primeira posição. O mesmo procedimento produz a terceira expressão a partir da segunda e a primeira expressão a partir da terceira (verifique).

## ■ OS PRODUTOS ESCALAR E VETORIAL SÃO INDEPENDENTES DAS COORDENADAS

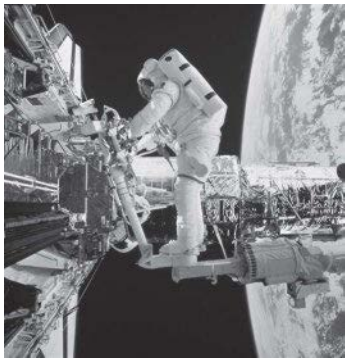
Nas Definições 11.3.1 e 11.4.2, definimos o produto escalar e o vetorial de dois vetores em termos dos componentes daqueles vetores em um sistema de coordenadas. Assim, é teoricamente possível que mudar o sistema de coordenadas poderia mudar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ou $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, uma vez que os componentes de um vetor dependem do sistema de coordenadas que foi escolhido. Entretanto, as relações

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta \tag{13}$$

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta \tag{14}$$

que foram obtidas nos Teoremas 11.3.3 e 11.4.5 mostram que esse não é o caso. A Fórmula (13) mostra que o valor de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ depende apenas do comprimento dos vetores e o ângulo entre eles – e não depende do sistema de coordenadas. Analogamente, a Fórmula (14), em combinação com a regra da mão direita e com o Teorema 11.4.4, mostra que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ não depende do sistema de coordenadas (enquanto se mantenha a regra da mão direita).

Essa independência do sistema de coordenadas é importante em aplicações, pois nos permite escolher qualquer sistema de coordenadas conveniente para resolver um problema com plena confiança de que a escolha não afetará os cálculos que envolvam produtos escalares ou vetoriais.



World Perspectives/Getty Images

*Os astronautas usam ferramentas que foram projetadas para limitar forças que provocariam movimentos rotacionais indesejados a um satélite.*

## MOMENTOS E MOVIMENTO ROTACIONAL NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Os produtos vetoriais desempenham um papel importante na descrição do movimento rotacional no espaço tridimensional. Por exemplo, suponha que um astronauta em uma missão para consertar um satélite no espaço aplique uma força $\mathbf{F}$ em um ponto $Q$ da superfície de um satélite esférico. Se a força for dirigida ao longo de uma reta que passa pelo centro $P$ do satélite, então a segunda lei do movimento de Newton implica que a força acelerará o satélite na direção e sentido de $\mathbf{F}$. Entretanto, se o astronauta aplicar a mesma força a um ângulo $\theta$ com o vetor $\overrightarrow{PQ}$, então $\mathbf{F}$ tende a causar uma rotação bem como uma aceleração na direção e sentido de $\mathbf{F}$. Para ver por que isso ocorre, vamos decompor $\mathbf{F}$ na soma de componentes ortogonais $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, onde $\mathbf{F}_1$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{F}$ sobre o vetor $\overrightarrow{PQ}$ e $\mathbf{F}_2$ é o componente de $\mathbf{F}$ ortogonal a $\overrightarrow{PQ}$ (Figura 11.4.7). Uma vez que a força $\mathbf{F}_1$ age ao longo da reta que passa pelo centro do satélite, contribui para a acelereção linear do satélite, mas não causa nenhuma rotação. No entanto, a força $\mathbf{F}_2$ é tangente ao círculo em torno do satélite no plano de $\mathbf{F}$ e $\overrightarrow{PQ}$, assim ela causa a rotação do satélite em torno do eixo que é perpendicular a esse plano.

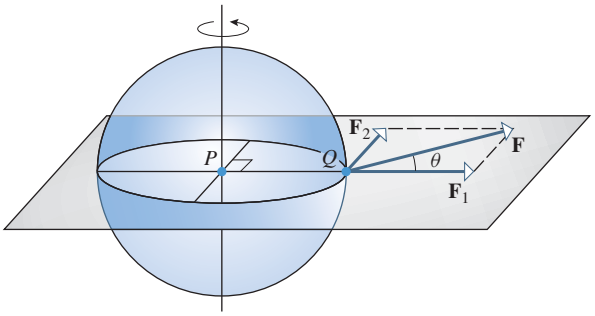



**Figura 11.4.7**

Você sabe, de sua própria experiência, que a "tendência" para a rotação em torno de um eixo depende tanto do tamanho da força quanto de quão longe do eixo ela for aplicada. Por exemplo, é mais fácil fechar um porta empurrando-a perto da fechadura do que aplicar a mesma força perto das dobradiças. Assim, a tendência de rotação do satélite pode ser medida por

$$\|\overrightarrow{PQ}\|\|\mathbf{F}_2\| \qquad \boxed{\text{distância do centro} \times \text{magnitude da força}} \qquad (15)$$

Entretanto, $\|\mathbf{F}_2\| = \|\mathbf{F}\| \operatorname{sen}\theta$, logo podemos reescrever (15) como

$$\|\overrightarrow{PQ}\|\|\mathbf{F}\|\operatorname{sen}\theta = \|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}\|$$

Isso é chamado de ***momento escalar*** ou ***torque*** de $\mathbf{F}$ sobre o ponto $P$. Os momentos escalares têm unidades de força vezes a distância – libra-pé ou newton-metro, por exemplo. O vetor $\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}$ é chamado de ***momento vetorial*** ou ***vetor torque*** de $\mathbf{F}$ sobre $P$.

Lembrando que a direção e o sentido de $\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}$ são determinados pela regra da mão direita, segue que a direção da rotação em torno de $P$ que resulta aplicando a força $\mathbf{F}$ no ponto $Q$ é anti-horária olhando de cima para baixo no eixo de $\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}$ (Figura 11.4.7). Assim, o momento vetorial $\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}$ capta a informação essencial sobre o efeito rotacional da força – a magnitude do produto vetorial fornece o momento escalar da força e o vetor do produto vetorial fornece o eixo e direção da rotação.

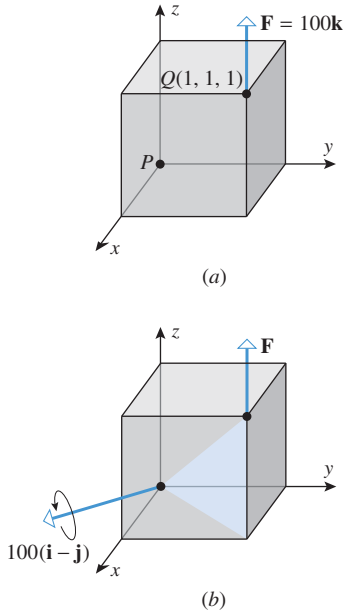



**Figura 11.4.8**

► **Exemplo 6** A Figura 11.4.8*a* mostra a força $\mathbf{F}$ de 100 N aplicada na direção $z$ positiva, no ponto $Q(1, 1, 1)$ de um cubo, cujos lados têm 1 m de comprimento. Admitindo que o cubo esteja livre para rodar em torno do ponto $P(0,0,0)$ (a origem), determine o momento escalar da força sobre $P$ e descreva a direção da rotação.

***Solução*** O vetor força é $\mathbf{F} = 100\mathbf{k}$ e o vetor de $P$ a $Q$ é $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, logo o momento vetorial de $\mathbf{F}$ sobre $P$ é

$$\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 100\mathbf{i} - 100\mathbf{j}$$

Assim, o momento escalar de $\mathbf{F}$ sobre $P$ é $\|100\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\| = 100\sqrt{2} \approx 141$ N·m e a direção da rotação é anti-horária olhando ao longo do vetor $100\mathbf{i} - 100\mathbf{j} = 100(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ em direção a seu ponto inicial (Figura 11.4.8*b*). ◀

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.4 (*Ver página 805 para respostas.*)

**1.** (a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$ _____ (b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} =$ _____

**2.** $\langle 1, 2, 0\rangle \times \langle 3, 0, 4\rangle =$ _____

**3.** Suponha que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sejam vetores no espaço tridimensional tais que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle 2, 7, 3\rangle$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \langle -5, 4, 0\rangle$.
(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} =$ _____ (b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u} =$ _____
(c) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) =$ _____
(d) $\mathbf{u} \times (2\mathbf{w}) =$ _____

**4.** Sejam $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
(a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) =$ _____
(b) O paralelepípedo de lados adjacentes $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tem volume $V =$ _____.

## EXERCÍCIOS 11.4 C CAS

**1.** (a) Use um determinante para encontrar o produto vetorial

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

(b) Verifique sua resposta da parte (*a*) reescrevendo o produto vetorial como

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + (\mathbf{i} \times \mathbf{k})$$

e calculando cada termo.

**2.** Em cada parte, use os dois métodos do Exercício 1 para determinar
(a) $\mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ (b) $\mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

**3-6** Determine $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e verifique que é ortogonal a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$. ■

**3.** $\mathbf{u} = \langle 1, 2, -3\rangle$; $\mathbf{v} = \langle -4, 1, 2\rangle$

**4.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**5.** $\mathbf{u} = \langle 0, 1, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 0, -4\rangle$

**6.** $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

**7.** Sejam $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 1, 7\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle 1, 4, 5\rangle$. Determine
(a) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
(c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (d) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

C **8.** Use um CAS ou uma calculadora que possa calcular determinantes ou produtos vetoriais para resolver o Exercício 7.

**9.** Determine os cossenos diretores de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ com os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ na figura a seguir.

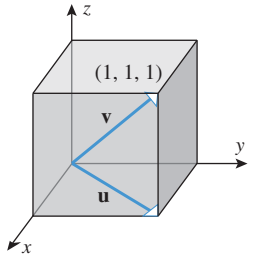



**Figura Ex-9**

**10.** Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais a

$$\mathbf{u} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}.$$

**11.** Determine dois vetores unitários que sejam perpendiculares ao plano determinado pelos pontos $A(0, -2, 1)$, $B(1, -1, -2)$ e $C(-1, 1, 0)$.

**12.** Determine dois vetores unitários que sejam paralelos ao plano $yz$ e perpendiculares ao vetor $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

**13-16 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**13.** Se o produto vetorial de dois vetores não nulos for o vetor zero, então cada um dos dois vetores será um múltiplo escalar do outro.

**14.** Dados quaisquer vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, temos $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

**15.** Se $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{w}$.

**16.** Se $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$.

**17-18** Determine a área do paralelogramo que tem **u** e **v** como lados adjacentes. ■

**17.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**18.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

**19-20** Determine a área do triângulo de vértices $P$, $Q$ e $R$. ■

**19.** $P(1, 5, -2)$, $Q(0, 0, 0)$ e $R(3, 5, 1)$

**20.** $P(2, 0, -3)$, $Q(1, 4, 5)$ e $R(7, 2, 9)$

**21-24** Determine $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. ■

**21.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

**22.** $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 3, 2\rangle$, $\mathbf{w} = \langle -4, 1, -3\rangle$

**23.** $\mathbf{u} = \langle 2, 1, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -3, 1\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 4, 0, 1\rangle$

**24.** $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

**25-26** Use um produto misto para determinar o volume do paralelepípedo que tem **u**, **v** e **w** como arestas adjacentes. ■

**25.** $\mathbf{u} = \langle 2, -6, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 4, -2\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 2, 2, -4\rangle$

**26.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

**27.** Em cada parte, use um produto misto para determinar se os vetores situam-se no mesmo plano.
(a) $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 0, -2\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 5, -4, 0\rangle$
(b) $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
(c) $\mathbf{u} = \langle 4, -8, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1, -2\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 3, -4, 12\rangle$.

**28.** Suponha que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 3$. Determine
(a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ (b) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$
(c) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (d) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
(e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ (f) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{w})$

**29.** Considere o paralelepípedo com as arestas adjacentes

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$
$$\mathbf{w} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

(a) Encontre o volume.
(b) Encontre a área da face determinada por **u** e **w**.
(c) Encontre o ângulo entre **u** e o plano contendo a face determinada por **v** e **w**.

**30.** Mostre que, no espaço tridimensional, a distância $d$ de um ponto $P$ à reta $L$ que passa pelos pontos $A$ e $B$ pode ser expressa como

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

**31.** Use o resultado do Exercício 30 para determinar a distância entre o ponto $P$ e a reta que passa pelos pontos $A$ e $B$.
(a) $P(-3, 1, 2)$, $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 3, -4)$
(b) $P(4, 3)$, $A(2, 1)$, $B(0, 2)$

**32.** É um teorema da Geometria sólida que o volume de um tetraedro é $\frac{1}{3}$ (área da base) · (altura). Use esse resultado para provar que o volume de um tetraedro cujas arestas são os vetores **u**, **v** e **w** é $\frac{1}{6}|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.

**33.** Use o resultado do Exercício 32 para determinar o volume do tetraedro com vértices.

$$P(-1, 2, 0), \quad Q(2, 1, -3), \quad R(1, 0, 1), \quad S(3, -2, 3)$$

**34.** Seja $\theta$ o ângulo entre os vetores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
(a) Use o produto escalar para determinar $\cos\theta$.
(b) Use o produto vetorial para determinar $\operatorname{sen}\theta$.
(c) Confirme que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**35.** Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ quatro pontos distintos no espaço tridimensional. Explique por que a reta que passa por $A$ e $B$ deve intersectar a reta que passa por $C$ e $D$ se $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \neq \mathbf{0}$ e $\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}) = 0$.

**36.** Sejam $A$, $B$ e $C$ três pontos não colineares no espaço tridimensional. Descreva o conjunto de todos os pontos $P$ que satisfaçam a equação vetorial $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0$.

**37.** O que pode ser dito sobre o ângulo entre os vetores não nulos **u** e **v** se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$?

**38.** Mostre que se **u** e **v** forem vetores no espaço tridimensional, então

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

[*Nota*: Esse resultado, às vezes, é chamado de ***identidade de Lagrange***.]

**39.** A figura a seguir mostra uma força **F** de 10 lb aplicada na direção $y$ positivo ao ponto $Q(1, 1, 1)$ de um cubo cujos lados têm um comprimento de 1 pé. Em cada parte, determine o momento escalar de **F** sobre o ponto $P$ e descreva a direção de rotação, se houver, se o cubo estiver livre para rodar em torno de $P$.
(a) $P$ é o ponto $(0, 0, 0)$ (b) $P$ é o ponto $(1, 0, 0)$
(c) $P$ é o ponto $(1, 0, 1)$

**40.** A figura a seguir mostra uma força **F** de 1.000 N aplicada no canto de uma caixa.
(a) Determine o momento escalar de **F** sobre o ponto $P$.
(b) Determine os ângulos diretores do momento vetorial de **F** sobre o ponto $P$ até o grau mais próximo.

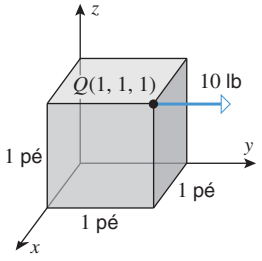



**Figura Ex-39**

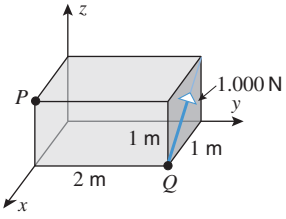



**Figura Ex-40**

**41.** Conforme mostrado na figura a seguir, uma força de 200 N é aplicada em um ângulo de 18° no ponto próximo da ponta de uma chave inglesa. Encontre o momento escalar da força sobre o centro do parafuso. [*Nota*: Trate isso como um problema a duas dimensões.]

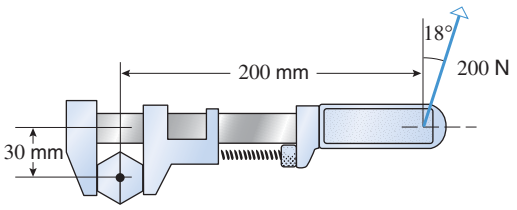



**Figura Ex-41**

**42.** Prove as partes (*b*) e (*c*) do Teorema 11.4.3.

**43.** Prove as partes (*d*) e (*e*) do Teorema 11.4.3.

**44.** Prove a parte (*b*) do Teorema 11.4.1 para determinantes $3 \times 3$. [*Nota*: Dê a prova para as duas primeiras linhas.] Então use (*b*) para provar (*a*).

**ENFOCANDO CONCEITOS**

**45.** As expressões da forma

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad \text{e} \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$$

são chamadas de ***produtos vetoriais triplos***. Pode-se provar com algum esforço que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$
$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$$

Essas expressões podem ser resumidas com a seguinte regra mnemônica:

Produto vetorial triplo = (de fora · o remoto)adjacente
− (de fora · adjacente)remoto

Tente descobrir o significado nesta regra de "de fora", "remoto" e "adjacente" e, então, use a regra para encontrar os dois produtos vetoriais triplos dos vetores

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

**46.** (a) Use o resultado do Exercício 45 para mostrar que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ situa-se no mesmo plano que $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ situa-se no mesmo plano que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
(b) Use um argumento geométrico para justificar os resultados da parte (a).

**47.** Em cada parte, use o resultado do Exercício 45 para provar a identidade vetorial.
(a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\,\mathbf{c} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{d}$
(b) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$

**48.** Prove: Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ situam-se no mesmo plano quando posicionados com um ponto inicial comum, então

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}\,) = \mathbf{0}$$

C **49.** Use um CAS para aproximar a área mínima de um triângulo se dois de seus vértices estão em $(2, -1, 0)$ e $(3, 2, 2)$ e o terceiro vértice está sobre a curva $y = \ln x$ no plano $xy$.

**50.** Se uma força $\mathbf{F}$ for aplicada a um objeto no ponto $Q$, então a reta que passa por $Q$ paralela a $\mathbf{F}$ é chamada de ***linha de ação*** da força. Definimos o momento vetorial de $\mathbf{F}$ sobre o ponto $P$ como sendo $\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}$. Mostre que se $Q'$ for qualquer ponto sobre a linha de ação de $\mathbf{F}$, então $\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F} = \overrightarrow{PQ'} \times \mathbf{F}$; isto é, não é essencial usar o ponto de aplicação para calcular o momento vetorial – qualquer ponto sobre a linha de ação serve. [*Sugestão*: Escreva $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'}$ e use as propriedades do produto vetorial.]

**51.** **Texto** Discuta algumas das semelhanças e das diferenças entre a multiplicação de números reais e o produto vetorial de vetores.

**52.** **Texto** Discorra sobre o que significa dizer que a operação de produto vetorial é "independente de coordenadas" e diga por que esse fato é relevante.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.4

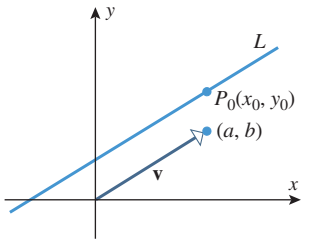
**1.** (a) 7 (b) 0 **2.** $8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ **3.** (a) $\langle 0, 0, 0 \rangle$ (b) $\langle -2, -7, -3 \rangle$ (c) $\langle -3, 11, 3 \rangle$ (d) $\langle -10, 8, 0 \rangle$ **4.** (a) $-58$ (b) 58.

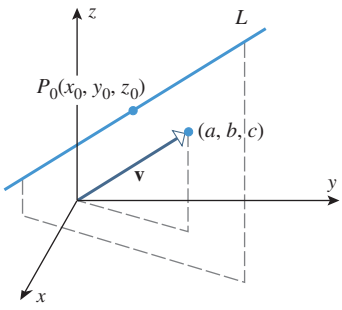
# 11.5 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE RETAS

*Nesta seção, discutiremos equações paramétricas de retas nos espaços bi e tridimensionais. No espaço tridimensional, as equações paramétricas de retas são especialmente importantes, pois fornecem, quase sempre, a forma mais conveniente de representação algébrica de retas.*

## RETAS DETERMINADAS POR UM PONTO E UM VETOR

Uma reta no espaço bi ou tridimensional pode ser determinada de maneira única especificando um ponto da reta e um vetor não nulo paralelo à reta (Figura 11.5.1). Por exemplo, consi-




Uma única reta $L$ passa por $P_0$ e é paralela a $\mathbf{v}$.

**Figura 11.5.1**

dere uma reta $L$ do espaço tridimensional que passe pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e seja paralela ao vetor não nulo $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$. Então, $L$ consiste precisamente naqueles pontos $P(x, y, z)$ para os quais o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo a $\mathbf{v}$ (Figura 11.5.2). Em outras palavras, o ponto $P(x, y, z)$ está na reta $L$ se, e somente se, $\overrightarrow{P_0P}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{v}$, digamos

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$$

Essa equação pode ser escrita como

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = \langle ta, tb, tc\rangle$$

o que implica que

$$x - x_0 = ta, \quad y - y_0 = tb, \quad z - z_0 = tc$$

Assim, $L$ pode ser descrita pelas equações paramétricas

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

Uma descrição análoga aplica-se a retas no espaço bidimensional. Resumimos essas descrições no seguinte teorema.

**11.5.1 TEOREMA**

(*a*) *A reta no espaço bidimensional que passa pelo ponto* $P_0(x_0, y_0)$ *e é paralela ao vetor não nulo* $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ *tem equações paramétricas*

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt \tag{1}$$

(*b*) *A reta no espaço tridimensional que passa pelo ponto* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *e é paralela ao vetor não nulo* $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ *tem equações paramétricas*

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct \tag{2}$$

**OBSERVAÇÃO** Embora não esteja explicitado, entenda-se nas Equações (1) e (2) que $-\infty < t < +\infty$, o que reflete o fato de que retas se estendem indefinidamente.

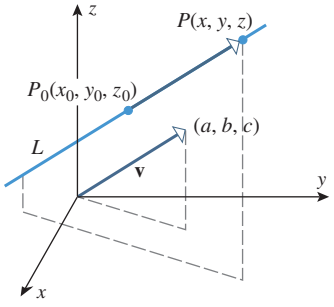



**Figura 11.5.2**

**► Exemplo 1** Encontre equações paramétricas da reta que passa

(a) por (4, 2) e é paralela a $\mathbf{v} = \langle -1, 5\rangle$;

(b) por (1, 2, −3) e é paralela a $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$;

(c) pela origem do espaço tridimensional e é paralela a $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1\rangle$.

***Solução (a)*** Por (1), com $x_0 = 4$, $y_0 = 2$, $a = -1$ e $b = 5$, obtemos

$$x = 4 - t, \quad y = 2 + 5t$$

***Solução (b)*** Por (2), obtemos

$$x = 1 + 4t, \quad y = 2 + 5t, \quad z = -3 - 7t$$

***Solução (c)*** Por (2), com $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, obtemos

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t \quad \blacktriangleleft$$

**► Exemplo 2**

(a) Encontre equações paramétricas da reta $L$ que passa pelos pontos $P_1(2, 4, -1)$ e $P_2(5, 0, 7)$.

(b) Em que ponto essa reta intersecta o plano $xy$?

***Solução (a)*** O vetor $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 3, -4, 8\rangle$ é paralelo a $L$, e o ponto $P_1(2, 4, -1)$ está em $L$, de modo que, por (2), $L$ tem equações paramétricas

$$x = 2 + 3t, \quad y = 4 - 4t, \quad z = -1 + 8t \tag{3}$$

Se tivéssemos utilizado $P_2$ como o ponto de $L$ em vez de $P_1$, teríamos obtido as equações

$$x = 5 + 3t, \quad y = -4t, \quad z = 7 + 8t$$

Embora essas equações pareçam diferentes das obtidas usando $P_1$, os dois conjuntos de equações realmente são equivalentes, no sentido de que ambos geram a mesma reta $L$ quando $t$ varia de $-\infty$ a $+\infty$. Para ver isso, observe que se $t_1$ fornecer um ponto

$$(x, y, z) = (2 + 3t_1, 4 - 4t_1, -1 + 8t_1)$$

de $L$ usando o primeiro conjunto de equações, então $t_2 = t_1 - 1$ dará o *mesmo* ponto

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (5 + 3t_2, -4t_2, 7 + 8t_2)\\ &= (5 + 3(t_1 - 1), -4(t_1 - 1), 7 + 8(t_1 - 1))\\ &= (2 + 3t_1, 4 - 4t_1, -1 + 8t_1)\end{aligned}$$

de $L$ usando o segundo conjunto de equações. Reciprocamente, se $t_2$ fornecer um ponto de $L$ usando o segundo conjunto de equações, então $t_1 = t_2 + 1$ fornecerá o mesmo ponto usando o primeiro conjunto.

***Solução (b)*** Segue de (3) na parte (a) que a reta intersecta o plano $xy$ no ponto em que $z = -1 + 8t = 0$, ou seja, com $t = \frac{1}{8}$. Substituindo esse valor de $t$ em (3), obtemos o ponto de interseção $(x, y, z) = \left(\frac{19}{8}, \frac{7}{2}, 0\right)$. ◄

**► Exemplo 3** Sejam $L_1$ e $L_2$ as retas

$$\begin{aligned}L_1&: x = 1 + 4t, \quad y = 5 - 4t, \quad z = -1 + 5t\\ L_2&: x = 2 + 8t, \quad y = 4 - 3t, \quad z = 5 + t\end{aligned}$$

(a) As retas são paralelas?

(b) As retas se intersectam?

***Solução (a)*** A reta $L_1$ é paralela ao vetor $4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ e a reta $L_2$ é paralela ao vetor $8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Esses vetores não são paralelos, uma vez que nenhum é um múltiplo escalar do outro. Desse modo, as retas não são paralelas.

***Solução (b)*** Para $L_1$ e $L_2$ intersectar em algum ponto $(x_0, y_0, z_0)$, essas coordenadas teriam que satisfazer as equações de ambas as retas. Em outras palavras, teriam que existir valores $t_1$ e $t_2$ para os parâmetros tais que

$$x_0 = 1 + 4t_1, \quad y_0 = 5 - 4t_1, \quad z_0 = -1 + 5t_1$$

e

$$x_0 = 2 + 8t_2, \quad y_0 = 4 - 3t_2, \quad z_0 = 5 + t_2$$

Isso leva a três condições em $t_1$ e $t_2$,

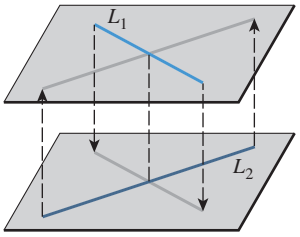
$$\begin{aligned} 1 + 4t_1 &= 2 + 8t_2 \\ 5 - 4t_1 &= 4 - 3t_2 \\ -1 + 5t_1 &= 5 + t_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Assim, as retas intersectam se houver valores de $t_1$ e $t_2$ que satisfaçam todas as três equações, e as retas não intersectam se não houver tais valores. O leitor deve estar familiarizado com os métodos para resolver sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas. Porém, esse é um sistema de três equações lineares com duas incógnitas. Para determinar se esse sistema tem solução, resolveremos as duas primeiras equações para $t_1$ e $t_2$ e, então, verificamos se esses valores satisfazem a terceira equação.

Resolveremos as duas primeiras equações pelo método de eliminação. Podemos eliminar a incógnita $t_1$ somando as equações. Disso resulta a equação

$$6 = 6 + 5t_2$$

da qual obtemos $t_2 = 0$. Podemos encontrar $t_1$ substituindo esse valor de $t_2$ ou na primeira equação ou na segunda. Disso resulta $t_1 = \frac{1}{4}$. Entretanto, os valores $t_1 = \frac{1}{4}$ e $t_2 = 0$ não satisfazem a terceira equação em (4), logo as retas não intersectam. ◀




Os planos paralelos contendo retas reversas $L_1$ e $L_2$ podem ser determinados transladando cada reta até que uma intersecte a outra.

**Figura 11.5.3**

Duas retas no espaço tridimensional que não sejam paralelas e não intersectem (como as do Exemplo 3) são chamadas de retas ***reversas***. Conforme ilustrado na Figura 11.5.3, quaisquer duas retas reversas situam-se em planos paralelos.

## SEGMENTOS DE RETAS

Às vezes, não estamos interessados na reta inteira, mas mais exatamente em algum *segmento* de uma reta. As equações paramétricas de um segmento de reta podem ser obtidas determinando as equações paramétricas para a reta inteira e, então, restringindo o parâmetro apropriadamente de modo que seja gerado somente o segmento desejado.

**► Exemplo 4** Determine as equações paramétricas para o segmento de reta que une os pontos $P_1(2, 4, -1)$ e $P_2(5, 0, 7)$.

***Solução*** Do Exemplo 2, a reta que passa pelos pontos $P_1$ e $P_2$ tem as equações paramétricas $x = 2 + 3t$, $y = 4 - 4t$, $z = -1 + 8t$. Com essas equações, o ponto $P_1$ corresponde a $t = 0$ e $P_2$ corresponde a $t = 1$. Assim, o segmento de reta que une $P_1$ e $P_2$ é dado por

$$x = 2 + 3t, \quad y = 4 - 4t, \quad z = -1 + 8t \qquad (0 \le t \le 1)$$ ◀

## EQUAÇÕES VETORIAIS DAS RETAS

Agora, mostraremos como a notação vetorial pode ser usada para expressar as equações paramétricas de uma reta mais compactamente. Como dois vetores são iguais se, e somente se, seus componentes forem iguais, (1) e (2) podem ser escritos na forma vetorial como

$$\langle x, y \rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt \rangle$$
$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \rangle$$

ou, de modo equivalente, como

$$\langle x, y \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle + t\langle a, b \rangle \tag{5}$$
$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle \tag{6}$$

Para a equação no espaço bidimensional, definimos os vetores $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{r} = \langle x, y\rangle, \quad \mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle a, b\rangle \tag{7}$$

e para a equação no espaço tridimensional, definimo-los como

$$\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle, \quad \mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle \tag{8}$$

Substituindo (7) e (8) em (5) e (6), respectivamente, obtém-se a equação

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{9}$$

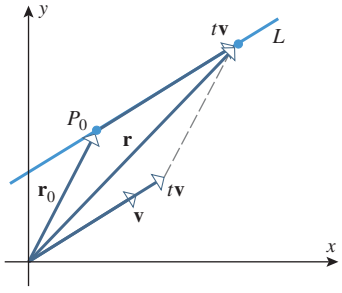



**Figura 11.5.4**

em ambos os casos. Chamaremos essa equação de ***equação vetorial da reta*** no espaço bi ou tridimensional. Nessa equação, $\mathbf{v}$ é um vetor não nulo paralelo à reta e $\mathbf{r}_0$ é um vetor cujos componentes são as coordenadas de um ponto da reta.

Podemos interpretar a Equação (9) geometricamente posicionando os vetores $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}$ com seus pontos iniciais na origem e o vetor $t\mathbf{v}$ com seu ponto inicial em $P_0$ (Figura 11.5.4). O vetor $t\mathbf{v}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{v}$ e, portanto, é paralelo a $\mathbf{v}$ e $L$. Além disso, uma vez que o ponto inicial de $t\mathbf{v}$ é o ponto $P_0$ em $L$, esse vetor, de fato, está em $L$; portanto, o vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ pode ser interpretado como o vetor que parte da origem a um ponto em $L$. Quando o parâmetro $t$ varia de 0 a $+\infty$, o ponto final de $\mathbf{r}$ descreve a parte de $L$ que se estende de $P_0$ na direção de $\mathbf{v}$, e quando $t$ varia de 0 a $-\infty$, o ponto final de $\mathbf{r}$ descreve a parte de $L$ que se estende de $P_0$ no sentido oposto a $\mathbf{v}$. Assim, a reta inteira é traçada quando $t$ varia sobre o intervalo $(-\infty, +\infty)$, sendo traçada na direção e sentido de $\mathbf{v}$ quando $t$ cresce.

**► Exemplo 5** A equação

$$\langle x, y, z\rangle = \langle -1, 0, 2\rangle + \mathrm{t}\langle 1, 5, -4\rangle$$

é da forma (9) com

$$\mathbf{r}_0 = \langle -1, 0, 2\rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \langle 1, 5, -4\rangle$$

Desse modo, a equação representa a reta no espaço tridimensional que passa pelo ponto $(-1, 0, 2)$ e é paralela ao vetor $\langle 1, 5, -4\rangle$. ◄

**► Exemplo 6** Determine uma equação da reta no espaço tridimensional que passa pelos pontos $P_1(2, 4, -1)$ e $P_2(5, 0, 7)$.

***Solução*** O vetor

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 3, -4, 8\rangle$$

é paralelo à reta, logo pode ser usado como vetor $\mathbf{v}$ em (9). Para $\mathbf{r}_0$, podemos usar o vetor que vai da origem a $P_1$ ou o vetor que vai da origem a $P_2$. Usando o primeiro, obtém-se

$$\mathbf{r}_0 = \langle 2, 4, -1\rangle$$

Assim, uma equação vetorial da reta que passa em $P_1$ e $P_2$ é

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 2, 4, -1\rangle + t\langle 3, -4, 8\rangle$$

Caso necessário, podemos expressar a reta parametricamente igualando os correspondentes componentes dos dois lados dessa equação vetorial; nesse caso, obtemos as equações paramétricas do Exemplo 2 (verifique). ◄

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.5 (Ver página 812 para respostas.)

**1.** Seja $L$ a reta que passa por $(2, 5)$ e que é paralela a $\mathbf{v} = \langle 3, -1\rangle$.
(a) Equações paramétricas de $L$ são

$$x = _____ \quad y = _____$$

(b) Uma equação vetorial de $L$ é $(x, y) = _____$.

**2.** Equações paramétricas da reta que passa por $(5, 3, 7)$ e é paralela à reta $x = 3 - t$, $y = 2$, $z = 8 + 4t$ são

$$x = _____, \quad y = _____, \quad z = _____$$

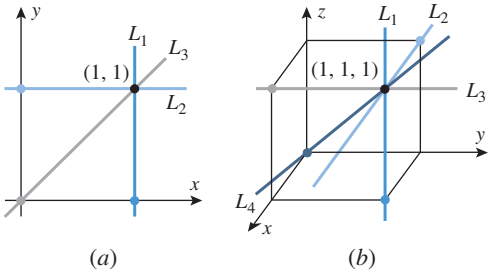
**3.** Equações paramétricas do segmento de reta ligando os pontos $(3, 0, 11)$ e $(2, 6, 7)$ são

$$x = _____, y = _____, z = _____ (_____)$$

**4.** A reta que passa pelos pontos $(-3, 8, -4)$ e $(1, 0, 8)$ intersecta o plano $yz$ no ponto _____.

## EXERCÍCIOS 11.5 Recurso Gráfico C CAS

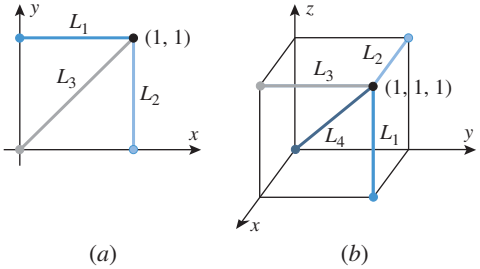
**1.** (a) Determine equações paramétricas das retas que passam pelo canto do quadrado unitário mostradas na parte $(a)$ da figura a seguir.
(b) Determine equações paramétricas das retas que passam pelo canto do cubo unitário mostradas na parte $(b)$ da figura a seguir.




$(a)$ $(b)$

**Figura Ex-1**

**2.** (a) Determine equações paramétricas dos segmentos de reta do quadrado unitário mostrados na parte $(a)$ da figura a seguir.
(b) Determine as equações paramétricas dos segmentos de reta no cubo unitário, mostrados na parte $(b)$ da figura a seguir.




$(a)$ $(b)$

**Figura Ex-2**

**3-4** Obtenha equações paramétricas para a reta que passa pelos pontos $P_1$ e $P_2$ e também para o segmento de reta ligando esses pontos. ■

**3.** (a) $P_1(3, -2)$, $P_2(5, 1)$ (b) $P_1(5, -2, 1)$, $P_2(2, 4, 2)$

**4.** (a) $P_1(0, 1)$, $P_2(-3, -4)$
(b) $P_1(-1, 3, 5)$, $P_2(-1, 3, 2)$

**5-6** Obtenha equações paramétricas para a reta cuja equação vetorial é dada. ■

**5.** (a) $\langle x, y\rangle = \langle 2, -3\rangle + t\langle 1, -4\rangle$
(b) $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{k} + t(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$

**6.** (a) $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) + t(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$
(b) $\langle x, y, z\rangle = \langle -1, 0, 2\rangle + t\langle -1, 3, 0\rangle$

**7-8** Sem fazer contas, obtenha um ponto $P$ da reta e um vetor $\mathbf{v}$ paralelo à reta. ■

**7.** (a) $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) + t(4\mathbf{i} - \mathbf{j})$
(b) $\langle x, y, z\rangle = \langle -1, 2, 4\rangle + t\langle 5, 7, -8\rangle$

**8.** (a) $\langle x, y\rangle = \langle -1, 5\rangle + t\langle 2, 3\rangle$
(b) $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + t\mathbf{j}$

**9-10** Expresse as equações paramétricas dadas da reta na forma vetorial usando a notação com $\langle , \rangle$ e também usando a notação $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. ■

**9.** (a) $x = -3 + t$, $y = 4 + 5t$
(b) $x = 2 - t$, $y = -3 + 5t$, $z = t$

**10.** (a) $x = t$, $y = -2 + t$
(b) $x = 1 + t$, $y = -7 + 3t$, $z = 4 - 5t$

**11-14 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. Nestes exercícios, $L_0$ e $L_1$ são retas no espaço de equações paramétricas

$$L_0: x = x_0 + a_0t, \quad y = y_0 + b_0t, \quad z = z_0 + c_0t$$

$$L_1: x = x_1 + a_1t, \quad y = y_1 + b_1t, \quad z = z_1 + c_1t \ ■$$

**11.** Por definição, se $L_1$ e $L_2$ não intersectarem, então $L_1$ e $L_2$ são paralelas.

**12.** Se $L_1$ e $L_2$ forem paralelas, então $\mathbf{v}_0 = \langle a_0, b_0, c0\rangle$ será um múltiplo escalar de $\mathbf{v}_1 = \langle a_1, b_1, c_1\rangle$.

**13.** Se $L_1$ e $L_2$ intersectarem num ponto $(x, y, z)$, então existe exatamente um valor de $t$ tal que valham

$$L_0: x = x_0 + a_0t, \quad y = y_0 + b_0t, \quad z = z_0 + c_0t$$

$$L_1: x = x_1 + a_1t, \quad y = y_1 + b_1t, \quad z = z_1 + c_1t$$

**14.** Se $L_0$ passar pela origem, então os vetores $\langle a_0, b_0, c_0\rangle$ e $\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ serão paralelos.

**15-22** Obtenha equações paramétricas da reta que satisfaz as condições dadas. ■

**15.** A reta que passa por $(-5, 2)$ e é paralela a $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

**16.** A reta que passa por $(0, 3)$ e é paralela à reta $x = -5 + t$, $y = 1 - 2t$.

**17.** A reta que é tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, -4)$.

**18.** A reta que é tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(-2, 4)$.

**19.** A reta que passa por $(-1, 2, 4)$ e é paralela a $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

**20.** A reta que passa por $(2, -1, 5)$ e é paralela a $\langle -1, 2, 7\rangle$.

**21.** A reta que passa por $(-2, 0, 5)$ e é paralela à reta $x = 1 + 2t$, $y = 4 - t$, $z = 6 + 2t$.

**22.** A reta que passa pela origem e é paralela à reta $x = t$, $y = -1 + t$, $z = 2$.

**23.** Em que ponto a reta $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$ intersecta
(a) o eixo $x$ (b) o eixo $y$
(c) a parábola $y = x^2$?

**24.** Em que ponto a reta $\langle x, y\rangle = \langle 4t, 3t\rangle$ intersecta o círculo $x^2 + y^2 = 25$?

**25-26** Encontre as interseções das retas com o plano $xy$, o plano $xz$ e o plano $yz$. ■

**25.** $x = -2,\ y = 4 + 2t,\ z = -3 + t$

**26.** $x = -1 + 2t,\ y = 3 + t,\ z = 4 - t$

**27.** Em que ponto a reta $x = 1 + t$, $y = 3 - t$, $z = 2t$ intersecta o cilindro $x^2 + y^2 = 16$?

**28.** Em que ponto a reta $x = 2 - t$, $y = 3t$, $z = -1 + 2t$ intersecta o plano $2y + 3z = 6$?

**29-30** Mostre que as retas $L_1$ e $L_2$ intersectam e determine seu ponto de interseção. ■

**29.** $L_1$: $x = 2 + t,\ y = 2 + 3t,\ z = 3 + t$
$L_2$: $x = 2 + t,\ y = 3 + 4t,\ z = 4 + 2t$

**30.** $L_1$: $x + 1 = 4t,\ y - 3 = t,\ z - 1 = 0$
$L_2$: $x + 13 = 12t,\ y - 1 = 6t,\ z - 2 = 3t$

**31-32** Mostre que as retas $L_1$ e $L_2$ são reversas. ■

**31.** $L_1$: $x = 1 + 7t,\ y = 3 + t,\ z = 5 - 3t$
$L_2$: $x = 4 - t,\ y = 6,\ z = 7 + 2t$

**32.** $L_1$: $x = 2 + 8t,\ y = 6 - 8t,\ z = 10t$
$L_2$: $x = 3 + 8t,\ y = 5 - 3t,\ z = 6 + t$

**33-34** Determine se as retas $L_1$ e $L_2$ são paralelas. ■

**33.** $L_1$: $x = 3 - 2t,\ y = 4 + t,\ z = 6 - t$
$L_2$: $x = 5 - 4t,\ y = -2 + 2t,\ z = 7 - 2t$

**34.** $L_1$: $x = 5 + 3t,\ y = 4 - 2t,\ z = -2 + 3t$
$L_2$: $x = -1 + 9t,\ y = 5 - 6t,\ z = 3 + 8t$

**35-36** Determine se os pontos $P_1$ e $P_2$ e $P_3$ situam-se na mesma reta. ■

**35.** $P_1\,(6, 9, 7),\ P_2(9, 2, 0),\ P_3(0, -5, -3)$

**36.** $P_1\,(1, 0, 1),\ P_2(3, -4, -3),\ P_3(4, -6, -5)$

**37-38** Mostre que as retas $L_1$ e $L_2$ são iguais. ■

**37.** $L_1$: $x = 3 - t,\ y = 1 + 2t$
$L_2$: $x = -1 + 3t,\ y = 9 - 6t$

**38.** $L_1$: $x = 1 + 3t,\ y = -2 + t,\ z = 2t$
$L_2$: $x = 4 - 6t,\ y = -1 - 2t,\ z = 2 - 4t$

## ENFOCANDO CONCEITOS

**39.** Esboce os vetores $\mathbf{r}_0 = \langle -1, 2\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$ e depois esboce os seis vetores $\mathbf{r}_0 \pm \mathbf{v}$, $\mathbf{r}_0 \pm 2\mathbf{v}$, $\mathbf{r}_0 \pm 3\mathbf{v}$. Trace a reta $L$: $x = -1 + t$, $y = 2 + t$ e descreva a relação entre $L$ e os vetores esboçados. Qual é a equação vetorial de $L$?

**40.** Esboce os vetores $\mathbf{r}_0 = \langle 0, 2, 1\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 1, 0, 1\rangle$ e depois esboce os vetores $\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}$, $\mathbf{r}_0 + 2\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}_0 + 3\mathbf{v}$. Trace a reta $L$: $x = t$, $y = 2$, $z = 1 + t$ e descreva a relação entre $L$ e os vetores esboçados. Qual é a equação vetorial de $L$?

**41.** Esboce os vetores $\mathbf{r}_0 = \langle -2, 0\rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 1, 3\rangle$ e depois esboce os vetores

$$\tfrac{1}{3}\mathbf{r}_0 + \tfrac{2}{3}\mathbf{r}_1, \quad \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_0 + \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_1, \quad \tfrac{2}{3}\mathbf{r}_0 + \tfrac{1}{3}\mathbf{r}_1$$

Trace o segmento de reta $(1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$ $(0 \le t \le 1)$. Se $n$ for um inteiro positivo, qual é a posição do ponto desse segmento de reta que corresponde a $t = 1/n$, relativamente aos pontos $(-2, 0)$ e $(1, 3)$?

**42.** Esboce os vetores $\mathbf{r}_0 = \langle 2, 0, 4\rangle$ e $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 4, 0\rangle$ e depois esboce os vetores

$$\tfrac{1}{4}\mathbf{r}_0 + \tfrac{3}{4}\mathbf{r}_1, \quad \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_0 + \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_1, \quad \tfrac{3}{4}\mathbf{r}_0 + \tfrac{1}{4}\mathbf{r}_1$$

Trace o segmento de reta $(1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$ $(0 \le t \le 1)$. Se $n$ for um inteiro positivo, qual é a posição do ponto desse segmento de reta que corresponde a $t = 1/n$, relativamente aos pontos $(2, 0, 4)$ e $(0, 4, 0)$?

**43-44** Descreva o segmento de reta representado pela equação vetorial. ■

**43.** $\langle x, y\rangle = \langle 1, 0\rangle + t\,\langle -2, 3\rangle \quad (0 \le t \le 2)$

**44.** $\langle x, y, z\rangle = \langle -2, 1, 4\rangle + t\,\langle 3, 0, -1\rangle \quad (0 \le t \le 3)$

**45.** Determine o ponto do segmento que une $P_1(3, 6)$ e $P_2(8, -4)$ que está a $\frac{2}{5}$ do caminho de $P_1$ a $P_2$.

**46.** Determine o ponto do segmento que une $P_1(1, 4, -3)$ e $P_2(1, 5, -1)$ que está a $\frac{2}{3}$ do caminho de $P_1$ a $P_2$.

**47-48** Use o método do Exercício 32 da Seção 11.3 para determinar a distância do ponto $P$ à reta $L$ e, então, confira sua resposta usando o método do Exercício 30 da Seção 11.4. ■

**47.** $P(-2, 1, 1)$
$L$: $x = 3 - t,\ y = t,\ z = 1 + 2t$

**48.** $P(1, 4, -3)$
$L$: $x = 2 + t,\ y = -1 - t,\ z = 3t$

**49-50** Mostre que as retas $L_1$ e $L_2$ são paralelas e determine a distância entre elas. ■

**49.** $L_1$: $x = 2 - t$, $y = 2t$, $z = 1 + t$
$L_2$: $x = 1 + 2t$, $y = 3 - 4t$, $z = 5 - 2t$

**50.** $L_1$: $x = 2t$, $y = 3 + 4t$, $z = 2 - 6t$
$L_2$: $x = 1 + 3t$, $y = 6t$, $z = -9t$

**51.** (a) Obtenha equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $(x_0, y_0, z_0)$ e $(x_1, y_1, z_1)$.
(b) Obtenha equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(x_1, y_1, z_1)$ e é paralela à reta

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

**52.** Seja $L$ a reta que passa pelo ponto $(x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, onde $a$, $b$ e $c$ são não nulos. Mostre que um ponto $(x, y, z)$ situa-se na reta $L$ se e somente se

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Essas equações, que são chamadas de ***equações simétricas*** de $L$, fornecem uma representação não paramétrica de $L$.

**53.** (a) Descreva a reta cujas equações simétricas são

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{4} = z - 5$$

[Ver Exercício 52.]
(b) Obtenha equações paramétricas para a reta da parte (a).

**54.** Considere as retas $L_1$ e $L_2$ cujas equações simétricas são

$$L_1: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + \frac{3}{2}}{1} = \frac{z + 1}{2}$$

$$L_2: \frac{x - 4}{-1} = \frac{y - 3}{-2} = \frac{z + 4}{2}$$

[Ver Exercício 52.]
(a) $L_1$ e $L_2$ são paralelas? Perpendiculares?
(b) Obtenha equações paramétricas para $L_1$ e $L_2$.
(c) $L_1$ e $L_2$ intersectam? Em caso afirmativo, em que ponto?

**55.** Sejam $L_1$ e $L_2$ as retas cujas equações paramétricas são

$$L_1 : x = 1 + 2t, \quad y = 2 - t, \quad z = 4 - 2t$$
$$L_2 : x = 9 + t, \quad y = 5 + 3t, \quad z = -4 - t$$

(a) Mostre que $L_1$ e $L_2$ intersectam no ponto $(7, -1, -2)$.
(b) Determine, até o grau mais próximo, o ângulo agudo entre $L_1$ e $L_2$ em seu ponto de interseção.
(c) Obtenha as equações paramétricas para a reta que é perpendicular a $L_1$ e $L_2$ e que passa no seu ponto de interseção.

**56.** Sejam $L_1$ e $L_2$ as retas cujas equações paramétricas são

$$L_1 : x = 4t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 2 + 2t$$
$$L_2 : x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = -1 + 4t$$

(a) Mostre que $L_1$ e $L_2$ intersectam no ponto $(2, 0, 3)$.
(b) Determine, até o grau mais próximo, o ângulo agudo entre $L_1$ e $L_2$ em seu ponto de interseção.
(c) Obtenha equações paramétricas para a reta que é perpendicular a $L_1$ e $L_2$ e que passa no seu ponto de interseção.

**57-58** Encontre equações paramétricas da reta que contém o ponto $P$ e intersecta a reta $L$ em um ângulo reto e encontre a distância entre $P$ e $L$. ■

**57.** $P(0, 2, 1)$
$L$: $x = 2t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + t$

**58.** $P(3, 1, -2)$
$L$: $x = -2 + 2t$, $y = 4 + 2t$, $z = 2 + t$

**59.** Dois besouros estão andando sobre retas no espaço tridimensional. No instante $t$, o besouro 1 está no ponto $(x, y, z)$ sobre a reta

$$x = 4 - t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 2 + t$$

e, no mesmo instante $t$, o besouro 2 está no ponto $(x, y, z)$ sobre a reta

$$x = t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1 + 2t$$

Suponha que a distância esteja em centímetros e o tempo, em minutos.
(a) Determine a distância entre os besouros no instante $t = 0$.
(b) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico da distância entre os besouros como uma função do tempo de $t = 0$ a $t = 5$.
(c) O que o gráfico nos diz sobre a distância entre os besouros?
(d) Quão perto ficam os besouros?

**60.** Suponha que a temperatura $T$ em um ponto $(x, y, z)$ sobre a reta $x = t$, $y = 1 + t$, $z = 3 - 2t$ seja $T = 25\,x^2yz$. Use um CAS ou uma calculadora com a capacidade de encontrar raízes para aproximar a temperatura máxima na parte da reta que se estende do plano $xz$ ao plano $xy$.

**61.** **Texto** Dê alguns exemplos de problemas geométricos que possam ser resolvidos usando as equações paramétricas de uma reta e descreva suas soluções. Por exemplo, como poderíamos encontrar os pontos de interseção de uma reta e uma esfera?

**62.** **Texto** Discuta como a equação vetorial de uma reta pode ser usada para modelar o movimento no espaço tridimensional de um ponto com velocidade constante.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.5

**1.** (a) $2 + 3t$; $5 - t$ (b) $\langle 2, 5 \rangle + t\,\langle 3, -1 \rangle$ **2.** $5 - t$; $3$; $7 + 4t$ **3.** $3 - t$; $6t$; $11 - 4t$; $0 \le t \le 1$ **4.** $(0, 2, 5)$

# 11.6 PLANOS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

*Nesta seção, usaremos vetores para deduzir equações de planos no espaço tridimensional e, então, usaremos essas equações para resolver vários problemas geométricos.*

## PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS

O gráfico da equação $x = a$ no sistema de coordenadas $xyz$ consiste em todos os pontos da forma $(a, y, z)$, onde $y$ e $z$ são arbitrários. Um desses pontos é $(a, 0, 0)$, e todos os outros estão no plano que passa por esse ponto e é paralelo ao plano $yz$ (Figura 11.6.1). Analogamente, o gráfico de $y = b$ é o plano que passa por $(0, b, 0)$ e é paralelo ao plano $xz$, e o gráfico de $z = c$ é o plano que passa por $(0, 0, c)$ e é paralelo ao plano $xy$.

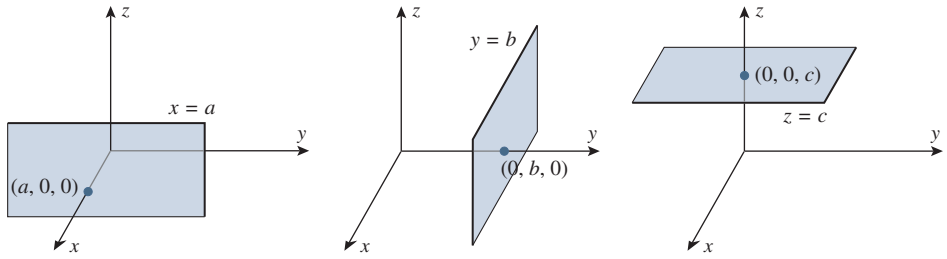
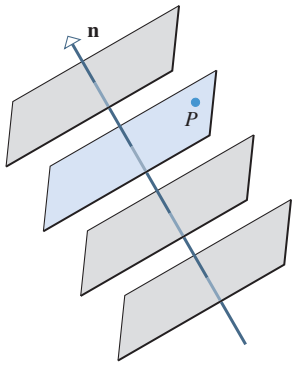



**Figura 11.6.1**




O plano azul é determinado de modo único pelo ponto $P$ e pelo vetor $\mathbf{n}$ perpendicular ao plano.

**Figura 11.6.2**

## PLANOS DETERMINADOS POR UM PONTO E UM VETOR NORMAL

Um plano no espaço tridimensional pode ser determinado de modo único especificando um ponto no plano e um vetor perpendicular ao plano (Figura 11.6.2). Um vetor perpendicular a um plano é chamado de ***normal*** ao plano.

Suponha que queiramos determinar uma equação do plano que passa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e que seja perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$. Definimos os vetores $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}$ como

$$\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$$

Deve ser evidente, a partir da Figura 11.6.3, que o plano consiste precisamente nos pontos $P(x, y, z)$ com os quais o vetor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ é ortogonal a $\mathbf{n}$; ou, expresso como uma equação,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \tag{1}$$

Se preferirmos, podemos expressar essa equação vetorial em termos dos componentes como

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0 \tag{2}$$

da qual obtemos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3}$$

Essa é a chamada ***forma ponto-normal*** da equação de um plano. As Fórmulas (1) e (2) são as versões vetoriais dessa fórmula.

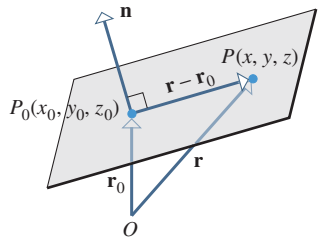



**Figura 11.6.3**

O que a Equação (1) representa se

$\mathbf{n} = \langle a, b\rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0\rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle$

forem vetores no plano $xy$ do espaço bidimensional? Faça uma figura.

**► Exemplo 1** Determine uma equação do plano que passa pelo ponto $(3, -1, 7)$ e é perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = \langle 4, 2, -5\rangle$.

***Solução*** De (3), uma forma ponto-normal da equação é

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0 \tag{4}$$

Se preferirmos, essa equação pode ser escrita na forma vetorial como

$$\langle 4, 2, -5\rangle \cdot \langle x-3, y+1, z-7\rangle = 0 \quad \blacktriangleleft$$

Observe que se efetuarmos a multiplicação indicada em (3) e simplificarmos, obteremos uma equação da forma

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{5}$$

Por exemplo, a Equação (4) do Exemplo 1 pode ser reescrita como

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

O teorema a seguir mostra que toda equação da forma (5) representa um plano no espaço tridimensional.

**11.6.1 TEOREMA** *Se $a$, $b$, $c$ e $d$ forem constantes e se $a$, $b$ e $c$ não forem todas nulas, então o gráfico da equação*

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{6}$$

*é um plano que tem o vetor $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ como normal.*

**DEMONSTRAÇÃO** Como $a$, $b$ e $c$ não são todas nulas, há, no mínimo, um ponto $(x_0, y_0, z_0)$ cujas coordenadas satisfaçam a Equação (6). Por exemplo, se $a \neq 0$, então um tal ponto é $(-d/a, 0, 0)$, e analogamente se $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ (verifique). Assim, seja $(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer cujas coordenadas satisfaçam (6); isto é,

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

Subtraindo essa equação de (6) obtemos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

que é a forma ponto-normal de um plano com normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$. ■

A Equação (6) é denominada de ***forma geral*** da equação de um plano.

**▶ Exemplo 2** Determine se os planos

$$3x - 4y + 5z = 0 \quad \text{e} \quad -6x + 8y - 10z - 4 = 0$$

são paralelos.

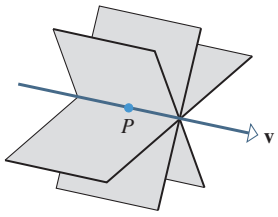
***Solução*** É claro que, geometricamente, dois planos são paralelos se, e somente se, seus vetores normais forem paralelos. Um vetor normal para o primeiro plano é

$$\mathbf{n}_1 = \langle 3, -4, 5\rangle$$

e um vetor normal para o segundo plano é

$$\mathbf{n}_2 = \langle -6, 8, -10\rangle$$

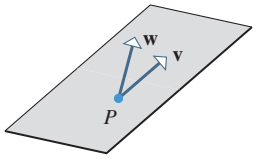
Como $\mathbf{n}_2$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{n}_1$, os vetores normais são paralelos e, portanto, os planos são paralelos. ◀




Há uma infinidade de planos contendo $P$ e paralelos a $\mathbf{v}$.

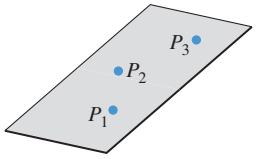
**Figura 11.6.4**

Vimos que um plano único é determinado por um ponto no plano e um vetor não nulo normal ao plano. Em contrapartida, um plano não é determinado por um ponto no plano e um vetor não nulo *paralelo* ao plano (Figura 11.6.4). Contudo, um plano único é deter-




Há um único plano que passa por $P$ que é paralelo a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

**Figura 11.6.5**




Há um único plano que passa por três pontos não colineares.

**Figura 11.6.6**

minado por um ponto no plano e dois vetores não paralelos que sejam paralelos ao plano (Figura 11.6.5). Um plano único é determinado também por três pontos não colineares que se situem no plano (Figura 11.6.6).

**▶ Exemplo 3** Determine uma equação do plano que passa pelos pontos $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$ e $P_3(3, -1, 2)$.

***Solução*** Como os pontos $P_1$, $P_2$ e $P_3$ situam-se no plano, os vetores $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 1, 1, 2\rangle$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = \langle 2, -3, 3\rangle$ são paralelos ao plano. Portanto,

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 9\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

é normal ao plano, uma vez que é perpendicular a $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$. Usando este vetor normal e o ponto $P_1(1, 2, -1)$ no plano, obtemos a forma ponto-normal

$$9(x - 1) + (y - 2) - 5(z + 1) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$9x + y - 5z - 16 = 0 \quad \blacktriangleleft$$

**▶ Exemplo 4** Determine se a reta

$$x = 3 + 8t, \quad y = 4 + 5t, \quad z = -3 - t$$

é paralela ao plano $x - 3y + 5z = 12$.

***Solução*** O vetor $\mathbf{v} = \langle 8, 5, -1\rangle$ é paralelo à reta, e o vetor $\mathbf{n} = \langle 1, -3, 5\rangle$ é normal ao plano. Para a reta e o plano serem paralelos, os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$ devem ser ortogonais. Contudo, isso não acontece, uma vez que o produto escalar

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (8)(1) + (5)(-3) + (-1)(5) = -12$$

é não nulo. Assim, a reta e o plano não são paralelos. $\blacktriangleleft$

**▶ Exemplo 5** Encontre o ponto de interseção da reta e do plano do Exemplo 4.

***Solução*** Se tomarmos $(x_0, y_0, z_0)$ como sendo o ponto de interseção, então as coordenadas desse ponto satisfazem a equação do plano e as equações paramétricas da reta. Assim,

$$x_0 - 3y_0 + 5z_0 = 12 \tag{7}$$

e para algum valor de $t$, digamos $t = t_0$,

$$x_0 = 3 + 8t_0, \quad y_0 = 4 + 5t_0, \quad z_0 = -3 - t_0 \tag{8}$$

Substituindo (8) em (7), obtemos

$$(3 + 8t_0) - 3(4 + 5t_0) + 5(-3 - t_0) = 12$$

Resolvendo para $t_0$, obtemos $t_0 = -3$ e substituindo esse valor em (8), obtemos

$$(x_0, y_0, z_0) = (-21, -11, 0) \quad \blacktriangleleft$$

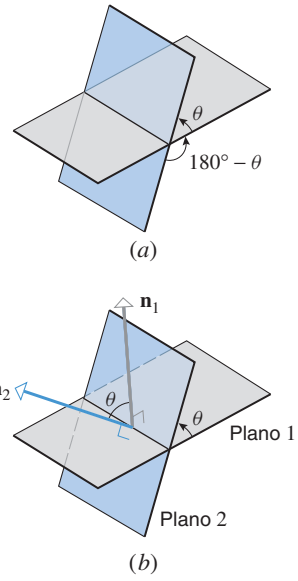



**Figura 11.6.7**

## PLANOS CONCORRENTES

Dois planos distintos concorrentes determinam dois ângulos positivos de interseção – um ângulo (agudo) $\theta$ que satisfaz a condição $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e o suplementar desse ângulo (Figura 11.6.7*a*). Se $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ forem normais aos planos, então, dependendo do sentido de $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$, o ângulo $\theta$ é ou o ângulo entre $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ ou entre $\mathbf{n}_1$ e $-\mathbf{n}_2$ (Figura 11.6.7*b*). Em ambos os casos, do Teorema 11.3.3 resulta a seguinte fórmula para o *ângulo agudo $\theta$ entre os planos*:

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\|\|\mathbf{n}_2\|} \tag{9}$$

**▶ Exemplo 6** Determine o ângulo agudo da interseção dos planos

$$2x - 4y + 4z = 6 \quad \text{e} \quad 6x + 2y - 3z = 4$$

***Solução*** Das equações dadas resultam os vetores normais $\mathbf{n}_1 = \langle 2, -4, 4\rangle$ e $\mathbf{n}_2 = \langle 6, 2, -3\rangle$. Desse modo, da Fórmula (9) resulta

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\|\,\|\mathbf{n}_2\|} = \frac{|-8|}{\sqrt{36}\sqrt{49}} = \frac{4}{21}$$

da qual obtemos

$$\theta = \arccos\left(\frac{4}{21}\right) \approx 79° \quad \blacktriangleleft$$

**▶ Exemplo 7** Encontre uma equação para a reta $L$ de interseção dos planos no Exemplo 6.

***Solução*** Primeiramente, calculamos $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \langle 2, -4, 4\rangle \times \langle 6, 2, -3\rangle = \langle 4, 30, 28\rangle$. Como $\mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{n}_1$, é paralelo ao primeiro plano, e como $\mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{n}_2$, é paralelo ao segundo plano. Portanto, $\mathbf{v}$ é paralelo a $L$, que é a interseção dos dois planos. Para encontrar um ponto de $L$, observe que $L$ deve intersectar o plano $xy$, ou seja, $z = 0$, pois $\mathbf{v} \cdot \langle 0, 0, 1\rangle = 28 \neq 0$. Substituindo $z = 0$ na equação de ambos planos, obtemos

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 6 \\ 6x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

com solução $x = 1$, $y = -1$. Assim, $P(1, -1, 0)$ é um ponto de $L$. Uma equação vetorial de $L$ é

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 1, -1, 0\rangle + t\langle 4, 30, 28\rangle \quad \blacktriangleleft$$

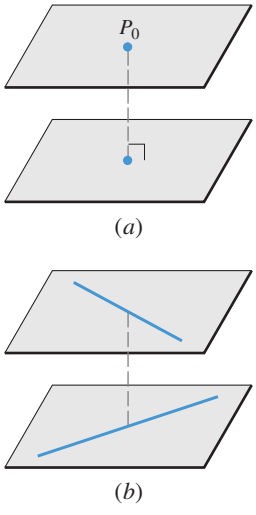



**Figura 11.6.8**

## PROBLEMAS DE DISTÂNCIA ENVOLVENDO PLANOS

A seguir, consideraremos três problemas de distância básicos no espaço tridimensional:

- Determinar a distância entre um ponto e um plano.
- Determinar a distância entre dois planos paralelos.
- Determinar a distância entre duas retas reversas.

Os três problemas estão relacionados. Se pudermos determinar a distância entre um ponto e um plano, então poderemos determinar a distância entre planos paralelos calculando a distância entre um dos planos e um ponto arbitrário $P_0$ do outro plano (Figura 11.6.8*a*). Além disso, podemos determinar a distância entre duas retas reversas calculando a distância entre os planos paralelos que as contêm (Figura 11.6.8*b*).

**11.6.2** **TEOREMA** *A distância $D$ entre um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e o plano de equação geral $ax + by + cz + d = 0$ é dada por*

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{10}$$

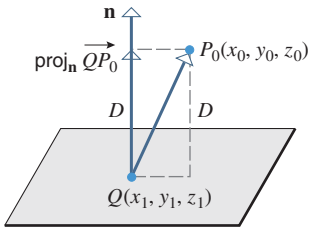



**Figura 11.6.9**

**DEMONSTRAÇÃO** Tome $Q(x_1, y_1, z_1)$ como um ponto qualquer do plano e posicione o vetor normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ de tal modo que seu ponto inicial esteja em $Q$. Conforme ilustrado na Figura 11.6.9, a distância $D$ é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\overrightarrow{QP_0}$ sobre $\mathbf{n}$. Dessa forma, por (12) da Seção 11.3,

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{QP_0}\| = \left\|\frac{\overrightarrow{QP_0}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}\right\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|^2}\|\mathbf{n}\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

No entanto,

$$\overrightarrow{QP_0} = \langle x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\rangle$$
$$\overrightarrow{QP_0}\cdot\mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$$
$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Assim,

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{11}$$

Como o ponto $Q(x_1, y_1, z_1)$ situa-se no plano, suas coordenadas satisfazem a equação do plano; isto é,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

ou

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$$

Substituindo essa expressão em (11), obtemos (10). ■

Existe um análogo da Fórmula (10) no espaço bidimensional que pode ser usado para calcular a distância entre um ponto a uma reta (ver Exercício 52).

► **Exemplo 8** Determine a distância $D$ entre o ponto $(1, -4, -3)$ e o plano

$$2x - 3y + 6z = -1$$

***Solução*** A Fórmula (10) requer que o plano seja reescrito na forma $ax + by + cz + d = 0$. Desse modo, reescrevemos a equação do plano dado como

$$2x - 3y + 6z + 1 = 0$$

da qual obtemos $a = 2$, $b = -3$, $c = 6$ e $d = 1$. Substituindo esses valores e as coordenadas do ponto dado em (10), obtemos

$$D = \frac{|(2)(1) + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$ ◄

► **Exemplo 9** Os planos

$$x + 2y - 2z = 3 \quad \text{e} \quad 2x + 4y - 4z = 7$$

são paralelos, tendo em vista que seus vetores normais $\langle 1, 2, -2\rangle$ e $\langle 2, 4, -4\rangle$ são vetores paralelos. Determine a distância entre esses planos.

***Solução*** Para determinar a distância $D$ entre os planos, podemos escolher um ponto *arbitrário* em um dos planos e calcular sua distância ao outro plano. Pondo $y = z = 0$ na equação $x + 2y - 2z = 3$, obtemos o ponto $P_0(3, 0, 0)$ nesse plano. De (10), a distância de $P_0$ ao plano $2x + 4y - 4z = 7$ é

$$D = \frac{|(2)(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6} \blacktriangleleft$$

**▶ Exemplo 10** Mostrou-se, no Exemplo 3 da Seção 11.5, que as retas

$$L_1 : x = 1 + 4t, \quad y = 5 - 4t, \quad z = -1 + 5t$$

$$L_2 : x = 2 + 8t, \quad y = 4 - 3t, \quad z = 5 + t$$

são reversas. Determine a distâncias entre elas.

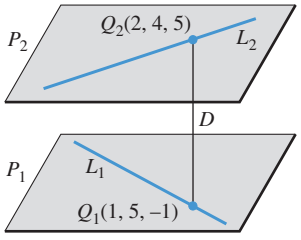



**Figura 11.6.10**

***Solução*** Denotemos por $P_1$ e $P_2$ dois planos paralelos contendo $L_1$ e $L_2$, respectivamente (Figura 11.6.10). Para determinar a distância $D$ entre $L_1$ e $L_2$, calcularemos a distância de um ponto em $P_1$ ao plano $P_2$. Uma vez que $L_1$ situa-se no plano $P_1$, podemos determinar um ponto em $P_1$ determinando um ponto da reta $L_1$; podemos fazer isso substituindo qualquer valor conveniente de $t$ nas equações paramétricas de $L_1$. A escolha mais simples é $t = 0$, da qual resulta o ponto $Q(1, 5, -1)$.

O próximo passo é determinar uma equação do plano $P_2$. Para fazer isso, observe que o vetor $\mathbf{u}_1 = \langle 4, -4, 5 \rangle$ é paralelo à reta $L_1$ e, por conseguinte, também paralelo aos planos $P_1$ e $P_2$. Analogamente, $\mathbf{u}_2 = \langle 8, -3, 1 \rangle$ é paralelo à reta $L_2$ e, portanto, paralelo a $P_1$ e $P_2$. Assim, o produto vetorial

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -4 & 5 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 11\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$$

é normal a $P_1$ e $P_2$. Usando esse vetor normal e o ponto $Q_2(2, 4, 5)$, encontrado colocando $t = 0$ na equação de $L_2$, obtemos uma equação para $P_2$:

$$11(x - 2) + 36(y - 4) + 20(z - 5) = 0$$

ou

$$11x + 36y + 20z - 266 = 0$$

A distância entre $Q_1(1, 5, -1)$ e esse plano é

$$D = \frac{|(11)(1) + (36)(5) + (20)(-1) - 266|}{\sqrt{11^2 + 36^2 + 20^2}} = \frac{95}{\sqrt{1.817}}$$

que também é a distância entre $L_1$ e $L_2$. ◀

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.6 (*Ver página 821 para respostas.*)

1. A forma ponto-normal da equação do plano por (0, 3, 5) e perpendicular a $\langle -4, 1, 7 \rangle$ é _____.
2. Um vetor normal ao plano $4x - 2y + 7z - 11 = 0$ é _____.
3. Um vetor normal ao plano que passa pelos pontos (2, 5, 1), (3, 7, 0) e (2, 5, 2) é _____.
4. O ângulo agudo da interseção dos planos $x + y - 2z = 5$ e $3y - 4z = 6$ é _____.
5. A distância entre o ponto (9, 8, 3) e o plano $x + y - 2z = 5$ é _____.

## EXERCÍCIOS 11.6

**1.** Determine equações dos planos $P_1$, $P_2$ e $P_3$ que são paralelos aos planos coordenados e passam pelo canto (3, 4, 5) da caixa mostrada na figura a seguir.

**2.** Determine equações dos planos $P_1$, $P_2$ e $P_3$ que são paralelos aos planos coordenados e passam pelo canto $(x_0, y_0, z_0)$ da caixa mostrada na figura a seguir.

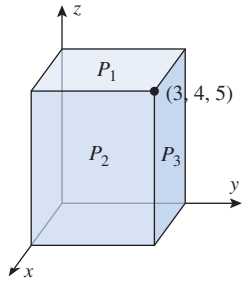



**Figura Ex-1**

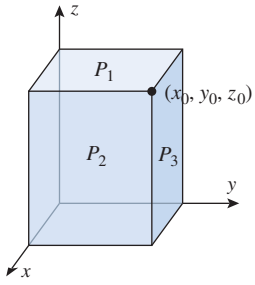



**Figura Ex-2**

**3-6** Determine uma equação do plano que passa pelo ponto $P$ e tem $\mathbf{n}$ como um vetor normal.

**3.** $P(2, 6, 1)$; $\mathbf{n} = \langle 1, 4, 2 \rangle$

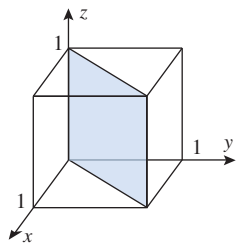
**4.** $P(-1, -1, 2)$; $\mathbf{n} = \langle -1, 7, 6 \rangle$

**5.** $P(1, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

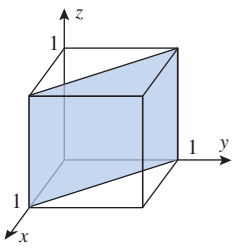
**6.** $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \langle 2, -3, -4 \rangle$

**7-10** Determine uma equação do plano indicado na figura.

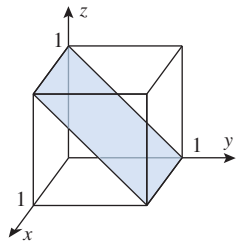
**7.**



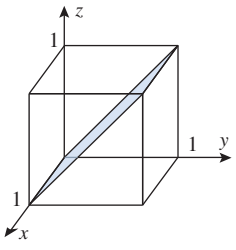

**8.**




**9.**




**10.**




**11-12** Determine uma equação do plano que passa pelos pontos dados.

**11.** $(-2, 1, 1)$, $(0, 2, 3)$ e $(1, 0, -1)$

**12.** $(3, 2, 1)$, $(2, 1, -1)$ e $(-1, 3, 2)$

**13-14** Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois.

**13.** (a) $2x - 8y - 6z - 2 = 0$, $-x + 4y + 3z - 5 = 0$
(b) $3x - 2y + z = 1$, $4x + 5y - 2z = 4$
(c) $x - y + 3z - 2 = 0$, $2x + z = 1$

**14.** (a) $3x - 2y + z = 4$, $6x - 4y + 3z = 7$
(b) $y = 4x - 2z + 3$, $x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$
(c) $x + 4y + 7z = 3$, $5x - 3y + z = 0$

**15-16** Determine se a reta e o plano são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois.

**15.** (a) $x = 4 + 2t$, $y = -t$, $z = -1 - 4t$; $3x + 2y + z - 7 = 0$
(b) $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$; $x - y + 2z = 5$
(c) $x = -1 + 2t$, $y = 4 + t$, $z = 1 - t$; $4x + 2y - 2z = 7$

**16.** (a) $x = 3 - t$, $y = 2 + t$, $z = 1 - 3t$; $2x + 2y - 5 = 0$
(b) $x = 1 - 2t$, $y = t$, $z = -t$; $6x - 3y + 3z = 1$
(c) $x = t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + t$; $x + y + z = 1$

**17-18** Determine se a reta e o plano intersectam; caso afirmativo, determine as coordenadas da interseção.

**17.** (a) $x = t$, $y = t$, $z = t$; $3x - 2y + z - 5 = 0$
(b) $x = 2 - t$, $y = 3 + t$, $z = t$; $2x + y + z = 1$

**18.** (a) $x = 3t$, $y = 5t$, $z = -t$; $2x - y + z + 1 = 0$
(b) $x = 1 + t$, $y = -1 + 3t$, $z = 2 + 4t$; $x - y + 4z = 7$

**19-20** Determine o ângulo agudo da interseção dos planos até o grau mais próximo.

**19.** $x = 0$ e $2x - y + z - 4 = 0$

**20.** $x + 2y - 2z = 5$ e $6x - 3y + 2z = 8$

**21-24 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

**21.** Cada plano tem exatamente dois vetores normais unitários.

**22.** Se um plano for paralelo a um dos planos coordenados, então seu vetor normal será paralelo a um dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ou $\mathbf{k}$.

**23.** Se uma reta $L$ for a interseção de dois planos, então $L$ será paralela ao produto vetorial dos vetores normais dos dois planos.

**24.** Se $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, então a distância de $P(x_0, y_0, z_0)$ ao plano $ax + by + cz = 0$ será $|\langle a, b, c\rangle \cdot \langle x_0, y_0, z_0\rangle|$.

**25-34** Determine uma equação do plano que satisfaça as condições enunciadas. ■

**25.** O plano pela origem que é paralelo ao plano de equação $4x - 2y + 7z + 12 = 0$.

**26.** O plano que contém a reta $x = -2 + 3t$, $y = 4 + 2t$, $z = 3 - t$ e é perpendicular ao plano $x - 2y + z = 5$.

**27.** O plano que passa pelo ponto $(-1, 4, 2)$ e que contém a reta de interseção dos planos $4x - y + z - 2 = 0$ e $2x + y - 2z - 3 = 0$.

**28.** O plano que passa por $(-1, 4, -3)$ e é perpendicular à reta $x - 2 = t$, $y + 3 = 2t$, $z = -t$.

**29.** O plano que passa por $(1, 2, -1)$ e é perpendicular à reta de interseção dos planos $2x + y + z = 2$ e $x + 2y + z = 3$.

**30.** O plano que passa pelos pontos $P_1(-2, 1, 4)$, $P_2(1, 0, 3)$ que é perpendicular ao plano $4x - y + 3z = 2$.

**31.** O plano que passa pelo ponto $(-1, 2, -5)$ que é perpendicular aos planos $2x - y + z = 1$ e $x + y - 2z = 3$.

**32.** O plano que contém o ponto $(2, 0, 3)$ e a reta $x = -1 + t$, $y = t$, $z = -4 + 2t$.

**33.** O plano cujos pontos são equidistantes de $(2, -1, 1)$ e $(3, 1, 5)$.

**34.** O plano que contém a reta $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2t$ e é paralelo à interseção dos planos $y + z = -1$ e $2x - y + z = 0$.

**35.** Determine equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(5, 0, -2)$ e que é paralela aos planos $x - 4y + 2z = 0$ e $2x + 3y - z + 1 = 0$.

**36.** Seja $L$ a reta $x = 3t + 1$, $y = -5t$, $z = t$.
(a) Mostre que $L$ está no plano $2x + y - z = 2$.
(b) Mostre que $L$ é paralela ao plano $x + y + 2z = 0$. A reta está acima, abaixo ou exatamente no plano?

**37.** Mostre que as retas

$$x = -2 + t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = 4 - t$$
$$x = 3 - t, \quad y = 4 - 2t, \quad z = t$$

são paralelas e obtenha uma equação do plano que elas determinam.

**38.** Mostre que as retas

$$L_1: x + 1 = 4t, \quad y - 3 = t, \quad z - 1 = 0$$
$$L_2: x + 13 = 12t, \quad y - 1 = 6t, \quad z - 2 = 3t$$

intersectam e obtenha uma equação do plano que elas determinam.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**39.** Os pontos $(1, 0, -1)$, $(0, 2, 3)$, $(-2, 1, 1)$ e $(4, 2, 3)$ estão no mesmo plano? Justifique sua resposta de duas formas diferentes.

**40.** Mostre que se $a$, $b$ e $c$ são não nulos, então o plano cujos cortes com os eixos coordenados são $x = a$, $y = b$ e $z = c$ é dado pela equação

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

**41-42** Obtenha equações paramétricas da reta de interseção dos planos. ■

**41.** $-2x + 3y + 7z + 2 = 0$
$x + 2y - 3z + 5 = 0$

**42.** $3x - 5y + 2z = 0$
$z = 0$

**43-44** Determine a distância entre o ponto e o plano. ■

**43.** $(1, -2, 3)$; $2x - 2y + z = 4$

**44.** $(0, 1, 5)$; $3x + 6y - 2z - 5 = 0$

**45-46** Determine a distância entre os planos paralelos dados. ■

**45.** $-2x + y + z = 0$
$6x - 3y - 3z - 5 = 0$

**46.** $x + y + z = 1$
$x + y + z = -1$

**47-48** Determine a distância entre as retas reversas dadas. ■

**47.** $x = 1 + 7t$, $y = 3 + t$, $z = 5 - 3t$
$x = 4 - t$, $y = 6$, $z = 7 + 2t$

**48.** $x = 3 - t$, $y = 4 + 4t$, $z = 1 + 2t$
$x = t$, $y = 3$, $z = 2t$

**49.** Determine uma equação da esfera com centro $(2, 1, -3)$ que é tangente ao plano $x - 3y + 2z = 4$.

**50.** Localize o ponto de interseção do plano $2x + y - z = 0$ com a reta que passa por $(3, 1, 0)$ que é perpendicular ao plano.

**51.** Mostre que a reta $x = -1 + t$, $y = 3 + 2t$, $z = -t$ e o plano de equação $2x - 2y - 2z + 3 = 0$ são paralelos e determine a distância entre eles.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**52.** As Fórmulas (1), (2), (3), (5) e (10), que se aplicam a planos no espaço tridimensional, têm versões análogas para retas no espaço bidimensional.
(a) Desenhe um análogo da Figura 11.6.3 no espaço bidimensional para ilustrar que a equação da reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $\mathbf{n} = \langle a, b\rangle$ pode ser expressa como

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

onde $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0\rangle$.
(b) Mostre que a equação vetorial da parte (a) pode ser expressa como

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0$$

Isso é chamado de a ***forma ponto-normal de uma reta***.
(c) Usando a prova do Teorema 11.6.1 como guia, mostre que se $a$ e $b$ não forem nulas, então o gráfico da equação

$$ax + by + c = 0$$

é uma reta que tem $\mathbf{n} = \langle a, b\rangle$ como um vetor normal.
(d) Usando a prova do Teorema 11.6.2 como guia, mostre que a distância $D$ entre um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e a reta $ax + by + c = 0$ é

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(e) Use a fórmula da parte (d) para determinar a distância entre o ponto $P(-3, 5)$ e a reta $y = -2x + 1$.

**53.** (a) Mostre que a distância $D$ entre os planos paralelos

$$ax + by + cz + d1 = 0$$
$$ax + by + cz + d2 = 0$$

é

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(b) Use a fórmula da parte (a) para resolver o Exercício 45.

**54.** **Texto** Explique por que qualquer reta no espaço tridimensional deve estar contida em algum plano vertical. Será verdade que qualquer reta no espaço tridimensional deve estar contida em algum plano horizontal?

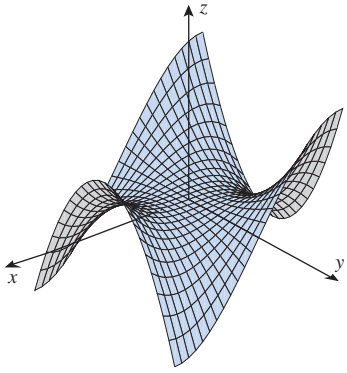
**55.** **Texto** Dados dois planos, discuta as várias possibilidades para o conjunto dos pontos que esses planos têm em comum. Em seguida, considere o conjuntos dos pontos comuns a três planos.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.6

**1.** $-4x + (y - 3) + 7(z - 5) = 0$ **2.** $\langle 4, -2, 7\rangle$ **3.** $\langle 2, -1, 0\rangle$ **4.** $\arccos \dfrac{11}{5\sqrt{6}} \approx 26°$ **5.** $\sqrt{6}$

# 11.7 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

*Nesta seção, estudaremos uma importante classe de superfícies que são os análogos tridimensionais das seções cônicas.*




Uma sela de macaco

**Figura 11.7.1**

### TRAÇO DE SUPERFÍCIE

Embora a forma geral de uma curva no espaço bidimensional possa ser obtida plotando os pontos, esse método não é geralmente útil para superfícies no espaço tridimensional, pois requer demasiados pontos. É mais comum construir a forma de uma superfície com entrelaçamento de ***malhas de curvas***, que são curvas obtidas cortando-se a superfície por planos adequadamente escolhidos. Por exemplo, a Figura 11.7.1, gerada por um CAS, mostra o gráfico de $z = x^3 - 3xy^2$ obtido com uma combinação de malhas de curvas e colorização para produzir detalhes da superfície. Essa superfície é chamada de "sela de macaco", pois um macaco sentado na superfície tem lugar para suas duas pernas e o rabo.

A curva da malha que resulta quando uma superfície for cortada por um plano é chamada de ***traço*** da superfície no plano (Figura 11.7.2). Uma maneira de deduzir o formato de uma superfície é examinando os traços em planos paralelos aos planos coordenados. Por exemplo, considere a superfície

$$z = x^2 + y^2 \tag{1}$$

Para encontrar o traço dessa superfície no plano $z = k$, substituímos esse valor de $z$ em (1), obtendo

$$x^2 + y^2 = k \qquad (z = k) \tag{2}$$

A parte com parênteses da Equação (2) é um lembrete de que a coordenada $z$ de todos os pontos sobre o traço é $z = k$. Isso necessita ser afirmado explicitamente, pois a variável $z$ não aparece na equação $x^2 + y^2 = k$.

Se $k < 0$, essa equação não terá soluções reais, portanto, não haverá traço. Contudo, se $k \geq 0$, então o gráfico de (2) será um círculo de raio $\sqrt{k}$ centrado no ponto $(0, 0, k)$ do eixo $z$ (Figura 11.7.3*a*). Assim, com valores não negativos de $k$, os traços paralelos ao plano $xy$ formam uma família de círculos centrados no eixo $z$, cujos raios começam em zero e crescem com $k$. Isso sugere que a superfície tem o formato mostrado na Figura 11.7.3*b*.

Para obter informação mais detalhada sobre o formato dessa superfície, podemos examinar os traços de (1) em planos paralelos ao plano $yz$. Tais planos têm equações da forma $x = k$, logo substituímos isso em (1) para obter

$$z = k^2 + y^2 \qquad (x = k)$$

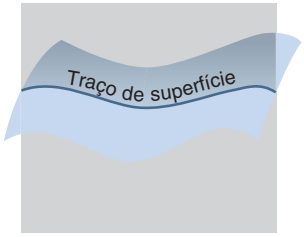



Figura 11.7.2

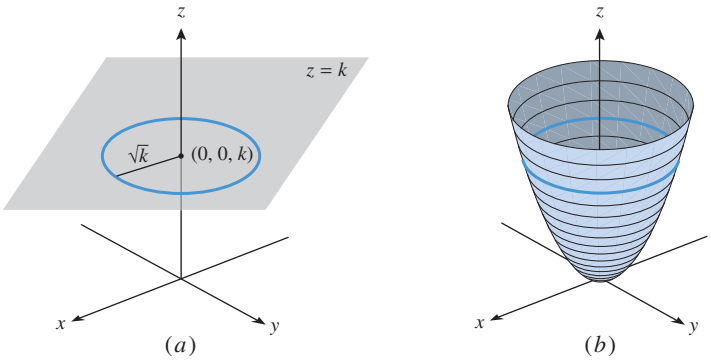



Figura 11.7.3

que podemos reescrever como

$$z - k^2 = y^2 \quad (x = k) \tag{3}$$

Por simplicidade, vamos começar com o caso em que $k = 0$ (o traço no plano $yz$), caso em que o traço tem a equação

$$z = y^2 \quad (x = 0)$$

O leitor deve reconhecer que isso é uma parábola no plano $x = 0$ que tem seu vértice na origem, é aberta na direção $z$ positiva e é simétrica em relação ao eixo $z$ (a parábola mais clara na Figura 11.7.4*a*). O leitor também deve reconhecer que o termo $-k^2$ em (3) tem o efeito de transladar a parábola $z = y^2$ na direção $z$ positiva, de modo que o novo vértice, no plano $x = k$ fica em $(k, 0, k^2)$. Essa é a parábola em azul mais forte na Figura 11.7.4*a*. Assim, os traços paralelos ao plano $yz$ formam uma família de parábolas cujos vértices movem-se para cima quando $k^2$ cresce (Figura 11.7.4*b*). Analogamente, os traços nos planos paralelos ao plano $xz$ têm equações da forma

$$z - k^2 = x^2 \qquad (y = k)$$

que, novamente, é uma família de parábolas cujos vértices movem-se para cima quando $k^2$ cresce (Figura 11.7.4*c* ).

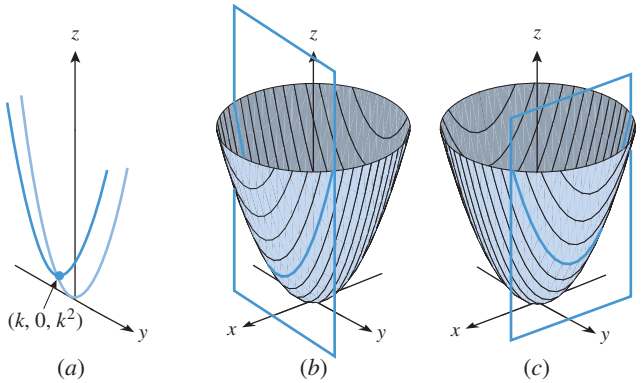



Figura 11.7.4

## AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Na discussão da Fórmula (2) da Seção 10.5, observamos que uma equação de segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

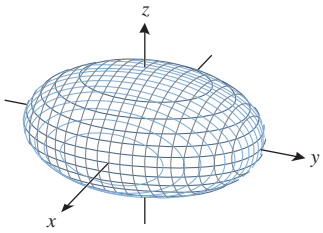
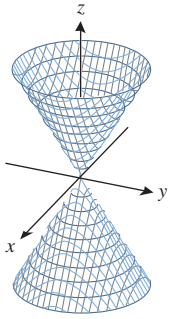
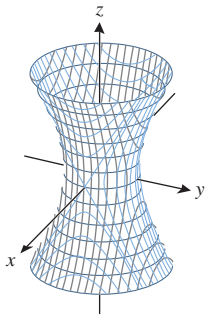
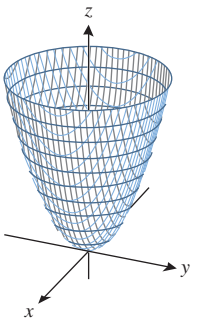
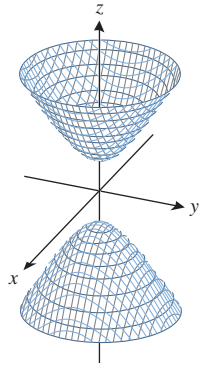
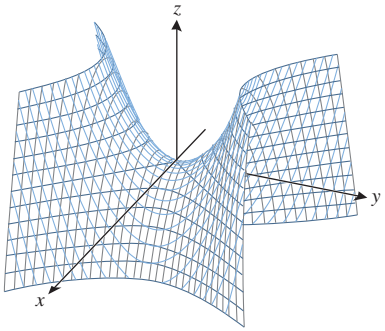
representa uma seção cônica (possivelmente degenerada). A equação análoga em um sistema de coordenadas $xyz$ é

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{4}$$

que é chamada ***equação de segundo grau em x, y e z***. Os gráficos de tais equações são denominados ***superfícies quádricas*** ou, simplesmente, ***quádricas.***

Seis tipos comuns de superfícies quádricas são mostrados na Tabela 11.7.1 – *elipsoides, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas, cones elípticos, paraboloides elípticos* e *paraboloides hiperbólicos*. (Supõe-se que as constantes $a$, $b$ e $c$ que aparecem nas equações na tabela sejam positivas.) Observe que nenhuma das superfícies quádricas na tabela tem os termos com produto misto em suas equações. Isso ocorre devido às suas orientações em relação aos eixos coordenados. Posteriormente, nesta seção, discu-

**Tabela 11.7.1**

| SUPERFÍCIE | EQUAÇÃO | SUPERFÍCIE | EQUAÇÃO |
|---|---|---|---|
| ELIPSOIDE  | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$<br>Os traços nos planos coordenados são elipses, como também são elipses os traços em planos paralelos aos planos coordenados, que intersectam a superfície em mais de um ponto. | CONE ELÍPTICO  | $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$<br>O traço no plano $xy$ é um ponto (a origem), e os traços em planos paralelos ao plano $xy$ são elipses. Os traços nos planos $yz$ e $xz$ são pares de retas que se intersectam na origem. Os traços em planos paralelos a esses são hipérboles. |
| HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA  | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$<br>O traço no plano $xy$ é uma elipse, como são os traços nos planos paralelos ao plano $xy$. Os traços nos planos $yz$ e $xz$ são hipérboles, bem como os traços nos planos paralelos a eles que não passam pelos cortes com os eixos $x$ e $y$. Nesses pontos, os traços são pares de retas concorrentes. | PARABOLOIDE ELÍPTICO  | $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$<br>O traço no plano $xy$ é um ponto (a origem), e os traços em planos paralelos e acima dele são elipses. Os traços nos planos $yz$ e $xz$, bem como em planos paralelos a eles, são parábolas. |
| HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS  | $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$<br>Não há traço no plano $xy$. Em planos paralelos ao plano $xy$ que intersectam a superfície em mais do que um ponto, os traços são elipses. Os traços nos planos $yz$ e $xz$, bem como em planos paralelos a eles, são hipérboles. | PARABOLOIDE HIPERBÓLICO  | $z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$<br>O traço no plano $xy$ é um par de retas que se cruzam na origem. Os traços em planos paralelos ao plano $xy$ são hipérboles. As hipérboles acima do plano $xy$ abrem-se na direção $y$ e as abaixo, na direção $x$. Os traços nos planos $yz$ e $xz$, bem como em planos paralelos a eles, são parábolas. |

tiremos outras possíveis orientações que produzem equações das superfícies quádricas sem termos com produto misto. No caso especial em que as seções transversais elípticas de um cone elíptico ou de um paraboloide elíptico são círculos, são usados os termos *cone circular* e *paraboloide circular*.

## ■ TÉCNICAS PARA FAZER GRÁFICOS DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Para gráficos precisos de superfícies quádricas, faz-se necessário o uso de um recurso gráfico computacional. Entretanto, as técnicas que discutiremos agora podem ser usadas para gerar esboços grosseiros dessas superfícies que são úteis para vários fins.

Um esboço grosseiro de um elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>0, b>0, c>0) \tag{5}$$

pode ser obtido plotando, primeiro, as interseções com os eixos coordenados, então esboçando os traços elípticos nos planos coordenados. O Exemplo 1 ilustra essa técnica.

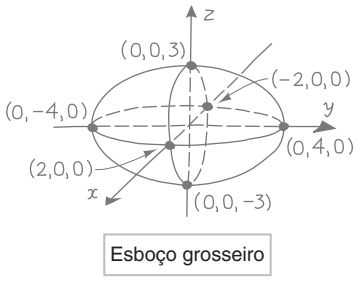



**Figura 11.7.5**

**► Exemplo 1** Esboce o elipsoide

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1 \tag{6}$$

***Solução*** Os cortes com o eixo $x$ podem ser obtidos tomando $y=0$ e $z=0$ em (6). Disso resulta $x=\pm 2$. Analogamente, os cortes com o eixo $y$ são $y=\pm 4$ e os cortes com o eixo $z$ são $z=\pm 3$. Esboçando os traços elípticos nos planos coordenados, obtemos o gráfico da Figura 11.7.5. ◄

Um esboço grosseiro de um hiperboloide de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>0, b>0, c>0) \tag{7}$$

pode ser obtido esboçando, primeiro, o traço elíptico no plano $xy$, então os traços elípticos nos planos $z=\pm c$ e, depois, as curvas hiperbólicas que unem os extremos dos eixos dessas elipses. O exemplo a seguir ilustra essa técnica.

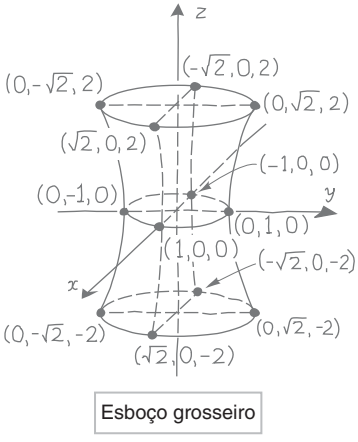



**Figura 11.7.6**

**► Exemplo 2** Esboce o gráfico do hiperboloide de uma folha

$$x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1 \tag{8}$$

***Solução*** O traço no plano $xy$, obtido tomando $z=0$ em (8), é

$$x^2+y^2=1 \qquad (z=0)$$

que é um círculo de raio 1 centrado no eixo $z$. Os traços nos planos $z=2$ e $z=-2$, obtidos tomando $z=\pm 2$ em (8), são dados por

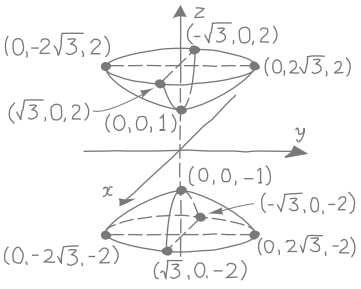
$$x^2+y^2=2 \qquad (z=\pm 2)$$

que são círculos de raio $\sqrt{2}$ centrados no eixo $z$. Unindo esses círculos por traços hiperbólicos nos planos coordenados verticais, obtemos o gráfico da Figura 11.7.6. ◄

Um esboço grosseiro do hiperboloide de duas folhas

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > 0, b > 0, c > 0) \tag{9}$$

pode ser obtido plotando, primeiramente, as interseções com o eixo $z$, depois esboçando os traços elípticos nos planos $z = \pm 2c$ e, então, esboçando os traços hiperbólicos que conectam as interseções com o eixo $z$ e os extremos dos eixos das elipses. (Não é essencial usar os planos $z = \pm 2c$, mas essas são boas escolhas, uma vez que simplificam ligeiramente os cálculos e dão um espaçamento certo para um bom esboço.) O próximo exemplo ilustra essa técnica.




Esboço grosseiro

**Figura 11.7.7**

**► Exemplo 3** Esboce o gráfico do hiperboloide de duas folhas

$$z^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \tag{10}$$

***Solução*** Os cortes com o eixo $z$, obtidos tomando $x = 0$ e $y = 0$ em (10), são $z = \pm 1$. Os traços nos planos $z = 2$ e $z = -2$, obtidos tomando $z = \pm 2$ em (10), são dados por

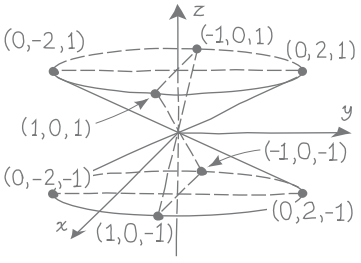
$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1 \qquad (z = \pm 2)$$

Esboçando essas elipses e os traços hiperbólicos nos planos coordenados, obtemos a Figura 11.7.7. ◄

Um esboço grosseiro do cone elíptico

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (a > 0, b > 0) \tag{11}$$

pode ser obtido esboçando, primeiro, os traços elípticos nos planos $z = \pm 1$ e, então, esboçando os traços lineares que conectam os extremos dos eixos das elipses. O exemplo a seguir ilustra essa técnica.




Esboço grosseiro

**Figura 11.7.8**

**► Exemplo 4** Esboce o gráfico do cone elíptico

$$z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4} \tag{12}$$

***Solução*** Os traços de (12) nos planos $z = \pm 1$ são dados por

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad (z = \pm 1)$$

Esboçando essas elipses e os traços lineares nos planos coordenados verticais, obtemos o gráfico da Figura 11.7.8. ◄

Nos casos especiais de (11) e (13) em que $a = b$, os traços paralelos ao plano $xy$ são círculos. Nesses casos, chamamos (11) de um ***cone circular*** e (13) de um ***paraboloide circular***.

Um esboço grosseiro do paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (a > 0, b > 0) \tag{13}$$

pode ser obtido esboçando, primeiro, o traço elíptico no plano $z = 1$ e, então, esboçando os traços parabólicos nos planos coordenados verticais para conectar a origem com os extremos dos eixos da elipse. O exemplo a seguir ilustra essa técnica.

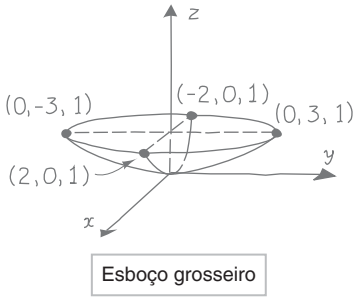



**Figura 11.7.9**

► **Exemplo 5** Esboce o gráfico do paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \tag{14}$$

***Solução*** O traço de (14) no plano $z = 1$ é

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad (z = 1)$$

Esboçando essa elipse e os traços parabólicos nos planos coordenados verticais, obtemos o gráfico da Figura 11.7.9. ◄

Um esboço grosseiro do paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \qquad (a > 0, b > 0) \tag{15}$$

pode ser obtido esboçando, primeiro, os dois traços parabólicos que passam pela origem (um no plano $x = 0$ e o outro no plano $y = 0$). Depois que os traços parabólicos estiverem desenhados, esboce os traços hiperbólicos nos planos $z = \pm 1$ e, então, preencha qualquer aresta que esteja faltando. O exemplo a seguir ilustra essa técnica.

► **Exemplo 6** Esboce o gráfico do paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} \tag{16}$$

***Solução*** Pondo $x = 0$ em (16), obtemos

$$z = \frac{y^2}{4} \qquad (x = 0)$$

que é uma parábola no plano $yz$ com vértice na origem abrindo na direção $z$ positiva (pois $z \geq 0$) e, pondo $y = 0$, obtemos

$$z = -\frac{x^2}{9} \qquad (y = 0)$$

que é uma parábola no plano $xz$ com vértice na origem abrindo na direção $z$ negativa.

O traço no plano $z = 1$ é

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1 \qquad (z = 1)$$

que é uma hipérbole que se abre ao longo de uma reta paralela ao eixo $y$ (verifique), e o traço no plano $z = -1$ é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \qquad (z = -1)$$

que é uma hipérbole que se abre ao longo de uma reta paralela ao eixo $x$. Combinar todas as informações acima nos leva a esboçar a Figura 11.7.10. ◄

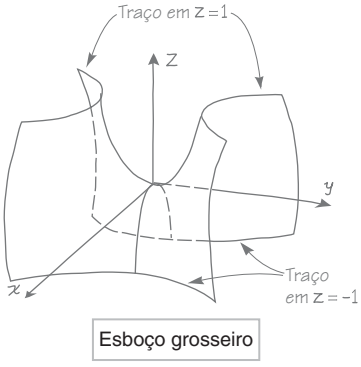



**Figura 11.7.10**

**OBSERVAÇÃO** O paraboloide hiperbólico da Figura 11.7.10 tem um comportamento interessante na origem – o traço no plano $xz$ tem um máximo relativo em $(0, 0, 0)$, e o traço no plano $yz$ tem um mínimo relativo em $(0, 0, 0)$. Assim, um besouro andando sobre a superfície pode considerar a origem como o ponto mais alto se percorrer um caminho ou pode considerar a origem como o ponto mais baixo se percorrer outro caminho. Um ponto com essa propriedade é comumente chamado de ***ponto de sela*** ou ***ponto de minimax***.

A Figura 11.7.11 mostra duas versões do paraboloide hiperbólico do Exemplo 6 geradas por computador. A primeira versão, que está muito próxima do esboço rudimentar na Figura 11.7.10, tem cortes no topo e na base que são traços hiperbólicos paralelos ao plano $xy$. Na segunda versão, o topo horizontal tem cortes omitidos; isso ajuda a enfatizar os traços parabólicos paralelos ao plano $xz$.

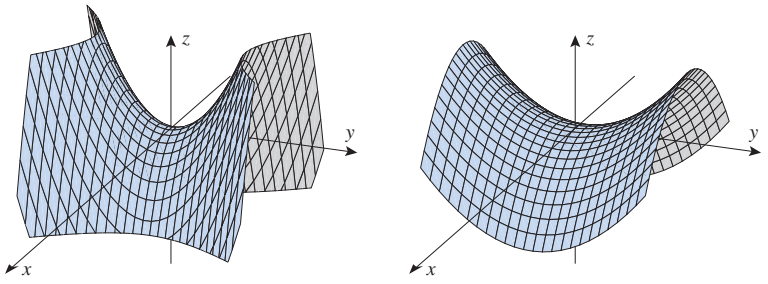
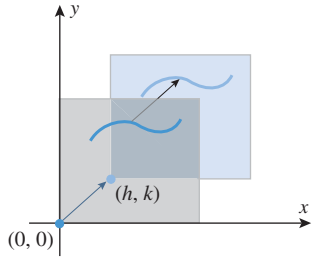
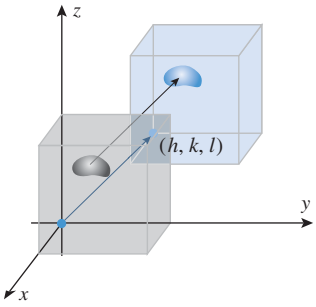



**Figura 11.7.11**




(*a*)




(*b*)

**Figura 11.7.12**

## TRANSLAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Na Seção 10.4, vimos que uma cônica no sistema de coordenadas $xy$ pode ser transladada substituindo $x - h$ em $x$ e $y - k$ em $y$ em sua equação. Para entender como isso funciona, considere os eixos $xy$ como fixos e considere o plano como uma folha transparente de plástico na qual são desenhados todos os gráficos. Quando as coordenadas dos pontos são modificadas tomando $(x - h, y - k)$ no lugar de $(x, y)$, o efeito geométrico é transladar a folha de plástico (e, portanto, todas as curvas), de tal modo que o ponto sobre o plástico que estava inicialmente em $(0, 0)$ acaba sendo movido para o ponto $(h, k)$ (ver Figura 11.7.12*a*).

Para o análogo no espaço tridimensional, considere os eixos $xyz$ como fixos e considere o espaço tridimensional como um bloco transparente de plástico no qual estão embutidas todas as superfícies. Quando as coordenadas dos pontos são modificadas tomando $(x - h, y - k, z - l)$ no lugar de $(x, y, z)$, o efeito geométrico é transladar o bloco de plástico (e, portanto, todas as superfícies) de tal modo que o ponto no bloco de plástico que estava inicialmente em $(0, 0, 0)$ acaba sendo movido para o ponto $(h, k, l)$ (ver Figura 11.7.12*b*).

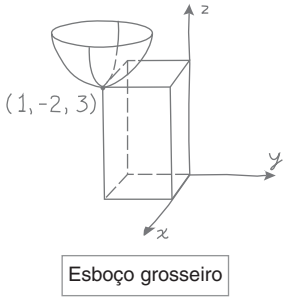



**Figura 11.7.13**

**▶ Exemplo 7** Descreva a superfície $z = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 3$.

***Solução*** A equação pode ser reescrita como

$$z - 3 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2$$

Essa superfície é o paraboloide obtido pela translação do paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

da Figura 11.7.3 de tal modo que o novo "vértice" esteja no ponto $(1, -2, 3)$. Um esboço grosseiro desse paraboloide está mostrado na Figura 11.7.13. ◀

**▶ Exemplo 8** Descreva a superfície

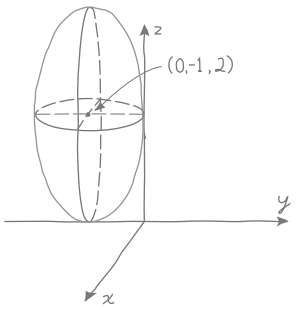
$$4x^2 + 4y^2 + z^2 + 8y - 4z = -4$$

***Solução*** Completando os quadrados, obtemos

$$4x^2 + 4(y + 1)^2 + (z - 2)^2 = -4 + 4 + 4$$

ou

$$x^2 + (y + 1)^2 + \frac{(z - 2)^2}{4} = 1$$




Esboço grosseiro

**Figura 11.7.14**

Na Figura 11.7.14, a seção transversal no plano $yz$ é mostrada como sendo tangente a ambos os eixos, $y$ e $z$. Confirme que isso está correto.

Assim, a superfície é o elipsoide que resulta quando o elipsoide

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

é transladado de tal modo que o novo "centro" esteja no ponto $(0, -1, 2)$. Um esboço grosseiro desse elipsoide é mostrado na Figura 11.7.14. ◄

## ■ REFLEXÕES DE SUPERFÍCIES NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Lembre-se de que, em um sistema de coordenadas $xy$, um ponto $(x, y)$ é refletido pelo eixo $x$ se $y$ for substituído por $-y$ e é refletido pelo eixo $y$ se $x$ for substituído por $-x$. Em um sistema de coordenadas $xyz$, um ponto $(x, y, z)$ é refletido pelo plano $xy$ se $z$ for substituído por $-z$, é refletido pelo plano $yz$ se $x$ for substituído por $-x$ e é refletido pelo plano $xz$ se $y$ for substituido por $-y$ (Figura 11.7.15). Segue que *substituir uma variável pelo seu negativo na equação de uma superfície faz a superfície ser refletida por um plano coordenado.*

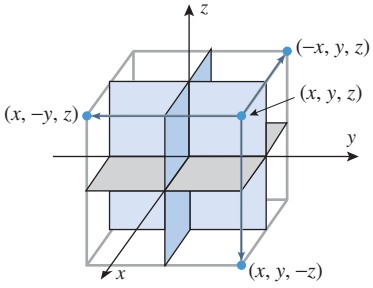



**Figura 11.7.15**

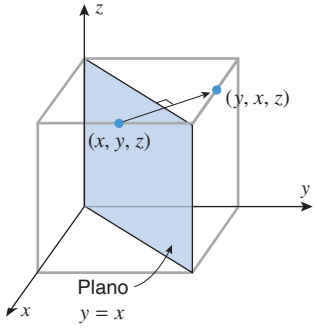



**Figura 11.7.16**

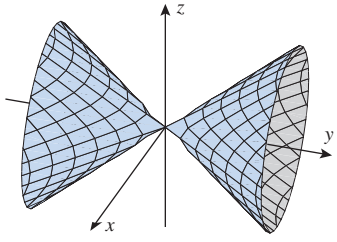



**Figura 11.7.17**

Lembre-se, também, de que em um sistema de coordenadas $xy$ um ponto $(x, y)$ é refletido pela reta $y = x$ se $x$ e $y$ forem trocados. Entretanto, em um sistema de coordenadas $xyz$, trocar $x$ e $y$ reflete o ponto $(x, y, z)$ pelo plano $y = x$ (Figura 11.7.16). Analogamente, trocar $x$ e $z$ reflete o ponto pelo plano $x = z$ e trocar $y$ e $z$ reflete pelo plano $y = z$. Assim, segue que *trocando duas variáveis na equação de uma superfície reflete a superfície por um plano que faz um ângulo de* 45° *com dois dos planos coordenados.*

**► Exemplo 9** Descreva as superfícies

$$\text{(a) } y^2 = x^2 + z^2 \qquad \text{(b) } z = -(x^2 + y^2)$$

***Solução (a)*** O gráfico da equação $y^2 = x^2 + z^2$ resulta da troca de $y$ e $z$ na equação $z^2 = x^2 + y^2$. Assim, o gráfico da equação $y^2 = x^2 + z^2$ pode ser obtido refletindo o gráfico de $z^2 = x^2 + y^2$ pelo plano $y = z$. Como o gráfico $z^2 = x^2 + y^2$ é um cone circular que se abre ao longo do eixo $z$ (ver Tabela 11.7.1), segue que o gráfico de $y^2 = x^2 + z^2$ é um cone circular que se abre ao longo do eixo $y$ (Figura 11.7.17).

***Solução (b)*** O gráfico da equação $z = -(x^2 + y^2)$ pode ser escrito como $-z = x^2 + y^2$, o que pode ser obtido substituindo $z$ por $-z$ na equação $z = x^2 + y^2$. Como o gráfico de $z = x^2 + y^2$ é um paraboloide circular que se abre na direção $z$ positiva (ver Tabela 11.7.1), segue que o gráfico de $z = -(x^2 + y^2)$ é um paraboloide circular que se abre na direção $z$ negativa (Figura 11.7.18). ◄

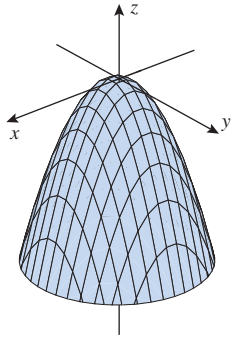



**Figura 11.7.18**

## UMA TÉCNICA PARA IDENTIFICAR SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

As equações das superfícies quádricas da Tabela 11.7.1 têm certas características que tornam possível identificar as superfícies quádricas que são deduzidas dessas equações por reflexões. Essas características identificatórias, que estão mostradas na Tabela 11.7.2, são baseadas em escrever a equação da superfície quádrica de tal forma que todos os termos variáveis estejam no lado esquerdo da equação e que haja um 1 ou um 0 no lado direito. Essas características não mudam quando a superfície é refletida por um plano coordenado ou por planos da forma $x = y$, $x = z$ ou $y = z$, tornando possível identificar a superfície quádrica refletida a partir da forma de sua equação.

**Tabela 11.7.2**
IDENTIFICANDO UMA SUPERFÍCIE QUÁDRICA A PARTIR DE SUA EQUAÇÃO

| EQUAÇÃO | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ | $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | $z^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ | $z-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ | $z-\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CARACTERÍSTICA | Nenhum sinal de menos | Um sinal de menos | Dois sinais de menos | Nenhum termo linear | Um termo linear; dois termos quadráticos com o mesmo sinal | Um termo linear; dois termos quadráticos com sinais opostos |
| CLASSIFICAÇÃO | Elipsoide | Hiperboloide de uma folha | Hiperboloide de duas folhas | Cone elíptico | Paraboloide elíptico | Paraboloide hiperbólico |

► **Exemplo 10** Identifique as superfícies

(a) $3x^2 - 4y^2 + 12z^2 + 12 = 0$ (b) $4x^2 - 4y + z^2 = 0$

***Solução (a)*** A equação pode ser reescrita como

$$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} - z^2 = 1$$

Essa equação tem um 1 no lado direito e dois termos negativos no lado esquerdo, logo seu gráfico é um hiperboloide de duas folhas.

***Solução (b)*** A equação tem um termo linear e dois termos quadráticos com o mesmo sinal, logo seu gráfico é um paraboloide elíptico. ◄

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.7 (*Ver página 832 para respostas.*)

**1.** Na superfície $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$, classifique o traço indicado como elipse, hipérbole ou parábola.
(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $z = 1$

**2.** Na superfície $4x^2 + z^2 - y^2 = 9$, classifique o traço indicado como elipse, hipérbole ou parábola.
(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $z = 1$

**3.** Na superfície $4x^2 + y^2 - z = 0$, classifique o traço indicado como elipse, hipérbole ou parábola.
(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $z = 1$

**4.** Classifique cada superfície como elipsoide, hiperboloide de uma folha, hiperboloide de duas folhas, cone elíptico, paraboloide elíptico ou paraboloide hiperbólico.

(a) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}-z=0$ (b) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}+z^2=1$

(c) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}+z=0$ (d) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}-z^2=1$

(e) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}-z^2=0$ (f) $z^2-\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$

## EXERCÍCIOS 11.7

**1-2** Identifique a superfície quádrica como um elipsoide, um hiperboloide de uma folha, um hiperboloide de duas folhas, um cone elíptico, um paraboloide elíptico ou um paraboloide hiperbólico, associando a equação com uma das formas dadas na Tabela 11.7.1. Forneça os valores de $a$, $b$ e $c$ em cada caso. ■

**1.** (a) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ (b) $z = \frac{y^2}{25} - x^2$
(c) $x^2 + y^2 - z^2 = 16$ (d) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
(e) $4z = x^2 + 4y^2$ (f) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

**2.** (a) $6x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 12$ (b) $y^2 - x^2 - z = 0$
(c) $9x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$ (d) $4x^2 + y^2 - 4z^2 = -4$
(e) $2z^2 - x^2 - 4y^2 = 0$ (f) $12z^2 - 3x^2 = 4y^2$

**3.** Obtenha uma equação e esboce a superfície que resulta quando o paraboloide circular $z = x^2 + y^2$ for refletido pelo plano
(a) $z = 0$ (b) $x = 0$ (c) $y = 0$
(d) $y = x$ (e) $x = z$ (f) $y = z$

**4.** Obtenha uma equação e esboce a superfície que resulta quando o hiperboloide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ for refletido pelo plano
(a) $z = 0$ (b) $x = 0$ (c) $y = 0$
(d) $y = x$ (e) $x = z$ (f) $y = z$

### ENFOCANDO CONCEITOS

**5.** As equações dadas representam superfícies quádricas cujas orientações são diferentes daquelas da Tabela 11.7.1. Em cada parte, identifique a superfície quádrica e dê uma descrição verbal de sua orientação (por exemplo, um cone elíptico que se abre ao longo do eixo $z$ ou um paraboloide hiperbólico assentado no eixo $y$).
(a) $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
(c) $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ (d) $x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$
(e) $y = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}$ (f) $y = -\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$

**6.** Para cada superfície do Exercício 5, obtenha a equação da superfície que resulta se a superfície dada for refletida pelo plano $xz$ e essa superfície, então, for refletida pelo plano $z = 0$.

**7-8** Determine as equações dos traços nos planos coordenados e esboce os traços em um sistema de coordenadas $xyz$. [*Sugestão*: Se encontrar problemas ao esboçar um traço diretamente em três dimensões, comece um esboço em duas dimensões colocando o plano coordenado no plano do papel; depois, transfira o esboço para três dimensões.] ■

**7.** (a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$ (b) $z = x^2 + 4y^2$
(c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$

**8.** (a) $y^2 + 9z^2 = x$ (b) $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$
(c) $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$

**9-10** Nestes exercícios, os traços das superfícies nos planos são seções cônicas. Em cada parte, obtenha uma equação do traço e afirme se é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole. ■

**9.** (a) $4x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ y = 1$
(b) $4x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ x = \frac{1}{2}$
(c) $9x^2 - y^2 - z^2 = 16;\ x = 2$
(d) $9x^2 - y^2 - z^2 = 16;\ z = 2$
(e) $z = 9x^2 + 4y^2;\ y = 2$
(f) $z = 9x^2 + 4y^2;\ z = 4$

**10.** (a) $9x^2 - y^2 + 4z^2 = 9;\ x = 2$
(b) $9x^2 - y^2 + 4z^2 = 9;\ y = 4$
(c) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0;\ y = 1$
(d) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0;\ z = 1$
(e) $z = x^2 - 4y^2;\ x = 1$
(f) $z = x^2 - 4y^2;\ z = 4$

**11-14 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**11.** Uma superfície quádrica é o gráfico de uma equação polinomial de grau quatro em $x$, $y$ e $z$.

**12.** Qualquer elipsoide intersecta o eixo $z$ em exatamente dois pontos.

**13.** Qualquer elipsoide é uma superfície de revolução.

**14.** A interseção do paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

com o plano $xy$ é um par de retas que se intersectam.

**15-26** Identifique e esboce a superfície quádrica. ■

**15.** $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ **16.** $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

**17.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ **18.** $x^2 + y^2 - z^2 = 9$

**19.** $4z^2 = x^2 + 4y^2$ **20.** $9x^2 + 4y^2 - 36z^2 = 0$

**21.** $9z^2 - 4y^2 - 9x^2 = 36$ **22.** $y^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$

**23.** $z = y^2 - x^2$ **24.** $16z = y^2 - x^2$

**25.** $4z = x^2 + 2y^2$ **26.** $z - 3x^2 - 3y^2 = 0$

**27-32** As equações dadas representam uma superfície quádrica, cuja orientação é diferente daquela da Tabela 11.7.1. Identifique e esboce a superfície. ■

**27.** $x^2 - 3y^2 - 3z^2 = 0$ **28.** $x - y^2 - 4z^2 = 0$

**29.** $2y^2 - x^2 + 2z^2 = 8$ **30.** $x^2 - 3y^2 - 3z^2 = 9$

**31.** $z = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$ **32.** $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 16$

**33-36** Esboce a superfície. ■

**33.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ **34.** $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

**35.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ **36.** $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

**37-40** Identifique a superfície e faça um esboço grosseiro que mostre sua posição e orientação. ■

**37.** $z = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 9$

**38.** $4x^2 - y^2 + 16(z - 2)^2 = 100$

**39.** $9x^2 + y^2 + 4z^2 - 18x + 2y + 16z = 10$

**40.** $z^2 = 4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4z$

**41-42** Nestes exercícios, use o elipsoide $4x^2 + 9y^2 + 18z^2 = 72$. ■

**41.** (a) Obtenha uma equação do traço elíptico no plano $z = \sqrt{2}$.
(b) Obtenha os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse da parte (a).
(c) Obtenha as coordenadas dos focos da elipse da parte (a).
(d) Descreva a orientação do eixo focal da elipse da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.

**42.** (a) Obtenha uma equação do traço elíptico no plano $x = 3$.
(b) Obtenha os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse da parte (a).
(c) Obtenha as coordenadas dos focos da elipse na parte (a).
(d) Descreva a orientação do eixo focal da elipse da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.

**43-46** Estes exercícios referem-se ao paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$. ■

**43.** (a) Obtenha uma equação do traço hiperbólico no plano $z = 4$.
(b) Obtenha os vértices da hipérbole da parte (a).
(c) Obtenha os focos da hipérbole da parte (a).
(d) Descreva a orientação do eixo focal da hipérbole da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.

**44.** (a) Obtenha uma equação do hipérbólico no plano $z = -4$.
(b) Obtenha os vértices da hipérbole da parte (a).
(c) Obtenha os focos da hipérbole da parte (a).
(d) Descreva a orientação do eixo focal da hipérbole da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.

**45.** (a) Obtenha uma equação do traço parabólico no plano $x = 2$.
(b) Obtenha o vértice da parábola da parte (a).
(c) Obtenha o foco da parábola da parte (a).
(d) Descreva a orientação do eixo focal da parábola da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.

**46.** (a) Obtenha uma equação do traço parabólico no plano $y = 2$.
(b) Obtenha o vértice da parábola da parte (a).
(c) Obtenha o foco da parábola da parte (a).
(d) Descreva a orientação do eixo focal da parábola da parte (a) relativamente aos eixos coordenados.

**47-48** Esboce a região englobada pelas superfícies e descreva sua curva de interseção. ■

**47.** Os paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$

**48.** O elipsoide $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 3$ e o paraboloide $z = x^2 + y^2$.

**49-50** Obtenha uma equação para a superfície gerada fazendo girar a curva em torno do eixo $y$. ■

**49.** $y = 4x^2 \ \ (z = 0)$ **50.** $y = 2x \ \ (z = 0)$

**51.** Determine uma equação da superfície consistindo em todos os pontos $P(x, y, z)$ que estão equidistantes do ponto $(0, 0, 1)$ e do plano $z = -1$. Identifique a superfície.

**52.** Determine uma equação da superfície consistindo em todos os pontos $P(x, y, z)$ que estão duas vezes mais afastados do plano $z = -1$ que do ponto $(0, 0, 1)$. Identifique a superfície.

**53.** Se uma esfera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

de raio $a$ for comprimida na direção $z$, então a superfície resultante, chamada de ***esferoide oblato***, tem uma equação da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde $c < a$. Mostre que o esferoide oblato tem um traço circular de raio $a$ no plano $xy$ e um traço elíptico no plano $xz$ com eixo maior de comprimento $2a$ ao longo do eixo $x$ e eixo menor de comprimento $2c$ ao longo do eixo $z$.

**54.** A rotação da Terra causa um achatamento nos polos, portanto sua forma é frequentemente modelada como um esferoide oblato em vez de uma esfera (ver Exercício 53 para terminologia). Um dos modelos usados pelos satélites de posicionamento global é o ***Sistema Geodésico Mundial de 1984*** (WGS-84), que trata a Terra como uma esfera oblata, cujo raio equatorial é 6.378,1370 km e cujo raio polar (a distância do centro da Terra aos polos) é 6.356,5231 km. Use o modelo WGS-84 para encontrar uma equação para a superfície da Terra em relação ao sistema de coordenadas mostrado na figura a seguir.

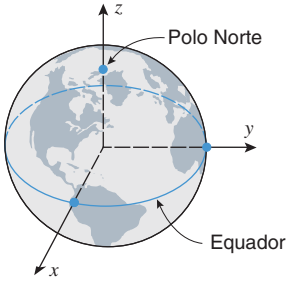



**Figura Ex-54**

**55.** Use o método do fatiamento para mostrar que é igual a $\frac{4}{3}\pi abc$ o volume do elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**56.** **Texto** Discuta algumas das conexões entre seções cônicas e traços de superfícies quádricas.

**57.** **Texto** Forneça uma sequência de passos para a determinação da superfície quádrica associada a uma equação quadrática em $x$, $y$ e $z$.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.7

**1.** (a) elipse (b) elipse (c) elipse **2.** (a) hipérbole (b) elipse (c) hipérbole **3.** (a) parábola (b) parábola (c) elipse **4.** (a) paraboloide elíptico (b) elipsoide (c) paraboloide hiperbólico (d) hiperboloide de uma folha (e) cone elíptico (f) hiperboloide de duas folhas

## 11.8 COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

*Nesta seção, discutiremos dois novos tipos de sistemas de coordenadas no espaço tridimensional que são frequentemente mais úteis que o sistema de coordenadas retangulares no estudo de superfícies com simetrias. Esses novos sistemas de coordenadas têm também importantes aplicações na navegação, na Astronomia e no estudo do movimento rotacional em torno de um eixo.*

### SISTEMAS DE COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

São necessárias três coordenadas para estabelecer a localização de um ponto no espaço tridimensional. Já havíamos visto isso em coordenadas retangulares. Contudo, a Figura 11.8.1 mostra duas outras possibilidades: a parte ($a$) da figura mostra as ***coordenadas retangulares*** $(x, y, z)$ de um ponto $P$, a parte ($b$) mostra as ***coordenadas cilíndricas*** $(r, \theta, z)$ de $P$ e a parte ($c$) mostra as ***coordenadas esféricas*** $(\rho, \theta, \phi)$ de $P$. Em um sistema de coordenadas retangulares, as coordenadas podem ser quaisquer números reais, mas no sistema de coordenadas cilíndricas e esféricas há restrições sobre os valores admissíveis das coordenadas (conforme indicado na Figura 11.8.1).

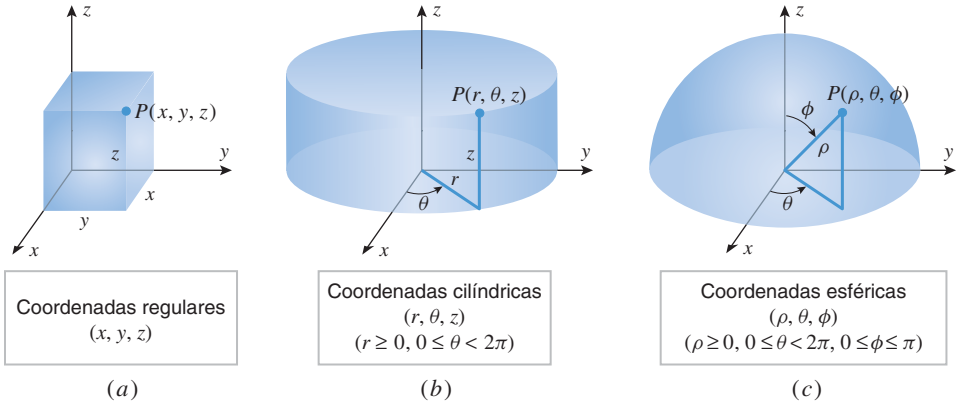



**Figura 11.8.1**

### SUPERFÍCIES CONSTANTES

Em coordenadas retangulares, as superfícies representadas por equações da forma

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{e} \quad z = z_0$$

onde $x_0$, $y_0$ e $z_0$ são constantes, são planos paralelos ao plano $yz$, ao plano $xz$ e ao plano $xy$, respectivamente (Figura 11.8.2). Em coordenadas cilíndricas, as superfícies representadas por equações da forma

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad z = z_0$$

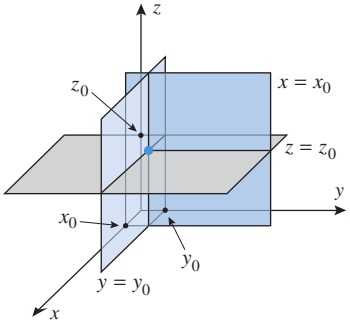



**Figura 11.8.2**

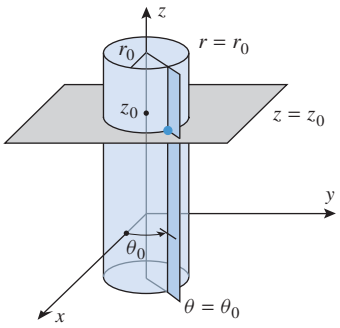



**Figura 11.8.3**

onde $r_0$, $\theta_0$ e $z_0$ são constantes, estão mostradas na Figura 11.8.3:

- A superfície $r = r_0$ é um cilindro circular reto de raio $r_0$ centrado no eixo $z$.
- A superfície $\theta = \theta_0$ é um semiplano colado no eixo $z$ e formando um ângulo $\theta_0$ com o eixo $x$ positivo.
- A superfície $z = z_0$ é um plano horizontal.

Em coordenadas esféricas, as superfícies representadas por equações da forma

$$\rho = \rho_0, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad \phi = \phi_0$$

onde $\rho_0$, $\theta_0$ e $\phi_0$ são constantes, estão mostradas na Figura 11.8.4:

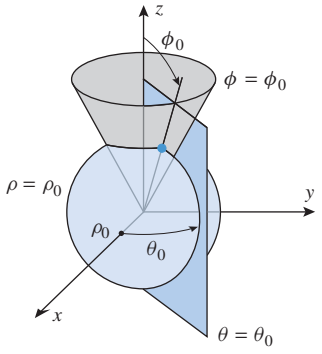



**Figura 11.8.4**

- A superfície $\rho = \rho_0$ consiste em todos os pontos cuja distância $\rho$ da origem é $\rho_0$. Supondo $\rho_0$ não negativo, isso é uma esfera de raio $\rho_0$ centrada na origem.
- Como nas coordenadas cilíndricas, a superfície $\theta = \theta_0$ é um semiplano colado no eixo $z$ formando um ângulo $\theta_0$ com o eixo $x$ positivo.
- A superfície $\phi = \phi_0$ consiste em todos os pontos dos quais um segmento de reta até a origem forma um ângulo $\phi_0$ com o eixo $z$ positivo. Dependendo de $0 < \phi_0 < \pi/2$ ou $\pi/2 < \phi_0 < \pi$, isso será a folha de um cone abrindo-se para cima ou para baixo. (Se $\phi_0 = \pi/2$, então o cone é plano e a superfície é o plano $xy$.)

## CONVERTENDO COORDENADAS

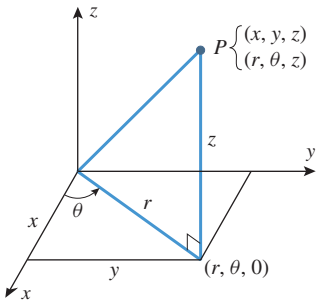
Da mesma forma que convertemos entre coordenadas retangulares e polares no espaço bidimensional, precisaremos converter entre coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas no espaço tridimensional. A Tabela 11.8.1 dá fórmulas para fazer essas conversões.

**Tabela 11.8.1**

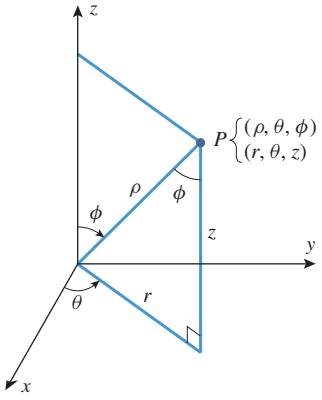
FÓRMULAS DE CONVERSÃO PARA SISTEMAS COORDENADOS

| CONVERSÃO | | FÓRMULAS | RESTRIÇÕES |
|---|---|---|---|
| Cilíndricas para retangulares | $(r, \theta, z) \to (x, y, z)$ | $x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta, \quad z = z$ | $r \geq 0, \rho \geq 0$<br>$0 \leq \theta < 2\pi$<br>$0 \leq \phi \leq \pi$ |
| Retangulares para cilíndricas | $(x, y, z) \to (r, \theta, z)$ | $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tg}\ \theta = y/x, \quad z = z$ | |
| Esféricas para cilíndricas | $(\rho, \theta, \phi) \to (r, \theta, z)$ | $r = \rho\,\text{sen}\,\phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho\cos\phi$ | |
| Cilíndricas para esféricas | $(r, \theta, z) \to (\rho, \theta, \phi)$ | $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \text{tg}\ \phi = r/z$ | |
| Esféricas para retangulares | $(\rho, \theta, \phi) \to (x, y, z)$ | $x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \quad y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \quad z = \rho\cos\phi$ | |
| Retangulares para esféricas | $(x, y, z) \to (\rho, \theta, \phi)$ | $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{tg}\ \theta = y/x, \quad \cos\phi = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ | |

Os diagramas da Figura 11.8.5 ajudam a entender como foram deduzidas as fórmulas na Tabela 11.8.1. Por exemplo, a parte (*a*) da figura mostra que, convertendo entre coordenadas retangulares $(x, y, z)$ e coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$, podemos interpretar $(r, \theta)$ como coordenadas polares de $(x, y)$. Assim, as fórmulas de conversão de polares para retangulares



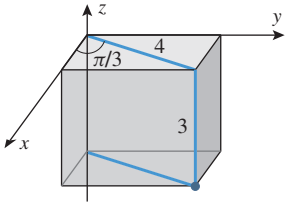

(a)




(b)

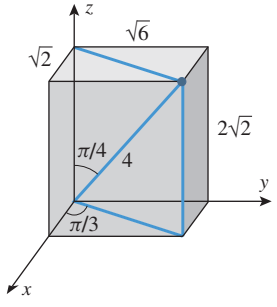
Comparação de sistemas coordenados

**Figura 11.8.5**




cilíndricas: $(4, \pi/3, -3)$
retangulares: $(2, 2\sqrt{3}, -3)$

**Figura 11.8.6**




esféricas: $(4, \pi/3, \pi/4)$
retangulares: $(\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2})$

**Figura 11.8.7**

e de retangulares para polares (1) e (2), respectivamente, da Seção 10.2, fornecem a fórmula de conversão entre coordenadas retangulares e cilíndricas na tabela.

A parte (*b*) da Figura 11.8.5 sugere que as coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \phi)$ de um ponto $P$ podem ser convertidas em coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ pelas fórmulas de conversão.

$$r = \rho \operatorname{sen} \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi \tag{1}$$

Além disso, uma vez que as coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ de $P$ podem ser convetidas em coordenadas retangulares $(x, y, z)$ pela fórmula de conversão

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z \tag{2}$$

podemos obter fórmulas de conversão direta das coordenadas esféricas para as coordenadas retangulares substituindo (1) em (2). Isso resulta em

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi \tag{3}$$

As outras fórmulas de conversão da Tabela 11.8.1 são deixadas como exercícios.

**► Exemplo 1**

(a) Determine as coordenadas retangulares do ponto com coordenadas cilíndricas

$$(r, \theta, z) = (4, \pi/3, -3)$$

(b) Determine as coordenadas retangulares do ponto com coordenadas esféricas

$$(\rho, \theta, \phi) = (4, \pi/3, \pi/4)$$

***Solução (a)*** Aplicando a fórmula de conversão de cilíndricas para retangulares da Tabela 11.8.1,

$$x = r \cos \theta = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 2, \quad y = r \operatorname{sen} \theta = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}, \quad z = -3$$

Assim, as coordenadas retangulares do ponto são $(x, y, z) = (2, 2\sqrt{3}, -3)$ (Figura 11.8.6).

***Solução (b)*** Aplicando as fórmulas de conversão de esféricas para retangulares da Tabela 11.8.1, obtemos

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{2}$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \sqrt{6}$$

$$z = \rho \cos \phi = 4 \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

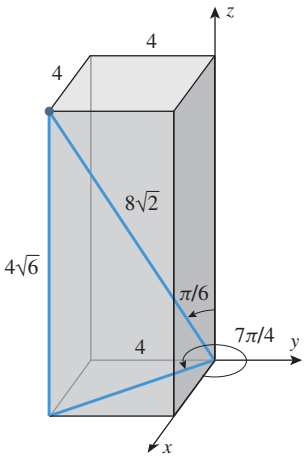
As coordenadas retangulares do ponto são $(x, y, z) = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2})$ (Figura 11.8.7). ◄

Como o intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ cobre dois períodos da função tangente, a fórmula de conversão $\operatorname{tg} \theta = y/x$ não determina completamente $\theta$. O exemplo a seguir mostra como tratar essa ambiguidade.

**► Exemplo 2** Determine as coordenadas esféricas do ponto com coordenadas retangulares.

$$(x, y, z) = (4, -4, 4\sqrt{6})$$

Como devemos escolher $\theta$ se $x = 0$?
Como devemos escolher $\theta$ se $y = 0$?




retangulares: $(4, -4, 4\sqrt{6})$
esféricas: $(8\sqrt{2}, 7\pi/4, \pi/6)$

**Figura 11.8.8**

***Solução*** Da fórmula de conversão de retangulares para esféricas da Tabela 11.8.1, obtemos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{16 + 16 + 96} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} = -1$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{4\sqrt{6}}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Da restrição $0 \le \theta < 2\pi$ e do valor calculado de tg $\theta$, as possibilidades para $\theta$ são $\theta = 3\pi/4$ e $\theta = 7\pi/4$. Contudo, o ponto dado tem uma coordenada $y$ negativa, logo devemos ter $\theta = 7\pi/4$. Além disso, da restrição $0 \le \phi \le \pi$ e do valor calculado de cos $\phi$, a única possibilidade para $\phi$ é $\phi = \pi/6$. Assim, as coordenadas esféricas do ponto são $(\rho, \theta, \phi) = (8\sqrt{2}, 7\pi/4, \pi/6)$ (Figura 11.8.8). ◀

## EQUAÇÕES DE SUPERFÍCIES EM COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

As superfícies de revolução em torno do eixo $z$ de um sistema de coordenadas retangulares têm, geralmente, equações mais simples nas coordenadas cilíndricas do que nas coordenadas retangulares, e as equações de superfícies com simetria em torno da origem são geralmente mais simples nas coordenadas esféricas do que nas coordenadas retangulares. Por exemplo, considere a folha superior do cone circular cuja equação em coordenadas retangulares é

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(Tabela 11.8.2). A equação correspondente nas coordenadas cilíndricas pode ser obtida a partir da fórmula de conversão de cilíndricas para retangulares da Tabela 11.8.1. Isso dá

$$z = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\,\text{sen}\,\theta)^2} = \sqrt{r^2} = |r| = r$$

logo, a equação do cone nas coordenadas cilíndricas é $z = r$. Indo além, a equação do cone em coordenadas esféricas pode ser obtida da fórmula de conversão de esféricas para cilíndricas da Tabela 11.8.1. Isso resulta em

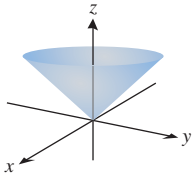
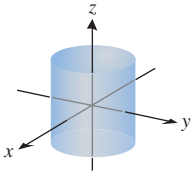
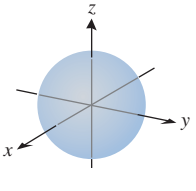
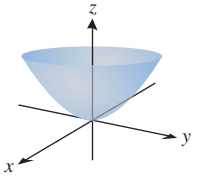
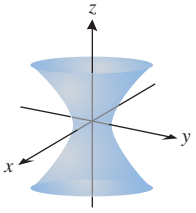
$$\rho\cos\phi = \rho\,\text{sen}\,\phi$$

que, se $\rho \neq 0$, pode ser reescrita como

$$\text{tg}\,\phi = 1 \quad \text{ou} \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

Geometricamente, isso nos diz que a reta radial que parte da origem para qualquer ponto do cone faz um ângulo de $\pi/4$ com o eixo $z$.

**Tabela 11.8.2**

| | CONE | CILINDRO | ESFERA | PARABOLOIDE | HIPERBOLOIDE |
|---|---|---|---|---|---|
| |  |  |  |  |  |
| RETANGULARES | $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ | $x^2 + y^2 = 1$ | $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ | $z = x^2 + y^2$ | $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ |
| CILÍNDRICAS | $z = r$ | $r = 1$ | $z^2 = 1 - r^2$ | $z = r^2$ | $z^2 = r^2 - 1$ |
| ESFÉRICAS | $\phi = \pi/4$ | $\rho = \text{cossec}\,\phi$ | $\rho = 1$ | $\rho = \cos\phi\ \text{cossec}^2\phi$ | $\rho^2 = -\sec 2\phi$ |

**▶ Exemplo 3** Obtenha as equações do paraboloide $z = x^2 + y^2$ em coordenadas cilíndricas e esféricas.

*Solução* Da fórmula de conversão de retangulares para cilíndricas da Tabela 11.8.1, obtém-se

$$z = r^2 \tag{4}$$

que é a equação em coordenadas cilíndricas. Agora, aplicando as fórmulas de conversão de esféricas para cilíndricas em (4), obtém-se

$$\rho \cos \phi = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi$$

que podemos reescrever como

$$\rho = \cos \phi \operatorname{cossec}^2 \phi$$

Alternativamente, poderíamos ter obtido esta equação diretamente da equação em coordenadas retangulares, aplicando as fórmulas de conversão de esféricas para retangulares (verifique). ◀

Confirme que estão corretas as equações para o cilindro e o hiperboloide nas coordenadas esféricas e cilíndricas dadas na Tabela 11.8.2.

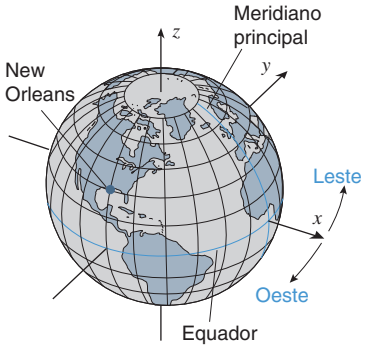



**Figura 11.8.9**

## ■ COORDENADAS ESFÉRICAS NA NAVEGAÇÃO

As coordenadas esféricas estão relacionadas com as coordenadas em longitude e latitude usadas na navegação. Para ver por quê, vamos construir um sistema de coordenadas retangulares satisfazendo a regra da mão direita, com a sua origem no centro da Terra, o seu eixo $z$ positivo passando pelo Polo Norte e o seu eixo $x$ positivo passando pelo meridiano principal (Figura 11.8.9). Supondo que a Terra seja uma esfera de raio $\rho = 4.000$ milhas, então cada ponto sobre a Terra tem coordenadas esféricas da forma $(4.000, \theta, \phi)$, onde $\phi$ e $\theta$ determinam a latitude e a longitude do ponto. É comum especificar longitudes em graus leste ou oeste do meridiano principal e latitudes em graus norte ou sul do Equador. Porém, o próximo exemplo mostra que é muito simples determinar $\phi$ e $\theta$ a partir de tais dados.

**▶ Exemplo 4** A cidade de New Orleans, nos EUA, está localizada a 90° longitude oeste e 30° latitude norte. Determine as coordenadas esféricas e retangulares relativas aos eixos coordenados da Figura 11.8.9. (Suponha que a distância esteja em milhas.)

*Solução* Uma longitude de 90° oeste corresponde a $\theta = 360° - 90° = 270°$ ou $\theta = 3\pi/2$ radianos; uma latitude de 30° norte corresponde a $\phi = 90° - 30° = 60°$ ou $\phi = \pi/3$ radianos. Assim, as coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \phi)$ de New Orleans são $(4.000, 3\pi/2, \pi/3)$.

Para determinar as coordenadas retangulares, aplicamos as fórmulas de conversão de esféricas para retangulares da Tabela 11.8.1. Assim, obtemos

$$x = 4.000 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{3\pi}{2} = 4.000 \frac{\sqrt{3}}{2}(0) = 0 \text{ milhas}$$

$$y = 4.000 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 4.000 \frac{\sqrt{3}}{2}(-1) = -2.000\sqrt{3} \text{ milhas}$$

$$z = 4.000 \cos \frac{\pi}{3} = 4.000 \left(\frac{1}{2}\right) = 2.000 \text{ milhas} \quad ◀$$

Jon Arnold/Danita Delimont
*Os sistemas de navegação modernos usam representações coordenadas múltiplas para determinar a posição.*

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.8 (Ver página 838 para respostas.)

**1.** As fórmulas de conversão de coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ para coordenadas retangulares $(x, y, z)$ são

$x =$ _____, $y =$ _____, $z =$ _____.

**2.** As fórmulas de conversão de coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \phi)$ para coordenadas retangulares $(x, y, z)$ são

$x =$ _____, $y =$ _____, $z =$ _____.

**3.** As fórmulas de conversão de coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \phi)$ para coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ são

$r =$ _____, $\theta =$ _____, $z =$ _____.

**4.** Seja $P$ o ponto do espaço tridimensional de coordenadas retangulares $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$.
(a) As coordenadas cilíndricas de $P$ são $(r, \theta, z) =$ _____.
(b) As coordenadas esféricas de $P$ são $(\rho, \theta, \phi) =$ _____.

**5.** Dê uma equação de uma esfera de raio 5 centrada na origem em coordenadas
(a) retangulares;
(b) cilíndricas;
(c) esféricas.

## EXERCÍCIOS 11.8 Recurso Gráfico C CAS

**1-2** Converta as coordenadas de retangulares para cilíndricas.

**1.** (a) $(4\sqrt{3}, 4, -4)$ (b) $(-5, 5, 6)$
(c) $(0, 2, 0)$ (d) $(4, -4\sqrt{3}, 6)$

**2.** (a) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ (b) $(0, 1, 1)$
(c) $(-4, 4, -7)$ (d) $(2, -2, -2)$

**3-4** Converta as coordenadas de cilíndricas para retangulares.

**3.** (a) $(4, \pi/6, 3)$ (b) $(8, 3\pi/4, -2)$
(c) $(5, 0, 4)$ (d) $(7, \pi, -9)$

**4.** (a) $(6, 5\pi/3, 7)$ (b) $(1, \pi/2, 0)$
(c) $(3, \pi/2, 5)$ (d) $(4, \pi/2, -1)$

**5-6** Converta as coordenadas de retangulares para esféricas.

**5.** (a) $(1, \sqrt{3}, -2)$ (b) $(1, -1, \sqrt{2})$
(c) $(0, 3\sqrt{3}, 3)$ (d) $(-5\sqrt{3}, 5, 0)$

**6.** (a) $(4, 4, 4\sqrt{6})$ (b) $(1, -\sqrt{3}, -2)$
(c) $(2, 0, 0)$ (d) $(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$

**7-8** Converta as coordenadas de esféricas para retangulares.

**7.** (a) $(5, \pi/6, \pi/4)$ (b) $(7, 0, \pi/2)$
(c) $(1, \pi, 0)$ (d) $(2, 3\pi/2, \pi/2)$

**8.** (a) $(1, 2\pi/3, 3\pi/4)$ (b) $(3, 7\pi/4, 5\pi/6)$
(c) $(8, \pi/6, \pi/4)$ (d) $(4, \pi/2, \pi/3)$

**9-10** Converta as coordenadas de cilíndricas para esféricas.

**9.** (a) $(\sqrt{3}, \pi/6, 3)$ (b) $(1, \pi/4, -1)$
(c) $(2, 3\pi/4, 0)$ (d) $(6, 1, -2\sqrt{3})$

**10.** (a) $(4, 5\pi/6, 4)$ (b) $(2, 0, -2)$
(c) $(4, \pi/2, 3)$ (d) $(6, \pi, 2)$

**11-12** Converta as coordenadas de esféricas para cilíndricas.

**11.** (a) $(5, \pi/4, 2\pi/3)$ (b) $(1, 7\pi/6, \pi)$
(c) $(3, 0, 0)$ (d) $(4, \pi/6, \pi/2)$

**12.** (a) $(5, \pi/2, 0)$ (b) $(6, 0, 3\pi/4)$
(c) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, \pi)$ (d) $(5, 2\pi/3, 5\pi/6)$

C **13.** Use um CAS ou uma calculadora programável para estabelecer as fórmulas de conversão da Tabela 11.8.1 e, então, use o CAS ou uma calculadora para resolver os problemas dos Exercícios 1, 3, 5, 7, 9 e 11.

C **14.** Use um CAS ou uma calculadora programável para estabelecer as fórmulas de conversão da Tabela 11.8.1 e, então, use o CAS ou uma calculadora para resolver os problemas dos Exercícios 2, 4, 6, 8, 10 e 12.

**15-18 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

**15.** Nas coordenadas cilíndricas de um ponto, $r$ é a distância do ponto ao eixo $z$.

**16.** Nas coordenadas esféricas de um ponto, $\rho$ é a distância do ponto à origem.

**17.** O gráfico de $\theta = \theta_0$ em coordenadas cilíndricas é igual ao gráfico de $\theta = \theta_0$ em coordenadas esféricas.

**18.** O gráfico de $r = f(\theta)$ em coordenadas cilíndricas sempre pode ser obtido pela extrusão do gráfico polar de $r = f(\theta)$ no plano $xy$.

**19-26** Uma equação é dada em coordenadas cilíndricas. Expresse a equação em coordenadas retangulares e esboce o gráfico.

**19.** $r = 3$ **20.** $\theta = \pi/4$ **21.** $z = r^2$

**22.** $z = r\cos\theta$ **23.** $r = 4\operatorname{sen}\theta$ **24.** $r = 2\sec\theta$

**25.** $r^2 + z^2 = 1$ **26.** $r^2\cos 2\theta = z$

**27-34** Uma equação é dada em coordenadas esféricas. Expresse a equação em coordenadas retangulares e esboce o gráfico.

**27.** $\rho = 3$ **28.** $\theta = \pi/3$ **29.** $\phi = \pi/4$

**30.** $\rho = 2\sec\phi$ **31.** $\rho = 4\cos\phi$ **32.** $\rho\operatorname{sen}\phi = 1$

**33.** $\rho\operatorname{sen}\phi = 2\cos\theta$ **34.** $\rho - 2\operatorname{sen}\phi\cos\theta = 0$

**35-46** Uma equação de uma superfície é dada em coordenadas retangulares. Determine uma equação da superfície em (a) coordenadas cilíndricas e (b) coordenadas esféricas.

**35.** $z = 3$ **36.** $y = 2$

**37.** $z = 3x^2 + 3y^2$ **38.** $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$

**39.** $x^2 + y^2 = 4$ **40.** $x^2 + y^2 - 6y = 0$

**41.** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ **42.** $z^2 = x^2 - y^2$

**43.** $2x + 3y + 4z = 1$ **44.** $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

**45.** $x^2 = 16 - z^2$ **46.** $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

### ENFOCANDO CONCEITOS

**47-50** Descreva a região no espaço tridimensional que satisfaça as desigualdades dadas.

**47.** $r^2 \le z \le 4$ **48.** $0 \le r \le 2\operatorname{sen}\theta, \quad 0 \le z \le 3$

**49.** $1 \le \rho \le 3$ **50.** $0 \le \phi \le \pi/6, \quad 0 \le \rho \le 2$

**51.** São Petersburgo (antiga Leningrado), na Rússia, está localizada a 30° de longitude leste e 60°de latitude norte. Determine suas coordenadas esféricas e retangulares relativas aos eixos coordenados da Figura 11.8.9. Tome milhas como a unidade de distância e suponha que a Terra seja uma esfera de raio de 4.000 milhas.

**52.** (a) Mostre que a curva de interseção das superfícies $z = \operatorname{sen}\theta$ e $r = a$ (coordenadas cilíndricas) é uma elipse.
(b) Faça um esboço da superfície $z = \operatorname{sen}\theta$, com $0 \le \theta \le \pi/2$.

**53.** A figura abaixo mostra um cilindro circular reto de raio 10 cm que gira 3 rotações por minuto em torno do eixo $z$. No instante $t = 0$ s, um besouro no ponto (0, 10, 0) começa a andar diretamente para cima na face do cilindro a uma taxa de 0,5 cm/min.
(a) Determine as coordenadas cilíndricas do besouro depois de 2 min.
(b) Determine as coordenadas retangulares do besouro depois de 2 min.
(c) Determine as coordenadas esféricas do besouro depois de 2 min.

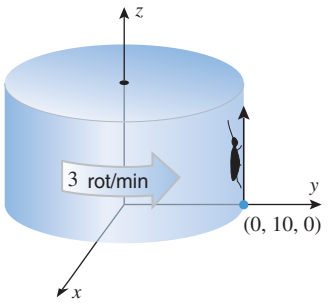



**Figura Ex-53**

**54.** Em referência ao Exercício 53, use um recurso gráfico computacional para fazer o gráfico da distância do besouro à origem como uma função do tempo.

**55.** **Texto** Discuta algumas aplicações práticas nas quais sejam úteis sistemas de coordenadas não retangulares.

**56.** **Texto** Na navegação celeste, são utilizados os termos "zênite" e "azimute". Quais são as relações desses termos com as coordenadas esféricas?

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 11.8

**1.** $r\cos\theta$; $r\operatorname{sen}\theta$; $z$ **2.** $\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta$; $\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$; $\rho\cos\phi$ **3.** $\rho\operatorname{sen}\phi$; $\theta$; $\rho\cos\theta$
**4.** (a) $(2, 7\pi/4, 2\sqrt{3})$ (b) $(4, 7\pi/4, \pi/6)$ **5.** (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ (b) $r^2 + z^2 = 25$ (c) $\rho = 5$

## EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 11

**1.** (a) Qual é a diferença entre um vetor e um escalar? Dê um exemplo físico de cada um.
(b) Como pode ser determinado se dois vetores são ou não ortogonais?
(c) Como pode ser determinado se dois vetores são ou não paralelos?
(d) Como pode ser determinado se três vetores com pontos iniciais em comum no espaço tridimensional situam-se no mesmo plano ou não?

**2.** (a) Esboce vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ com os quais $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ sejam ortogonais.
(b) Como podem ser usados vetores para determinar se quatro pontos no espaço tridimensional situam-se no mesmo plano?
(c) Se forças $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i}$ e $\mathbf{F}_2 = \mathbf{j}$ forem aplicadas em um ponto no espaço bidimensional, quanta força deve ser aplicada nesse ponto para cancelar o efeito combinado de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$?
(d) Escreva uma equação da esfera com centro $(1, -2, 2)$ que passa pela origem.

**3.** (a) Desenhe uma figura que mostre os ângulos diretores $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ de um vetor.
(b) Quais são os componentes de um vetor unitário no espaço bidimensional que formam um ângulo de 120° com o vetor $\mathbf{i}$ (duas respostas)?
(c) Como podem ser usados vetores para determinar se um triângulo com vértices desconhecidos $P_1$, $P_2$ e $P_3$ tem um ângulo obtuso?
(d) Verdadeiro ou falso: O produto vetorial de vetores ortogonais unitários é um vetor unitário. Explique o seu raciocínio.

**4.** (a) Faça uma tabela que mostre todos os possíveis produtos vetoriais dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$.
(b) Dê uma interpretação geométrica de $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.
(c) Dê uma interpretação geométrica de $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.
(d) Escreva uma equação do plano que passa pela origem e é perpendicular à reta $x = t$, $y = 2t$, $z = -t$.

**5.** Em cada parte, determine uma equação da esfera com centro $(-3, 5, -4)$ e que satisfaça a condição dada.
(a) Tangente ao plano $xy$.
(b) Tangente ao plano $xz$.
(c) Tangente ao plano $yz$.

**6.** Determine a maior e a menor distâcia entre o ponto $P(1, 1, 1)$ e a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 6z - 6 = 0$$

**7.** Dados os pontos $P(3, 4)$, $Q(1, 1)$ e $R(5, 2)$, use métodos vetoriais para determinar as coordenadas do quarto vértice do paralelogramo cujos lados adjacentes são $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QR}$.

**8.** Sejam $\mathbf{u} = \langle 3, 5, -1\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 2, -2, 3\rangle$. Encontre

(a) $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$ (b) $\dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$

(c) $\|\mathbf{u}\|$ (d) $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

**9.** Sejam $\mathbf{a} = c\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Determine $c$ tal que
(a) $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sejam ortogonais.
(b) o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ seja $\pi/4$.
(c) o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ seja $\pi/6$.
(d) $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sejam paralelos.

**10.** Sejam $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ e $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$. Descreva o conjunto de todos os pontos $(x, y, z)$ com os quais
(a) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0 = 0$ (b) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{r}_0 = 0$

**11.** Mostre que se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores unitários e $\theta$ for o ângulo entre eles, então $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\theta$.

**12.** Determine o vetor de comprimento 5 e ângulos diretores $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 135°$.

**13.** Supondo que a força esteja em libras e a distância esteja em pés, determine o trabalho realizado por uma força constante $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ agindo sobre uma partícula que se move sobre uma reta que vai de $P(5, 7, 0)$ a $Q(6, 6, 6)$.

**14.** Supondo que a força esteja em newtons e a distância esteja em metros, determine o trabalho realizado pela resultante das forças constantes $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{F}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ agindo sobre uma partícula que se move sobre uma reta que vai de $P(-1, -2, 3)$ a $Q(0, 2, 0)$.

**15.** (a) Determine a área de um triângulo com vértices $A(1, 0, 1)$, $B(0, 2, 3)$ e $C(2, 1, 0)$.
(b) Use o resultado da parte (a) para determinar o comprimento da altura do vértice $C$ ao lado $AB$.

**16.** Verdadeiro ou falso? Explique o seu raciocínio.
(a) Se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
(b) Se $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
(c) Se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

**17.** Considere os pontos

$$A(1, -1, 2),\quad B(2, -3, 0),\quad C(-1, -2, 0),\quad D(2, 1, -1)$$

(a) Determine o volume do paralelepípedo que tenha os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ como arestas adjacentes.
(b) Determine a distância de $D$ para o plano contendo $A$, $B$ e $C$.

**18.** Suponha que uma força $\mathbf{F}$ com uma magnitude de 9 lb seja aplicada ao conjunto alavanca-haste mostrado na figura abaixo.
(a) Expresse a força $\mathbf{F}$ na forma de componentes.
(b) Determine o momento vetorial de $\mathbf{F}$ sobre a origem.

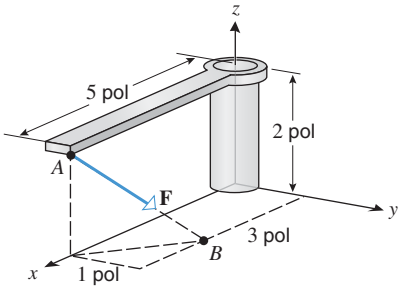



**Figura Ex-18**

**19.** Seja $P$ o ponto $(4, 1, 2)$. Encontre equações paramétricas da reta que passa por $P$ que é paralela ao vetor $\langle 1, -1, 0\rangle$.

**20.** (a) Determine as equações paramétricas da interseção dos planos $2x + y - z = 3$ e $x + 2y + z = 3$.
(b) Determine o ângulo agudo entre os dois planos.

**21.** Encontre uma equação do plano que é paralelo ao plano $x + 5y - z + 8 = 0$ e que contém o ponto $(1, 1, 4)$.

**22.** Encontre uma equação do plano que passa pelo ponto $(4, 3, 0)$ e que é paralelo aos vetores $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ e $2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

**23.** Que condição devem satisfazer as constantes para que os planos

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \quad\text{e}\quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

sejam paralelos?

**24.** (a) Liste os seis tipos básicos de superfícies quádricas e descreva seus traços nos planos paralelos aos planos coordenados.
(b) Dê as coordenadas dos pontos que resultam quando o ponto $(x, y, z)$ é refletido pelo plano $y = x$, pelo plano $y = z$ e pelo plano $x = z$.
(c) Descreva a interseção das superfícies $r = 5$ e $z = 1$ em coordenadas cilíndricas.
(d) Descreva a interseção das superfícies $\phi = \pi/4$ e $\theta = 0$ em coordenadas esféricas.

**25.** Em cada parte, identifique a superfície completando os quadrados.
(a) $x^2 + 4y^2 - z^2 - 6x + 8y + 4z = 0$
(b) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 12z = 0$
(c) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

**26.** Em cada parte, expresse a equação em coordenadas cilíndricas e esféricas.
(a) $x^2 + y^2 = z$ (b) $x^2 - y^2 - z^2 = 0$

**27.** Em cada parte, expresse a equação em coordenadas retangulares.
(a) $z = r^2\cos 2\theta$ (b) $\rho^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi\cos\theta = 1$

**28-29** Esboce no espaço tridimensional o sólido descrito em coordenadas cilíndricas pelas desigualdades dadas. ■

**28.** (a) $1 \le r \le 2$ (b) $2 \le z \le 3$
(c) $\pi/6 \le \theta \le \pi/3$
(d) $1 \le r \le 2$, $2 \le z \le 3$ e $\pi/6 \le \theta \le \pi/3$

**29.** (a) $r^2 + z^2 \le 4$ (b) $r \le 1$
(c) $r^2 + z^2 \le 4$ e $r > 1$

**30-31** Esboce no espaço tridimensional o sólido descrito em coordenadas esféricas pelas desigualdades dadas. ■

**30.** (a) $0 \le \rho \le 2$ (b) $0 \le \phi \le \pi/6$
(c) $0 \le \rho \le 2$ e $0 \le \phi \le \pi/6$

**31.** (a) $0 \le \rho \le 5$, $0 \le \phi \le \pi/2$ e $0 \le \theta \le \pi/2$
(b) $0 \le \phi \le \pi/3$ e $0 \le \rho \le 2\sec\phi$
(c) $0 \le \rho \le 2$ e $\pi/6 \le \phi \le \pi/3$

**32.** Esboce a superfície cuja equação em coordenadas esféricas é $\rho = a(1 - \cos\phi)$. [*Sugestão*: A superfície tem a forma de uma fruta conhecida.]

## CAPÍTULO 11 ESTABELECENDO CONEXÕES

**1.** Defina um "operador rotação" $R$ sobre os vetores do plano $xy$ pela fórmula

$$R(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

(a) Verifique que $R$ gira os vetores por 90° no sentido anti-horário.

(b) Prove que $R$ tem as seguintes propriedades de linearidade:

$$R(c\mathbf{v}) = cR(\mathbf{v}) \quad \text{e} \quad R(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = R(\mathbf{v}) + R(\mathbf{w})$$

**2.** (a) Dado um triângulo no plano $xy$, associe a cada lado do triângulo um vetor normal que aponte para fora e cujo comprimento seja igual ao do lado correspondente. Prove que a soma dos três vetores normais resultantes é o vetor zero.

(b) Estenda o resultado da parte (a) para um polígono de $n$ lados no plano $xy$. [*Sugestão:* Use os resultados do exercício precedente.]

**3.** (a) Dado um tetraedro no espaço $xyz$, associe a cada face do tetraedro um vetor normal que aponte para fora e cujo comprimento seja numericamente igual à área da face correspondente. Prove que a soma dos quatro vetores normais resultantes é o vetor zero. [*Sugestão:* Use produtos vetoriais.]

(b) Estenda o resultado da parte (a) para uma pirâmide com uma base de quatro lados. [*Sugestão:* Divida a base em dois triângulos e use o resultado da parte (a) em cada tetraedro resultante.]

(c) Podemos estender os resultados das partes (a) e (b) a outros poliedros?

**4.** Dado um tetraedro no espaço, escolha um vértice e denote por $A$, $B$ e $C$ as três faces que se encontram nesse vértice. Sejam $a$, $b$ e $c$ as respectivas áreas dessas faces e seja $d$ a área da quarta face do tetraedro. Seja $\alpha$ o ângulo (interno) entre as faces $A$ e $B$, $\beta$ o ângulo entre as faces $B$ e $C$ e $\gamma$ o ângulo entre as faces $A$ e $C$.

(a) Prove que

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - 2bc\cos\beta - 2ac\cos\gamma$$

Esse resultado é conhecido como a ***lei dos cossenos de tetraedros***. [*Sugestão:* Use a parte (a) do exercício precedente.]

(b) Usando o resultado da parte (a) como motivação, enuncie e demonstre um "Teorema de Pitágoras para Tetraedros".

**5.** Qualquer círculo que esteja contido em uma esfera pode ser dado pela interseção da esfera e algum plano. Se o plano passar pelo centro da esfera, diremos que o círculo é um ***círculo máximo***. Dados dois pontos de uma esfera, a ***distância de círculo máximo*** entre esses dois pontos é o comprimento do menor arco de algum círculo máximo que contenha os dois pontos. Seja $\Sigma$ uma esfera de raio $\rho$ centrada na origem do espaço. Se os pontos $P$ e $Q$ da esfera $\Sigma$ tiverem coordenadas esféricas $(\rho, \theta_1, \phi_1)$ e $(\rho, \theta_2, \phi_2)$, respectivamente, prove que a distância de círculo máximo entre $P$ e $Q$ será dada por

$$\rho \arccos(\cos\phi_1 \cos\phi_2 + \cos(\theta_1 - \theta_2)\operatorname{sen}\phi_1 \operatorname{sen}\phi_2)$$

**6.** Um navio ao mar está no ponto $A$, que está a 60° de longitude oeste e 40° de latitude norte. O navio viaja ao ponto $B$, que está a 40° de longitude oeste e 20° de latitude norte. Supondo que a Terra seja uma esfera com raio de 6.370 quilômetros, determine a menor distância que o navio pode viajar indo de $A$ para $B$, dado que a menor distância entre os dois pontos sobre uma esfera está ao longo do arco do círculo máximo que une os pontos. [*Sugestão*: Introduza um sistema de coordenadas $xyz$ como na Figura 11.8.9 e use o resultado do exercício precedente.]

© Krystian Janczyński/iStockphoto

# 12 FUNÇÕES VETORIAIS

*O projeto de uma montanha-russa requer o entendimento dos princípios matemáticos que governam o movimento de objetos de velocidade e posição variáveis.*

Neste capítulo, consideraremos funções cujos valores são vetores. Tais funções fornecem uma maneira unificada de estudar curvas paramétricas nos espaços bi e tridimensional e são uma ferramenta básica para a análise do movimento de partículas ao longo de uma trajetória curva. Começaremos desenvolvendo o Cálculo dessas funções vetoriais – mostraremos como diferenciar e integrar tais funções e desenvolveremos algumas propriedades básicas dessas operações. Aplicaremos, então, essas ferramentas do Cálculo para definir três vetores fundamentais que podem ser usados para descrever características básicas de curvas, como tendências de curvatura e torção. Uma vez feito isso, desenvolveremos o conceito de velocidade e aceleração para tais movimentos e aplicaremos esses conceitos para explicar vários fenômenos físicos. Finalmente, usaremos o Cálculo das funções vetoriais para desenvolver princípios básicos da atração gravitacional e deduzir as leis do movimento planetário de Kepler.

## 12.1 INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES VETORIAIS

*Na Seção 11.5, discutimos equações paramétricas de retas no espaço tridimensional. Nesta seção, discutiremos curvas paramétricas mais gerais no espaço tridimensional e mostraremos como a notação vetorial pode ser usada para expressar equações paramétricas nos espaços bi e tridimensional em uma forma mais compacta. Isso nos conduzirá a um novo tipo de função, a saber, funções que associam vetores a números reais. Tais funções têm muitas aplicações importantes na Física e na Engenharia.*

### CURVAS PARAMÉTRICAS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

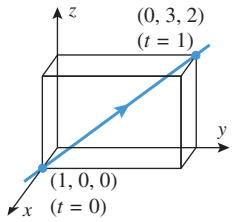
Lembre-se de que, na Seção 10.1, foi visto que se $f$ e $g$ forem funções bem-comportadas, então o par de equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t) \tag{1}$$

gera uma curva no espaço bidimensional que é traçada em um sentido específico à medida que o parâmetro $t$ cresce. Definimos esse sentido como sendo a *orientação* da curva ou a *direção de crescimento do parâmetro*, e chamamos a curva junto com a sua orientação de *gráfico* das equações paramétricas ou *curva paramétrica* representada pelas equações. Analogamente, se $f$, $g$ e $h$ forem três funções bem-comportadas, então as equações paramétricas

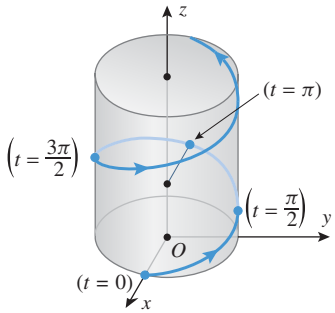
$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \tag{2}$$

geram uma curva no espaço tridimensional que é traçada em um sentido específico à medida que $t$ cresce. Como no espaço bidimensional, esse sentido é chamado de ***orientação*** ou ***sen-***



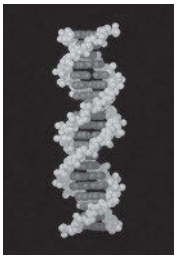

$x = 1 - t,\ y = 3t,\ z = 2t$

**Figura 12.1.1**




$x = a\cos t,\ y = a\,\text{sen}\,t,\ z = ct$

**Figura 12.1.2**



Ken Eward/Biografx/Photo Researchers, Inc.
*A hélice circular descrita no Exemplo 2 ocorre na natureza. Acima está uma representação computacional da hélice dupla da molécula de DNA (ácido desoxirribonucleico). Essa estrutura contém todas as instruções herdadas necessárias para o desenvolvimento de um organismo vivo.*

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para gerar a tricuspoide na Figura 12.1.3, e mostre que essa curva paramétrica é orientada no sentido anti-horário

***tido do parâmetro crescente***, e a curva junto com a sua orientação é chamada de ***gráfico*** das equações paramétricas ou ***curva paramétrica*** representada pelas equações. Se nenhuma restrição for enunciada explicitamente ou estiver implícita pelas equações, então será entendido que $t$ varia no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

**▶ Exemplo 1** As equações paramétricas

$$x = 1 - t, \quad y = 3t, \quad z = 2\text{t}$$

representam uma reta no espaço tridimensional que passa pelo ponto (1, 0, 0) e é paralela ao vetor $\langle -1, 3, 2\rangle$. Como $x$ decresce à medida que $t$ cresce, a reta tem a orientação mostrada na Figura 12.1.1. ◀

**▶ Exemplo 2** Descreva a curva paramétrica representada pelas equações

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\text{sen}\,t, \quad z = ct$$

onde $a$ e $c$ são constantes positivas.

***Solução*** À medida que o parâmetro $t$ cresce, também cresce o valor de $z = ct$; logo, $(x, y, z)$ move-se para cima. Porém, à medida que $t$ cresce, o ponto $(x, y, z)$ também se move em uma trajetória diretamente acima do círculo

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\text{sen}\,t$$

no plano $xy$. A combinação desses movimentos para cima e circular produz uma curva com o formato de saca-rolha que se enrola num cilindro circular reto de raio $a$ centrado no eixo $z$ (Figura 12.1.2). Esta curva é chamada de ***hélice circular***. ◀

## CURVAS PARAMÉTRICAS GERADAS COM TECNOLOGIA

Exceto nos casos mais simples, pode ser difícil visualizar e desenhar curvas paramétricas sem o auxílio de um recurso computacional. Por exemplo, a tricúspide é o gráfico das equações paramétricas

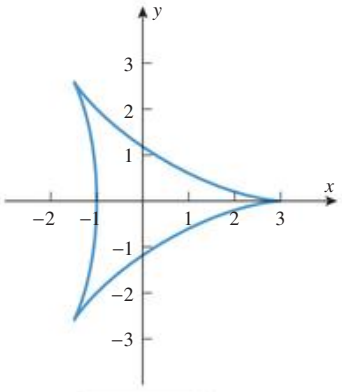
$$x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\,\text{sen}\,t - \text{sen}\,2t$$

Embora seja cansativo esboçar a tricúspide à mão, é fácil obter uma representação por computador e verificar o significado do nome dessa curva (Figura 12.1.3). No entanto, observe que a representação gráfica da tricúspide na Figura 12.1.3 é incompleta, por não exibir a orientação. Isso ocorre seguidamente com curvas geradas por recursos gráficos. (Alguns recursos gráficos traçam uma curva paramétrica suficientemente lenta para podermos ver a orientação, ou então fornecem algum recurso para esboçar os pontos ao longo da curva no sentido do parâmetro crescente.)

As curvas paramétricas no espaço tridimensional podem ser de difícil visualização mesmo com a ajuda de recursos computacionais. Por exemplo, a Figura 12.1.4*a* mostra o gráfico da curva paramétrica chamada de *nó de toro*, que foi produzida por um CAS. No entanto, mesmo esse gráfico é difícil de visualizar, pois não fica evidente se os pontos de superposição são interseções ou se uma parte da curva está na frente da outra. Para resolver esse problema de visualização, alguns recursos gráficos computacionais fornecem a capacidade de mergulhar a curva dentro de um tubo fino, como na Figura 12.1.4*b*. Esses gráficos são chamados de ***plotagem em tubos***.

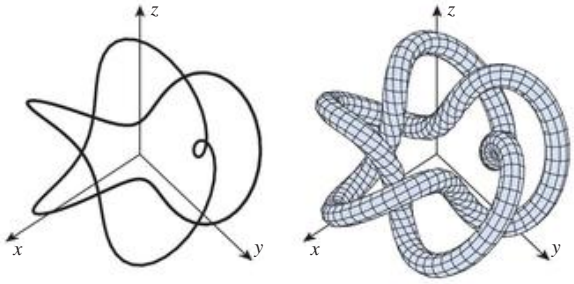
## EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE INTERSEÇÕES DE SUPERFÍCIES

As curvas no espaço tridimensional ocorrem frequentemente como interseções de superfícies. Por exemplo, a Figura 12.1.5*a* mostra uma parte da interseção dos cilindros $z = x^3$ e $y = x^2$. Um método para encontrar as equações paramétricas da curva de interseção é escolher uma



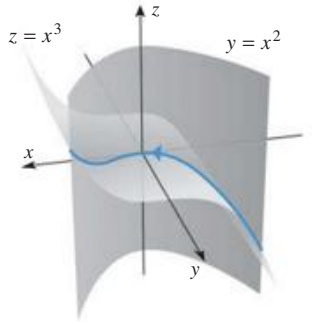

A tricúspide

**Figura 12.1.3**



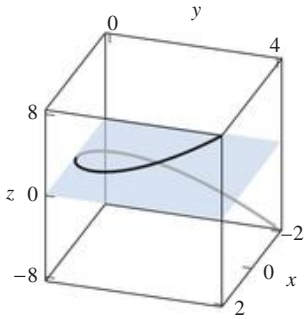

(*a*) (*b*)

**Figura 12.1.4**




$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(*a*)




(*b*)

**Figura 12.1.5**

das variáveis como parâmetro e usar as duas equações para expressar as duas variáveis restantes em termos daquele parâmetro. Em particular, se escolhermos $x = t$ como parâmetro e substituirmos isso nas equações $z = x^3$ e $y = x^2$, obtemos as equações paramétricas

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 \tag{3}$$

Essa curva é chamada de ***cúbica torcida***. A parte da cúbica torcida mostrada na Figura 12.1.5*a* corresponde a $t \geq 0$; o gráfico da cúbica torcida gerado no computador para valores positivos e negativos de $t$ está na Figura 12.1.5*b*. Alguns outros exemplos e técnicas para encontrar interseções de superfícies são discutidos nos exercícios.

## FUNÇÕES VETORIAIS

A cúbica torcida, definida pelas equações em (3), é o conjunto de pontos da forma $(t, t^2, t^3)$, com valores reais de $t$. Interpretando cada um desses pontos como ponto final de um vetor $\mathbf{r}$ cujo ponto inicial é a origem,

$$r = \langle x, y, z\rangle = \langle t, t^2, t^3\rangle = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

obtemos $\mathbf{r}$ como uma função do parâmetro $t$, ou seja, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Como essa função produz um *vetor*, dizemos que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ define $\mathbf{r}$ como uma ***função de valores vetoriais a uma variável real*** ou, mais simplesmente, uma ***função vetorial***. Os vetores que consideramos neste livro são bi ou tridimensionais, portanto diremos que uma função vetorial é uma função no espaço bi ou tridimensional, de acordo com o tipo de vetores que produz.

Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial no espaço tridimensional, então, dado qualquer valor admissível de $t$, o vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ pode ser representado em termos de componentes por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{4}$$

As funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são denominadas ***funções componentes*** ou ***componentes*** de $\mathbf{r}(t)$.

Enquanto uma função vetorial no espaço tridimensional, como a de (4), tem três componentes, uma função vetorial no espaço bidimensional tem somente dois componentes e, portanto, tem a forma

$$r(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$$
$$= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Encontre a função vetorial do espaço bidimensional cujas funções componentes são $x(t) = t$ e $y(t) = t^2$.

**► Exemplo 3** As funções componentes de

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

são

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^3 \ \blacktriangleleft$$

O ***domínio*** de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é o conjunto dos valores admissíveis de $t$. Se $\mathbf{r}(t)$ estiver definida em termos de funções componentes e o domínio não estiver explicitamente especificado, convencionamos que o domínio será a interseção dos domínios naturais das funções componentes e dizemos que esse é o ***domínio natural*** de $\mathbf{r}(t)$.

**▶ Exemplo 4** Encontre o domínio natural de

$$\mathbf{r}(t) = \langle \ln|t-1|, e^t, \sqrt{t}\rangle = (\ln|t-1|)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$$

***Solução*** Os domínios naturais das funções componentes

$$x(t) = \ln|t-1|, \quad y(t) = e^t, \quad z(t) = \sqrt{t}$$

são

$$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \quad (-\infty, +\infty), \quad [0, +\infty)$$

respectivamente. A interseção desses conjuntos é

$$[0, 1) \cup (1, +\infty)$$

(verifique), portanto o domínio natural de $\mathbf{r}(t)$ consiste em todos valores de $t$ tais que

$$0 \le t < 1 \quad \text{ou} \quad t > 1 \ \blacktriangleleft$$

## ■ GRÁFICOS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial no espaço bi ou tridimensional, então definimos o ***gráfico*** de $\mathbf{r}(t)$ como a curva paramétrica descrita pelas funções componentes de $\mathbf{r}(t)$. Por exemplo, se

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 - t, 3t, 2t\rangle = (1-t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \tag{5}$$

então o gráfico de $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ é o gráfico das equações paramétricas

$$x = 1 - t, \quad y = 3t, \quad z = 2t$$

Assim, o gráfico de (5) é a reta na Figura 12.1.1.

**▶ Exemplo 5** Descreva o gráfico da função vetorial

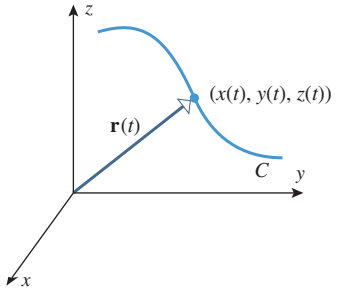
$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t\rangle = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

***Solução*** As equações paramétricas correspondentes são

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t$$

Assim, como vimos no Exemplo 2, o gráfico é uma hélice circular enrolada em torno de um cilindro de raio 1. ◀

Mais precisamente, para sermos claros deveríamos escrever $(\cos t)\mathbf{i}$ e $(\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$ em vez de $\cos t\,\mathbf{i}$ e $\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$. Contudo, é prática comum ignorar os parênteses em tais casos, já que não é possível interpretar essas expressões de outra maneira. Por quê?




Quando $t$ varia, a ponta do vetor posição $\mathbf{r}(t)$ descreve a curva $C$.

**Figura 12.1.6**

Até agora, consideramos curvas paramétricas como sendo caminhos traçados pelo movimento de pontos. Entretanto, se uma curva paramétrica for vista como o gráfico de uma função vetorial, então podemos imaginar, também, que o gráfico seja traçado pela ponta de um vetor em movimento. Por exemplo, se a curva $C$ no espaço tridimensional for o gráfico de

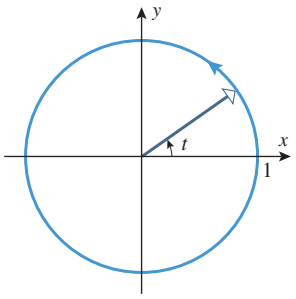
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

e se posicionarmos $\mathbf{r}(t)$ com o seu ponto inicial na origem, então seu ponto final cai na curva $C$ (como mostrado na Figura 12.1.6). Assim, quando $\mathbf{r}(t)$ é posicionado com seu ponto inicial na origem, seu ponto final descreve a curva $C$ quando o parâmetro $t$ varia, caso em que dizemos que $\mathbf{r}(t)$ é o ***vetor posição*** de $C$. Por simplicidade, às vezes deixamos implícita a dependência $t$ e escrevemos $\mathbf{r}$ em vez de $\mathbf{r}(t)$ para o vetor posição.

**▶ Exemplo 6** Esboce o gráfico e um vetor posição de

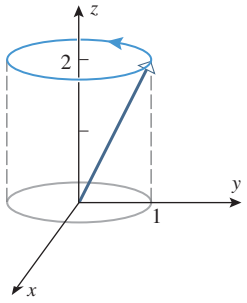
(a) $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

(b) $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$



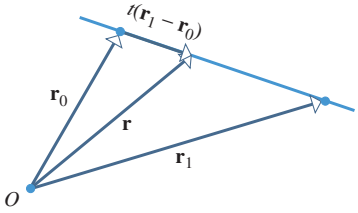

$\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

**Figura 12.1.7**




$\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

**Figura 12.1.8**




$\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$

**Figura 12.1.9**

***Solução (a)*** As equações paramétricas correspondentes são

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

logo o gráfico é um círculo de raio 1, centrado na origem, orientado no sentido anti-horário. O gráfico e um vetor posição são mostrados na Figura 12.1.7.

***Solução (b)*** As equações paramétricas correspondentes são

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = 2 \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

A partir da terceira equação, a ponta do vetor posição traça uma curva no plano $z = 2$ e das duas primeiras equações, a curva é um círculo de raio 1 centrado no ponto (0, 0, 2) e traçado no sentido anti-horário, olhando para baixo do eixo $z$. O gráfico e um vetor posição são mostrados na Figura 12.1.8. ◀

## FORMA VETORIAL DE UM SEGMENTO DE RETA

Lembre-se da Fórmula (9) da Seção 11.5 em que vimos que, se $\mathbf{r}_0$ for um vetor no espaço bi ou tridimensional, com seu ponto inicial na origem, então a reta que passa pelo ponto final de $\mathbf{r}_0$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v}$ pode ser dada na forma vetorial como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

Em particular, se $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$ são vetores no espaço bi ou tridimensional com seus pontos iniciais na origem, então a reta que passa pelos pontos finais desses vetores pode ser dada na forma vetorial como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \quad \text{ou} \quad \mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \tag{6–7}$$

como indicado na Figura 12.1.9.

É comum chamar (5) ou (6) de ***forma vetorial de uma reta por dois pontos*** e, para simplificar, dizer que a reta passa pelos *pontos* $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$ (em vez de dizer que ela passa pelos *pontos finais* de $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$).

Deve ser entendido em (6) e (7) que $t$ varia de $-\infty$ a $+\infty$. Contudo, se restringirmos a variação de $t$ ao intervalo $0 \le t \le 1$, então $\mathbf{r}$ variará de $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$. Assim, a equação

$$\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad (0 \le t \le 1) \tag{8}$$

representa o segmento de reta no espaço bi ou tridimensional que é traçado de $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.1 (Ver página 847 para respostas.)

**1.** (a) Expresse as equações paramétricas

$$x = \frac{1}{t}, \quad y = \sqrt{t}, \quad z = \operatorname{arc\,sen} t$$

como uma só equação vetorial da forma

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

(b) A equação vetorial na parte (a) define $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ como uma função vetorial. O domínio de $\mathbf{r}(t)$ é _____ e $\mathbf{r}\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____.

**2.** Descreva o gráfico de $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 2t, -1 + 3t\rangle$.

**3.** Descreva o gráfico de $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{i} + \cos^2 t\,\mathbf{j}$.

**4.** Encontre uma equação vetorial para a curva de interseção das superfícies $y = x^2$ e $z = y$ em termos do parâmetro $x = t$.

## EXERCÍCIOS 12.1 Recurso Gráfico

**1-4** Determine o domínio de r($t$) e o valor de r($t_0$). ■

**1.** $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - 3t\,\mathbf{j}; \quad t_0 = \pi$

**2.** $\mathbf{r}(t) = \langle\sqrt{3t+1}, t^2\rangle; \quad t_0 = 1$

**3.** $\mathbf{r}(t) = \cos \pi t\,\mathbf{i} - \ln t\,\mathbf{j} + \sqrt{t-2}\,\mathbf{k}; \quad t_0 = 3$

**4.** $\mathbf{r}(t) = \langle 2e^{-t}, \text{arc sen } t, \ln(1-t)\rangle; \quad t_0 = 0$

**5-6** Expresse as equações paramétricas como uma única equação vetorial da forma

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

**5.** $x = 3\cos t, \quad y = t + \text{sen } t$

**6.** $x = 2t, \quad y = 2\text{ sen } 3t, \quad z = 5\cos 3t$

**7-8** Determine as equações paramétricas que correspondam às equações vetoriais dadas.

**7.** $\mathbf{r} = 3t^2\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

**8.** $\mathbf{r} = (2t-1)\mathbf{i} - 3\sqrt{t}\,\mathbf{j} + \text{sen } 3t\,\mathbf{k}$

**9-14** Descreva o gráfico da equação.

**9.** $\mathbf{r} = (3-2t)\mathbf{i} + 5t\mathbf{j}$

**10.** $\mathbf{r} = 2\text{ sen } 3t\,\mathbf{i} - 2\cos 3t\,\mathbf{j}$

**11.** $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + (1+3t)\,\mathbf{k}$

**12.** $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 2\text{ sen } t\mathbf{k}$

**13.** $\mathbf{r} = 2\cos t\mathbf{i} - 3\text{ sen } t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**14.** $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + (1-t^2)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

**15.** (a) Obtenha a inclinação da reta no espaço bidimensional que está representada pela equação vetorial $\mathbf{r} = (1-2t)\,\mathbf{i} - (2-3t)\,\mathbf{j}$.
(b) Obtenha as coordenadas do ponto em que a reta

$$\mathbf{r} = (2+t)\mathbf{i} + (1-2t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

intersecta o plano $xz$.

**16.** (a) Obtenha o corte com o eixo $y$ da reta no espaço bidimensional que está representada pela equação vetorial $\mathbf{r} = (3+2t)\,\mathbf{i} + 5t\mathbf{j}$.
(b) Obtenha as coordenadas do ponto em que a reta

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (1+2t)\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$$

intersecta o plano $3x - y - z = 2$.

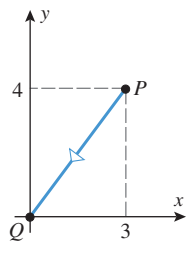
**17-18** Esboce o segmento de reta representado pela equação vetorial.

**17.** (a) $\mathbf{r} = (1-t)\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}; \quad 0 \le t \le 1$
(b) $\mathbf{r} = (1-t)\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}) + t(\mathbf{i}-\mathbf{j}); \quad 0 \le t \le 1$

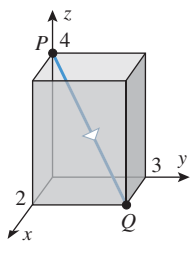
**18.** (a) $\mathbf{r} = (1-t)\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}) + t\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 1$
(b) $\mathbf{r} = (1-t)\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) + t(\mathbf{i}+\mathbf{j}); \quad 0 \le t \le 1$

**19-20** Escreva uma equação vetorial para o segmento de reta de $P$ a $Q$.

**19.**




**20.**




**21-30** Esboce o gráfico de $\mathbf{r}(t)$ e mostre o sentido de $t$ crescente.

**21.** $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$

**22.** $\mathbf{r}(t) = \langle 3t-4, 6t+2\rangle$

**23.** $\mathbf{r}(t) = (1+\cos t)\,\mathbf{i} + (3-\text{sen } t)\,\mathbf{j}; \quad 0 \le t \le 2\pi$

**24.** $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 5\text{ sen } t\rangle; \quad 0 \le t \le 2\pi$

**25.** $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \text{senh } t\mathbf{j}$

**26.** $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (2t+4)\mathbf{j}$

**27.** $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\text{ sen } t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

**28.** $\mathbf{r}(t) = 9\cos t\mathbf{i} + 4\text{ sen } t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

**29.** $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

**30.** $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \text{sen } t\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 2\pi$

**31-34 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

**31.** O domínio natural de uma função vetorial é a união dos domínios de suas funções componentes.

**32.** Se $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ for uma função vetorial no espaço bidimensional, então o gráfico de $\mathbf{r}(t)$ será uma superfície no espaço tridimensional.

**33.** Se $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$ forem vetores do espaço tridimensional, então o gráfico da função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad (0 \le t \le 1)$$

será o segmento de reta que liga os pontos finais de $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$.

**34.** O gráfico de $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\text{ sen } t, t\rangle$ é uma hélice circular.

**35-36** Esboce a curva de interseção das superfícies e obtenha equações paramétricas para a interseção em termos do parâmetro $x = t$. Confira seu trabalho com um recurso gráfico gerando a curva paramétrica sobre o intervalo $-1 \le t \le 1$.

**35.** $z = x^2 + y^2, \quad x - y = 0$

**36.** $y + x = 0, \quad z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

**37-38** Esboce a curva de interseção das superfícies e obtenha uma equação vetorial para a curva em termos do parâmetro $x = t$.

**37.** $9x^2 + y^2 + 9z^2 = 81, \quad y = x^2 \quad (z > 0)$

**38.** $y = x, \quad x + y + z = 1$

**39.** Mostre que o gráfico de

$$\mathbf{r} = t\,\text{sen } t\mathbf{i} + t\cos t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

situa-se no paraboloide $z = x^2 + y^2$.

**40.** Mostre que o gráfico de

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \frac{1+t}{t}\mathbf{j} + \frac{1-t^2}{t}\mathbf{k}, \quad t > 0$$

situa-se no plano $x - y + z + 1 = 0$.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**41.** Mostre que o gráfico de

$$\mathbf{r} = \text{sen } t\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\text{sen } t\mathbf{k}$$

é um círculo e determine o seu centro e raio. [*Sugestão:* Mostre que a curva situa-se numa esfera e também num plano.]

**42.** Mostre que o gráfico de

$$\mathbf{r} = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$$

é uma elipse e determine o comprimento dos eixos maior e menor. [*Sugestão*: Mostre que o gráfico situa-se em um cilindro circular e um plano e use o resultado no Exercício 44 da Seção 10.4.]

**43.** Para a hélice $\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$, obtenha o valor de $c$ ($c > 0$) tal que a hélice faça uma volta completa em uma distância de 3 unidades medida ao longo do eixo $z$.

**44.** Quantas revoluções fará a hélice circular

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 0{,}2t\,\mathbf{k}$$

em uma distância de 10 unidades medida ao longo do eixo $z$?

**45.** Mostre que a curva $\mathbf{r} = t\cos t\,\mathbf{i} + t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $t \geq 0$, situa-se sobre o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Descreva a curva.

**46.** Descreva a curva $\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$, onde $a$, $b$ e $c$ são constantes positivas tais que $a \neq b$.

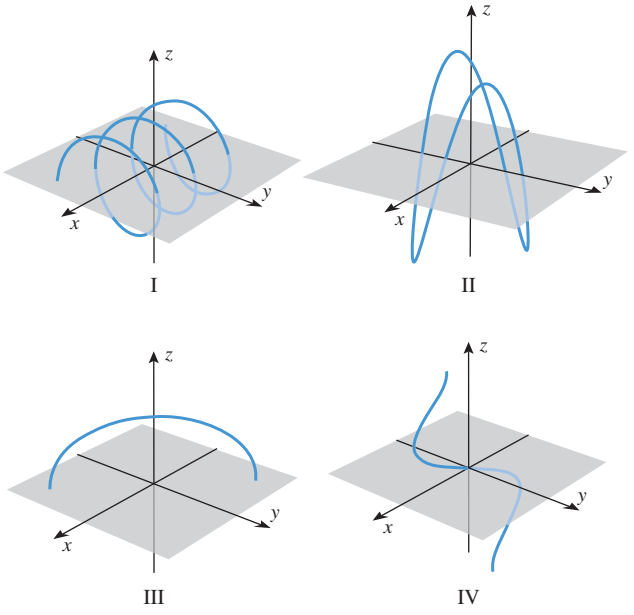
**47.** Em cada parte, associe a equação vetorial com um dos gráficos abaixo e explique seu raciocínio.

(a) $\mathbf{r} = t\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + \sqrt{2 - t^2}\,\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r} = \text{sen}\,\pi t\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{r} = \text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \text{sen}\,2t\,\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{r} = \frac{1}{2}t\,\mathbf{i} + \cos 3t\,\mathbf{j} + \text{sen}\,3t\,\mathbf{k}$




**48.** Confira suas conclusões do Exercício 47 gerando as curvas com um recurso gráfico. [*Nota*: O seu recurso gráfico pode olhar a curva de um ponto de vista diferente. Leia o manual para determinar como controlar o ponto de vista e veja se você pode gerar uma cópia razoável dos gráficos mostrados na figura ajustando o ponto de vista e escolhendo apropriadamente o intervalo dos valores de $t$.]

**49.** (a) Obtenha as equações paramétricas para a curva da interseção do cilindro circular $x^2 + y^2 = 9$ e o cilindro parabólico $z = x^2$ em termos de um parâmetro $t$ para o qual $x = 3\cos t$.

(b) Use um recurso gráfico para gerar a curva de interseção da parte (a).

**50.** (a) Esboce o gráfico de

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle 2t,\ \frac{2}{1 + t^2} \right\rangle$$

(b) Prove que a curva na parte (a) também é o gráfico da função

$$y = \frac{8}{4 + x^2}$$

[Os gráficos de $y = a^3/(a^2 + x^2)$, em que $a$ denota uma constante, foram estudados primeiramente pelo matemático francês Pierre de Fermat e, mais tarde, pelos matemáticos italianos Guido Grandi e Maria Agnesi. Qualquer uma dessas curvas é conhecida como uma "bruxa de Agnesi". Existem várias teorias sobre a origem desse nome. Alguns sugerem que foi uma tradução errada feita por Grandi ou Agnesi de um nome menos pitoresco do latim para o italiano. Outros culpam uma tradução para o inglês do tratado de 1748 de Agnesi intitulado "*Instituições Analíticas*".]

**51.** **Texto** Considere a curva $C$ dada pela interseção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e do plano $z = y + 2$. Esboce e identifique a curva $C$ e descreva um procedimento para encontrar uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ cujo gráfico seja $C$.

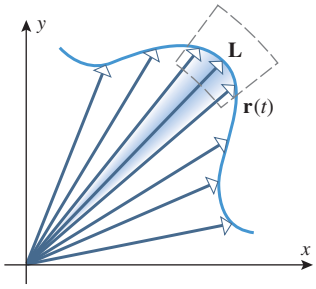
**52.** **Texto** Suponha que $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ sejam funções vetoriais do espaço bidimensional. Explique por que a resolução da equação $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(t)$ pode não fornecer todos os pontos em que os gráficos dessas funções intersectam.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.1

**1.** (a) $\mathbf{r} = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j} + \text{arc sen}\,t\,\mathbf{k}$ (b) $0 < t \leq 1$; $2\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \dfrac{\pi}{6}\mathbf{k}$ **2.** O gráfico é uma reta que passa por $(1, -1)$ com vetor diretor $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. **3.** O gráfico é o segmento de reta no plano $xy$ de $(0, 1)$ a $(1, 0)$ **4.** $\mathbf{r} = \langle t, t^2, t^2 \rangle$

# 12.2 CÁLCULO DE FUNÇÕES VETORIAIS

*Nesta seção, definiremos limites, derivadas e integrais de funções vetoriais e discutiremos suas propriedades.*




$\mathbf{r}(t)$ tende a $\mathbf{L}$ em magnitude, direção e sentido se $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$.

**Figura 12.2.1**

## LIMITES E CONTINUIDADE

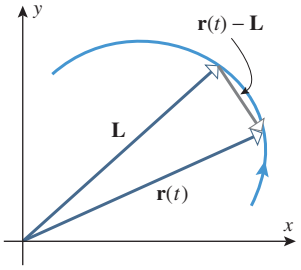
Nosso primeiro objetivo nesta seção é desenvolver uma noção do que significa uma função vetorial no espaço bi ou tridimensional $\mathbf{r}(t)$ tender para um vetor limite $\mathbf{L}$ quando $t$ tender a um número $a$. Ou seja, queremos definir

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L} \tag{1}$$

Uma maneira de motivar uma definição razoável de (1) é posicionar $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{L}$ com seus pontos iniciais na origem e interpretar esse limite como significando que o ponto final de $\mathbf{r}(t)$ tende ao ponto final de $\mathbf{L}$ quando $t$ tender a $a$ ou, equivalentemente, que o vetor $\mathbf{r}(t)$ tende ao vetor $\mathbf{L}$ tanto em magnitude quanto em direção e sentido quando $t$ tender a $a$ (Figura 12.2.1). Algebricamente, isso equivale a afirmar que

$$\lim_{t \to a} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| = 0 \tag{2}$$

(Figura 12.2.2). Assim, temos a seguinte definição.




$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\|$ é a distância entre os pontos finais dos vetores $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{L}$ quando esses vetores são posicionados com o mesmo ponto inicial.

**Figura 12.2.2**

**12.2.1 DEFINIÇÃO** Seja $\mathbf{r}(t)$ uma função vetorial definida em cada $t$ de algum intervalo aberto contendo o número $a$, exceto que $\mathbf{r}(t)$ não precisa estar definido em $a$. Escrevemos

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \to a} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| = 0$$

É intuitivamente claro que $\mathbf{r}(t)$ tenderá a um vetor limite $\mathbf{L}$ quando $t$ tender a $a$ se, e somente se, as funções componentes de $\mathbf{r}(t)$ tenderem aos componentes correspondentes de $\mathbf{L}$. Isso sugere o teorema a seguir, cuja prova formal será omitida.

Note que $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\|$ é um número real com cada valor de $t$, de modo que, embora essa expressão envolva uma função vetorial, o limite

$$\lim_{t \to a} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\|$$

é um limite comum de função real.

**12.2.2 TEOREMA**

(a) *Se* $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, *então*

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} x(t), \lim_{t \to a} y(t) \right\rangle = \lim_{t \to a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \to a} y(t)\mathbf{j}$$

*sempre que existirem os limites das funções componentes. Reciprocamente, existem os limites das funções componentes sempre que* $\mathbf{r}(t)$ *tender a um vetor limite quando* $t$ *tender a* $a$.

(b) *Se* $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, *então*

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} x(t), \lim_{t \to a} y(t), \lim_{t \to a} z(t) \right\rangle$$
$$= \lim_{t \to a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \to a} y(t)\mathbf{j} + \lim_{t \to a} z(t)\mathbf{k}$$

*sempre que existirem os limites das funções componentes. Reciprocamente, existem os limites das funções componentes sempre que* $\mathbf{r}(t)$ *tender a um vetor limite quando* $t$ *tender a* $a$.

Como poderíamos definir os limites laterais

$$\lim_{t \to a^+} \mathbf{r}(t) \quad \text{and} \quad \lim_{t \to a^-} \mathbf{r}(t)?$$

Os limites de funções vetoriais têm muitas das mesmas propriedades que os limites de funções reais. Por exemplo, supondo que os limites existam, o limite de uma soma é a soma dos limites, o limite de uma diferença é a diferença dos limites e um fator escalar constante pode ser tirado para fora de um símbolo de limite.

▶ **Exemplo 1** Seja $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos \pi t)\mathbf{k}$. Então

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \to 0} t^2\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t \to 0} e^t\right)\mathbf{j} - \left(\lim_{t \to 0} 2\cos \pi t\right)\mathbf{k} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Alternativamente, usando a notação de ternos ordenados para vetores,

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) = \lim_{t \to 0} \langle t^2, e^t, -2\cos \pi t \rangle = \left\langle \lim_{t \to 0} t^2, \lim_{t \to 0} e^t, \lim_{t \to 0} (-2\cos \pi t) \right\rangle = \langle 0, 1, -2 \rangle \quad \blacktriangleleft$$

Motivados pela definição de continuidade de funções reais, dizemos que uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é ***contínua*** em $t = a$ se

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a) \tag{3}$$

Ou seja, $\mathbf{r}(a)$ está definido, o limite de $\mathbf{r}(t)$ quando $t \to a$ existe, e ambos coincidem. Como no caso de funções reais, dizemos que $\mathbf{r}(t)$ é uma função vetorial ***contínua em um intervalo*** $I$ se for contínua em cada ponto de $I$ [com a ressalva de que, nos pontos extremos de $I$, o limite bilateral seja substituído pelo limite lateral apropriado]. Segue do Teorema 12.2.2 que uma função vetorial é contínua em $t = a$ se, e somente se, suas funções componentes são contínuas em $t = a$.

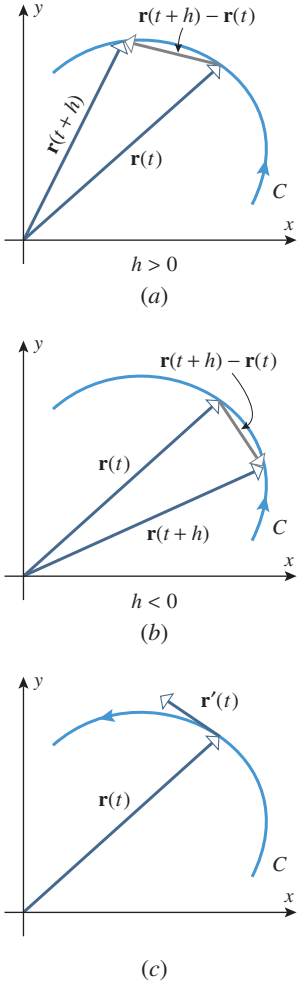



**Figura 12.2.3**

## DERIVADAS

A derivada de uma função vetorial é definida com um limite análogo ao da derivada de uma função real.

**12.2.3** DEFINIÇÃO Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial, definimos a ***derivada de*** $\mathbf{r}$ ***em relação a*** $t$ como a função vetorial $\mathbf{r}'$ dada por

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h} \tag{4}$$

O domínio de $\mathbf{r}'$ consiste em todos valores de $t$ do domínio de $\mathbf{r}(t)$ nos quais o limite existe.

A função $\mathbf{r}(t)$ é dita ***derivável*** ou ***diferenciável*** em $t$ se existir o limite em (4). Seguimos utilizando toda a notação usual de derivadas. Por exemplo, a derivada de $\mathbf{r}(t)$ pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)], \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{r}'(t) \quad \text{ou} \quad \mathbf{r}'$$

É importante não esquecer que $\mathbf{r}'(t)$ é um vetor, não um número, portanto tem magnitude, direção e sentido com qualquer valor de $t$ [exceto se $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$, caso em que $\mathbf{r}'(t)$ tem magnitude nula, mas nenhuma direção ou sentido específicos]. Na próxima seção, consideraremos o significado da magnitude de $\mathbf{r}'(t)$, mas por enquanto nosso objetivo é o de obter uma interpretação geométrica da direção e sentido de $\mathbf{r}'(t)$. Para isso, consideremos as partes $(a)$ e $(b)$ da Figura 12.2.3. Essas ilustrações mostram o gráfico $C$ de $\mathbf{r}(t)$ (com a orientação) e os vetores $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(t + h)$ e $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$ para $h$ positivo e negativo. Em ambos os casos, o vetor $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$ percorre a reta secante que une os pontos terminais de $\mathbf{r}(t + h)$ e $\mathbf{r}(t)$, mas com sentidos opostos nos dois casos. No caso em que $h$ é positivo, o vetor $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$ aponta na direção do parâmetro crescente, e no caso em que $h$ é negativo, ele aponta no sentido

oposto. Entretanto, no caso em que $h$ é negativo, a direção e o sentido são revertidos quando multiplicamos por $1/h$, de modo que, em ambos os casos, o vetor

$$\frac{1}{h}[\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)] = \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$$

aponta na direção do parâmetro crescente e percorre a reta secante. Quando $h \to 0$, a reta secante aproxima-se da reta tangente no ponto terminal de $\mathbf{r}(t)$, logo podemos concluir que o limite

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$$

(se ele existir e for não nulo) é um vetor que é tangente à curva $C$ na ponta de $\mathbf{r}(t)$ e que aponta na direção do parâmetro crescente (Figura 12.2.3*c*).

Podemos resumir essa discussão como segue.

**12.2.4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA** Suponha que $C$ seja o gráfico de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ no espaço bi ou tridimensional e que $\mathbf{r}'(t)$ exista e não seja nula com um valor dado de $t$. Se o vetor $\mathbf{r}'(t)$ estiver posicionado com seu ponto inicial no ponto final do vetor posição $\mathbf{r}(t)$, então $\mathbf{r}'(t)$ é tangente a $C$ e aponta na direção do parâmetro crescente.

Como os limites de funções vetoriais podem ser calculados componente a componente, parece razoável esperar que as derivadas também possam ser calculadas em termos de funções componentes. Esse é o resultado do próximo teorema.

**12.2.5 TEOREMA** *Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial, então $\mathbf{r}$ é diferenciável em $t$ se, e somente se, cada uma das funções componentes for diferenciável em $t$, caso em que as funções componentes de $\mathbf{r}'(t)$ são as derivadas das correspondentes funções componentes de $\mathbf{r}(t)$.*

**DEMONSTRAÇÃO** Para simplificar, daremos a prova no caso bidimensional; a prova no caso tridimensional é idêntica, exceto pelo componente adicional. Suponha que $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. Então

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[x(t+h)\mathbf{i} + y(t+h)\mathbf{j}] - [x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}]}{h} \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right)\mathbf{j} \\
&= x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**▶ Exemplo 2** Seja $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos \pi t)\mathbf{k}$. Então

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \frac{d}{dt}(t^2)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(e^t)\mathbf{j} - \frac{d}{dt}(2\cos \pi t)\mathbf{k} \\
&= 2t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + (2\pi \operatorname{sen} \pi t)\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

## REGRAS DE DERIVAÇÃO

Muitas das regras de derivação de funções reais têm análogos no contexto de derivação de funções vetoriais. Algumas delas estão enunciadas no teorema a seguir.

**12.2.6 TEOREMA** (***Regras de Derivação***) *Sejam* $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$ *e* $\mathbf{r}_2(t)$ *funções vetoriais que são todas do espaço bidimensional ou então do espaço tridimensional,* $f(t)$ *uma função real,* $k$ *um escalar e* $\mathbf{c}$ *um vetor constante (ou seja, um vetor cujo valor independa de* $t$*). Então, valem as seguintes regras de derivação:*

$$(a)\ \frac{d}{dt}[\mathbf{c}] = \mathbf{0}$$

$$(b)\ \frac{d}{dt}[k\mathbf{r}(t)] = k\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)]$$

$$(c)\ \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2(t)]$$

$$(d)\ \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)] - \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2(t)]$$

$$(e)\ \frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)] + \frac{d}{dt}[f(t)]\mathbf{r}(t)$$

As demonstrações da maioria dessas regras são consequências imediatas da Definição 12.2.3, embora a última regra seja mais facilmente demonstrada aplicando a regra do produto de funções reais às funções componentes. A demonstração do Teorema 12.2.6 é deixada como exercício.

## RETAS TANGENTES A GRÁFICOS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Motivado pela discussão da interpretação geométrica da derivada de uma função vetorial, estabelecemos a seguinte definição.

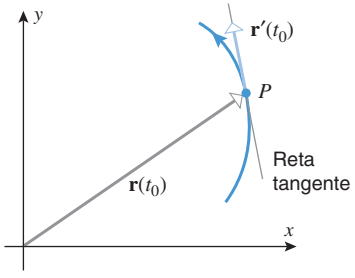



**Figura 12.2.4**

**12.2.7 DEFINIÇÃO** Seja $P$ um ponto no gráfico de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ e seja $\mathbf{r}(t_0)$ o vetor posição da origem a $P$ (Figura 12.2.4). Se $\mathbf{r}'(t_0)$ existir e $\mathbf{r}'(t_0) = 0$, então dizemos que $\mathbf{r}'(t_0)$ é um vetor tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ em $\mathbf{r}(t_0)$, e a reta que passa por $P$ que é paralela ao vetor tangente é denominada ***reta tangente*** ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ em $\mathbf{r}(t_0)$.

Sejam $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ e $\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(t_0)$. Segue, da Fórmula (9) da Seção 11.5, que a reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ em $\mathbf{r}_0$ é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}_0 \tag{5}$$

**▶ Exemplo 3** Obtenha equações paramétricas da reta tangente à hélice circular

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t$$

onde $t = t_0$, e use esse resultado para obter equações paramétricas da reta tangente no ponto em que $t = \pi$.

***Solução*** A equação vetorial da hélice é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

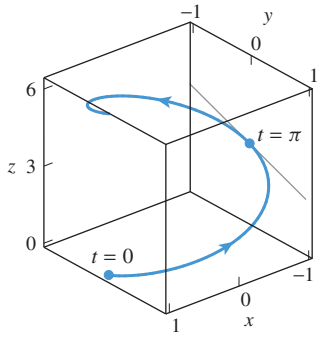



**Figura 12.2.5**

portanto temos

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = \cos t_0\mathbf{i} + \operatorname{sen} t_0\mathbf{j} + t_0\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(t_0) = (-\operatorname{sen} t_0)\mathbf{i} + \cos t_0\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Segue de (5) que a equação vetorial da reta tangente em $t = t_0$ é

$$\mathbf{r} = \cos t_0\mathbf{i} + \operatorname{sen} t_0\mathbf{j} + t_0\mathbf{k} + t[(-\operatorname{sen} t_0)\mathbf{i} + \cos t_0\mathbf{j} + \mathbf{k}]$$
$$= (\cos t_0 - t \operatorname{sen} t_0)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t_0 + t \cos t_0)\mathbf{j} + (t_0 + t)\mathbf{k}$$

Assim, as equações paramétricas da reta tangente em $t = t_0$ são

$$x = \cos t_0 - t \operatorname{sen} t_0, \quad y = \operatorname{sen} t_0 + t \cos t_0, \quad z = t_0 + t$$

Em particular, a reta tangente no ponto em que $t = \pi$ tem as equações paramétricas

$$x = -1, \quad y = -t, \quad z = \pi + t$$

O gráfico da hélice e essa reta tangente estão mostrados na Figura 12.2.5. ◄

**► Exemplo 4** Sejam

$$\mathbf{r}_1(t) = (\text{arc tg } t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{r}_2(t) = (t^2 - t)\mathbf{i} + (2t - 2)\mathbf{j} + (\ln t)\mathbf{k}$$

Os gráficos de $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ intersectam na origem. Encontre a medida em graus do ângulo agudo entre as retas tangentes aos gráficos de $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ na origem.

***Solução*** O gráfico de $\mathbf{r}_1(t)$ passa pela origem em $t = 0$, onde seu vetor tangente é

$$\mathbf{r}_1'(0) = \left\langle \frac{1}{1+t^2}, \cos t, 2t \right\rangle\Big|_{t=0} = \langle 1, 1, 0\rangle$$

O gráfico de $\mathbf{r}_2(t)$ passa pela origem em $t = 1$ (verifique), onde seu vetor tangente é

$$\mathbf{r}_2'(1) = \left\langle 2t - 1, 2, \frac{1}{t} \right\rangle\Big|_{t=1} = \langle 1, 2, 1\rangle$$

Pelo Teorema 11.3.3, o ângulo $\theta$ entre esses dois vetores tangentes satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\langle 1, 1, 0\rangle \cdot \langle 1, 2, 1\rangle}{\|\langle 1, 1, 0\rangle\| \, \|\langle 1, 2, 1\rangle\|} = \frac{1 + 2 + 0}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Segue que $\theta = \pi/6$, ou seja, 30º. ◄

## ■ DERIVADAS DE PRODUTOS ESCALARES E VETORIAIS

As regras seguintes, que são deduzidas nos exercícios, fornecem um método para diferenciar produtos escalares no espaço bi ou tridimensional e produtos vetoriais no espaço tridimensional.

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_2(t) \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2(t) \tag{7}$$

Observe que, em (6), não importa a ordem dos fatores em cada termo no lado direito, mas em (7) sim.

Na Geometria plana, aprende-se que uma reta tangente a um círculo é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Consequentemente, se um ponto mover-se ao longo de um círculo no espaço bidimensional que está centrado na origem, então se espera que o vetor posição e o vetor tangente em qualquer ponto sobre o círculo sejam ortogonais. Isso é a motivação para o útil teorema a seguir, que é aplicável em ambos os espaços, bi e tridimensional.

**12.2.8 TEOREMA** *Se* $\mathbf{r}(t)$ *for uma função vetorial no espaço bi ou tridimensional e* $\|\mathbf{r}(t)\|$ *for uma função constante de* $t$*, então*

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0 \tag{8}$$

*isto é,* $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ *são vetores ortogonais com qualquer* $t$*.*

**DEMONSTRAÇÃO** Segue de (6), com $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(t)$, que

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r}(t)$$

ou, de modo equivalente,

$$\frac{d}{dt}[\|\mathbf{r}(t)\|^2] = 2\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{9}$$

No entanto, $\|\mathbf{r}(t)\|^2$ é constante, logo a sua derivada é zero. Assim,

$$2\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$$

do que segue (8). ■

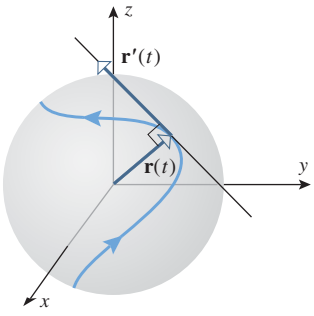



**Figura 12.2.6**

▶ **Exemplo 5** Da mesma forma que uma reta tangente ao círculo no espaço bidimensional é perpendicular ao raio no ponto de tangência, um vetor tangente a uma curva sobre a superfície de uma esfera no espaço tridimensional que está centrada na origem é ortogonal ao vetor posição naquele ponto de tangência (Figura 12.2.6). Para provar isso, suponha que o gráfico de $\mathbf{r}(t)$ situe-se sobre a superfície de uma esfera de raio positivo $k$ centrada na origem. Dado qualquer valor de $t$, temos $\|\mathbf{r}(t)\| = k$, logo, pelo Teorema 12.2.8,

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

e, portanto, o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ são ortogonais. ◀

## INTEGRAIS DEFINIDAS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial que é contínua no intervalo $a \le t \le b$, então definimos a ***integral definida*** de $\mathbf{r}(t)$ ao longo desse intervalo como o limite de somas de Riemann, exatamente como na Definição 5.5.1, no Volume 1, exceto que aqui o integrando é uma função vetorial. Especificamente, definimos

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k \tag{10}$$

Segue de (10) que a integral definida de $\mathbf{r}(t)$ ao longo do intervalo $a \le t \le b$ pode ser expressa como um vetor cujos componentes são as integrais definidas das funções componentes de $\mathbf{r}(t)$. Por exemplo, se $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, então

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt &= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t_k \\
&= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \left[ \left( \sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{i} + \left( \sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{j} \right] \\
&= \left( \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} x(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{i} + \left( \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} y(t_k^*)\Delta t_k \right) \mathbf{j} \\
&= \left( \int_a^b x(t)\,dt \right) \mathbf{i} + \left( \int_a^b y(t)\,dt \right) \mathbf{j}
\end{aligned}$$

Reescreva as Fórmulas (11) e (12) em notação de pares e ternos ordenados para vetores, com

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$$

e

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

respectivamente.

Em geral, temos

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\mathbf{j} \qquad \text{Espaço bidimensional} \qquad (11)$$

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b z(t)\,dt\right)\mathbf{k} \qquad \text{Espaço tridimensional} \qquad (12)$$

▶ **Exemplo 6** Seja $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos \pi t)k$. Então,

$$\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_0^1 t^2\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_0^1 e^t\,dt\right)\mathbf{j} - \left(\int_0^1 2\cos \pi t\,dt\right)\mathbf{k}$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big]_0^1 \mathbf{i} + e^t\Big]_0^1 \mathbf{j} - \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} \pi t\Big]_0^1 \mathbf{k} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + (e-1)\mathbf{j}$$ ◀

## REGRAS DE INTEGRAÇÃO

Da mesma maneira que a derivação, muitas das regras de integração de funções reais têm análogos para funções vetoriais.

**12.2.9** TEOREMA **(*Regras de Integração*)** *Sejam* $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ *funções vetoriais que são todas do espaço bidimensional ou então do espaço tridimensional e que sejam contínuas no intervalo* $a \le t \le b$ *e seja* $k$ *um escalar. Então, valem as seguintes regras de integração:*

(a) $\displaystyle\int_a^b k\mathbf{r}(t)\,dt = k\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt$

(b) $\displaystyle\int_a^b [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]\,dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt + \int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt$

(c) $\displaystyle\int_a^b [\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)]\,dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt - \int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt$

Omitiremos a demonstração.

## ANTIDERIVADAS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Uma ***antiderivada*** de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é uma função vetorial $\mathbf{R}(t)$ tal que

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t) \qquad (13)$$

Assim como no Capítulo 6, expressamos a Equação (13) usando notação de integral como

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C} \qquad (14)$$

onde $\mathbf{C}$ representa um *vetor* constante arbitrário.

Como a derivação de funções vetoriais pode ser efetuada componente a componente, segue que a antiderivação pode ser feita da mesma maneira. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

**► Exemplo 7**

$$\begin{aligned}\int (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j})\,dt &= \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int 3t^2\,dt\right)\mathbf{j} \\ &= (t^2 + C_1)\mathbf{i} + (t^3 + C_2)\mathbf{j} \\ &= (t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}) + (C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j}) = (t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}) + \mathbf{C}\end{aligned}$$

onde $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j}$ é um vetor constante de integração arbitrário. ◄

A maioria das propriedades conhecidas de integração de funções reais tem contrapartida vetorial. Por exemplo, a derivação e a integração de funções vetoriais são operações inversas, no sentido de que

$$\frac{d}{dt}\left[\int \mathbf{r}(t)\,dt\right] = \mathbf{r}(t) \qquad \text{e} \qquad \int \mathbf{r}'(t)\,dt = \mathbf{r}(t) + \mathbf{C} \tag{15–16}$$

Além disso, se $\mathbf{R}(t)$ for uma antiderivada de $\mathbf{r}(t)$ em um intervalo contendo $t = a$ e $t = b$, então temos a seguinte forma vetorial do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a) \tag{17}$$

**► Exemplo 8** Calcule a integral definida $\displaystyle\int_0^2 (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j})\,dt$.

***Solução*** Integrando os componentes, obtemos

$$\int_0^2 (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j})\,dt = t^2\Big]_0^2\mathbf{i} + t^3\Big]_0^2\mathbf{j} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

***Solução Alternativa*** A função $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ é uma antiderivada do integrando, pois $\mathbf{R}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$. Assim, segue de (17) que

$$\int_0^2 (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j})\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_0^2 = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}\Big]_0^2 = (4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) - (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$ ◄

**► Exemplo 9** Obtenha $\mathbf{r}(t)$ sabendo que $\mathbf{r}'(t) = \langle 3, 2t\rangle$ e $\mathbf{r}(1) = \langle 2, 5\rangle$.

***Solução*** Integrando $\mathbf{r}'(t)$ para encontrar $\mathbf{r}(t)$, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{r}'(t)\,dt = \int \langle 3, 2t\rangle\,dt = \langle 3t, t^2\rangle + \mathbf{C}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração. Para encontrar o valor de $\mathbf{C}$, substituímos $t = 1$ e usamos o valor dado de $\mathbf{r}(1)$ para obter

$$\mathbf{r}(1) = \langle 3, 1\rangle + \mathbf{C} = \langle 2, 5\rangle$$

de modo que $\mathbf{C} = \langle -1, 4\rangle$. Assim,

$$\mathbf{r}(t) = \langle 3t, t^2\rangle + \langle -1, 4\rangle = \langle 3t - 1, t^2 + 4\rangle$$ ◄

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.2 (Ver página 858 para respostas.)

**1.** (a) $\lim_{t \to 3} (t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) =$ _____

(b) $\lim_{t \to \pi/4} \langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle =$ _____

**2.** Encontre $\mathbf{r}'(t)$.

(a) $\mathbf{r}(t) = (4 + 5t)\mathbf{i} + (t - t^2)\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{t}, \operatorname{tg} t, e^{2t} \right\rangle$

**3.** Suponha que $\mathbf{r}_1(0) = \langle 3, 2, 1 \rangle$, $\mathbf{r}_2(0) = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{r}_1'(0) = \langle 0, 0, 0 \rangle$ e $\mathbf{r}_2'(0) = \langle -6, -4, -2 \rangle$. Use essa informação para calcular a derivada de cada função em $t = 0$.

(a) $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)$

(b) $\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{r}_1(t) + e^{2t}\mathbf{r}_2(t)$

(c) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$

(d) $f(t) = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$

**4.** (a) $\int_0^1 \langle 2t, t^2, \operatorname{sen} \pi t \rangle \, dt =$ _____

(b) $\int (t\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}) \, dt =$ _____

## EXERCÍCIOS 12.2 Recurso Gráfico

**1-4** Obtenha o limite. ■

**1.** $\lim_{t \to +\infty} \left\langle \frac{t^2 + 1}{3t^2 + 2}, \frac{1}{t} \right\rangle$

**2.** $\lim_{t \to 0^+} \left( \sqrt{t}\,\mathbf{i} + \frac{\operatorname{sen} t}{t}\mathbf{j} \right)$

**3.** $\lim_{t \to 2} (t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})$

**4.** $\lim_{t \to 1} \left\langle \frac{3}{t^2}, \frac{\ln t}{t^2 - 1}, \operatorname{sen} 2t \right\rangle$

**5-6** Determine se $\mathbf{r}(t)$ é contínua em $t = 0$. Explique seu raciocínio. ■

**5.** (a) $\mathbf{r}(t) = 3 \operatorname{sen} t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

**6.** (a) $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + \operatorname{cossec} t\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r}(t) = 5\mathbf{i} - \sqrt{3t + 1}\,\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$

**7.** Esboce o círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ e, em cada parte, desenhe o vetor com seu comprimento correto.

(a) $\mathbf{r}'(\pi/4)$ (b) $\mathbf{r}''(\pi)$ (c) $\mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(3\pi/2)$

**8.** Esboce o círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ e, em cada parte, desenhe o vetor com seu comprimento correto.

(a) $\mathbf{r}'(\pi/4)$ (b) $\mathbf{r}''(\pi)$ (c) $\mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(3\pi/2)$

**9-10** Obtenha $\mathbf{r}'(t)$. ■

**9.** $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j}$

**10.** $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{arc\,tg} t)\mathbf{i} + t \cos t\,\mathbf{j} - \sqrt{t}\,\mathbf{k}$

**11-14** Encontre o vetor $\mathbf{r}'(t_0)$; então, esboce o gráfico de r(t) no espaço bidimensional e desenhe o vetor tangente $\mathbf{r}'(t_0)$. ■

**11.** $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle$; $t_0 = 2$ **12.** $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$; $t_0 = 1$

**13.** $\mathbf{r}(t) = \sec t\mathbf{i} + \operatorname{tg} t\mathbf{j}$; $t_0 = 0$

**14.** $\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j}$; $t_0 = \pi/6$

**15-16** Encontre o vetor $\mathbf{r}'(t_0)$; então, esboce o gráfico de $\mathbf{r}(t)$ no espaço tridimensional e desenhe o vetor tangente $\mathbf{r}'(t_0)$. ■

**15.** $\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2 \cos t\mathbf{k}$; $t_0 = \pi/2$

**16.** $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $t_0 = \pi/4$

**17-18** Use um recurso gráfico para gerar o gráfico de $\mathbf{r}(t)$ e o gráfico da reta tangente em $t_0$ na mesma tela. ■

**17.** $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} \pi t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$; $t_0 = \frac{1}{2}$

**18.** $\mathbf{r}(t) = 3 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j}$; $t_0 = \pi/4$

**19-22** Obtenha equações paramétricas da reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ no ponto em que $t = t_0$. ■

**19.** $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (2 - \ln t)\mathbf{j}$; $t_0 = 1$

**20.** $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{i} - 2 \cos 3t\mathbf{j}$; $t_0 = 0$

**21.** $\mathbf{r}(t) = 2 \cos \pi t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} \pi t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$; $t_0 = \frac{1}{3}$

**22.** $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$; $t_0 = 2$

**23-26** Obtenha uma equação vetorial da reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ no ponto $P_0$ da curva. ■

**23.** $\mathbf{r}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + \sqrt{3t + 4}\,\mathbf{j}$; $P_0(-1, 2)$

**24.** $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\,\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$; $P_0(2, -\pi)$

**25.** $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - \frac{1}{t + 1}\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$; $P_0(4, 1, 0)$

**26.** $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j} + (\operatorname{arc\,tg} t)\mathbf{k}$; $P_0(0, 1, 0)$

**27.** Seja $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Determine

(a) $\lim_{t \to 0} (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}'(t))$ (b) $\lim_{t \to 0} (\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t))$

(c) $\lim_{t \to 0} (\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t))$.

**28.** Seja $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. Determine

$$\lim_{t \to 1} \mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))$$

**29-30** Calcule

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]$$

primeiro diferenciando o produto diretamente e, então, aplicando as Fórmulas (6) e (7). ■

**29.** $\mathbf{r}_1(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t) = t^4\mathbf{k}$

**30.** $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{k}$

**31-34** Calcule a integral definida. ■

**31.** $\int (3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j})\,dt$

**32.** $\int \left(t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right)\,dt$

**33.** $\int \langle te^t, \ln t\rangle\,dt$

**34.** $\int \langle e^{-t}, e^t, 3t^2\rangle\,dt$

**35-40** Calcule a integral definida. ■

**35.** $\int_0^{\pi/2} \langle \cos 2t, \operatorname{sen} 2t\rangle\,dt$

**36.** $\int_0^1 (t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j})\,dt$

**37.** $\int_0^2 \|t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}\|\,dt$

**38.** $\int_{-3}^3 \langle (3-t)^{3/2}, (3+t)^{3/2}, 1\rangle\,dt$

**39.** $\int_1^9 (t^{1/2}\mathbf{i} + t^{-1/2}\mathbf{j})\,dt$

**40.** $\int_0^1 (e^{2t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k})\,dt$

**41-44 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

**41.** Se uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ for contínua em $t = a$, então existirá o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(a+h) - \mathbf{r}(a)}{h}$$

**42.** Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial do espaço bidimensional e $\|\mathbf{r}(t)\|$ for constante, então $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ serão vetores paralelos, com qualquer $t$.

**43.** Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial que é contínua no intervalo $a \le t \le b$, então

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt$$

será um vetor.

**44.** Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial que é contínua no intervalo $[a, b]$, então, dado $a < t < b$, teremos

$$\frac{d}{dt}\left[\int_a^t \mathbf{r}(u)\,du\right] = \mathbf{r}(t)$$

**45-48** Resolva o problema de valor inicial vetorial para $\mathbf{y}(t)$ por integração, usando as condições iniciais para determinar as constantes de integração. ■

**45.** $\mathbf{y}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j},\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

**46.** $\mathbf{y}'(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j},\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

**47.** $\mathbf{y}''(t)\,\mathbf{i} + e^t\mathbf{j},\ \mathbf{y}(0) = 2\mathbf{i},\ \mathbf{y}'(0) = \mathbf{j}$

**48.** $\mathbf{y}''(t) = 12t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j},\ \mathbf{y}(0) = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j},\ \mathbf{y}'(0) = 0$

**49.** (a) Determine os pontos nos quais a curva

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$$

intersecta o plano $2x - y + z = -2$

(b) Para a curva e o plano da parte (a), determine, até o grau mais próximo, o ângulo agudo que a reta tangente à curva faz com a reta normal ao plano em cada ponto de interseção.

**50.** Determine em que ponto a reta tangente à curva

$$\mathbf{r} = e^{-2t}\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{k}$$

no ponto (1, 1, 0) intersecta o plano $yz$.

**51-52** Mostre que os gráficos de $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ intersectam-se no ponto $P$. Determine, até o grau mais próximo, o ângulo agudo entre as retas tangentes aos gráficos de $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ no ponto $P$. ■

**51.** $\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$
$\mathbf{r}_2(t) = (t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j} + (5-t)\mathbf{k};\ P(1, 1, 3)$

**52.** $\mathbf{r}_1(t) = 2e^{-t}\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + (t^2+3)\mathbf{k}$
$\mathbf{r}_2(t) = (1-t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^3+4)\mathbf{k};\ P(2, 1, 3)$

## ENFOCANDO CONCEITOS

**53.** Use a Fórmula (7) para deduzir a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

**54.** Sejam $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ funções vetoriais diferenciáveis. Use as Fórmulas (6) e (7) para mostrar que

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})] = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}] + \mathbf{u} \cdot \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{w}\right] + \mathbf{u} \cdot \left[\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{w}}{dt}\right]$$

**55.** Sejam $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2$ e $w_3$ funções diferenciáveis de $t$. Use o Exercício 54 para mostrar que

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1' & w_2' & w_3' \end{vmatrix}$$

**56.** Prove o Teorema 12.2.6 para o espaço bidimensional.

**57.** Deduza as Fórmulas (6) e (7) para o espaço tridimensional.

**58.** Prove o Teorema 12.2.9 para o espaço bidimensional.

**59.** **Texto** Explique o que significa uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ ser diferenciável e discuta interpretações geométricas de $\mathbf{r}'(t)$.

**60.** **Texto** Seja $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3 + 1\rangle$ e defina $\theta(t)$ como o ângulo entre $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$. O gráfico de $\theta = \theta(t)$ está dado na figura a seguir. Interprete as características importantes desse gráfico em termos da informação sobre $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$. Acompanhe sua discussão com um gráfico de $\mathbf{r}(t)$, destacando instâncias particulares do vetores $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$.

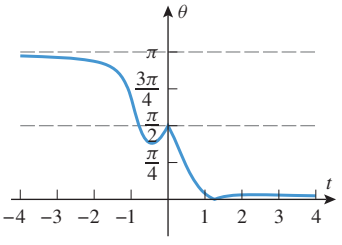



**Figura Ex-60**

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.2

**1.** (a) $9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (b) $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ **2.** (a) $\mathbf{r}'(t) = 5\mathbf{i} + (1 - 2t)\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{r}'(t) = \left\langle -\frac{1}{t^2}, \sec^2 t, 2e^{2t} \right\rangle$ **3.** (a) $\langle 6, 4, 2 \rangle$ (b) $\langle -4, 0, 4 \rangle$ (c) $\mathbf{0}$ (d) $-28$ **4.** (a) $\left\langle 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{\pi} \right\rangle$ (b) $\frac{t^2}{2}\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + e^t\mathbf{k} + \mathbf{C}$

## 12.3 MUDANÇA DE PARÂMETRO; COMPRIMENTO DE ARCO

*Observamos, em seções anteriores, que uma curva no espaço bi ou tridimensional pode ser representada parametricamente de várias maneiras. Por exemplo, na Seção 10.1, demos duas representações paramétricas de um círculo – uma na qual o círculo foi traçado no sentido horário e a outra, no sentido anti-horário. Algumas vezes, será desejável mudar o parâmetro de curva para um parâmetro diferente que seja mais conveniente para o problema em questão. Nesta seção, investigaremos questões associadas a mudanças de parâmetros e mostraremos que o comprimento do arco desempenha um papel especial na representação paramétrica das curvas.*

### PARAMETRIZAÇÕES LISAS

Os gráficos de funções vetoriais variam de contínuos e lisos a descontínuos e altamente erráticos. Neste texto, não nos ocuparemos com gráficos do último tipo; portanto, precisamos impor restrições para eliminar o comportamento indesejado. Diremos que uma parametrização $\mathbf{r}(t)$ de uma curva é uma ***parametrização lisa***, ou que $\mathbf{r}(t)$ é uma ***função vetorial lisa***, se $\mathbf{r}'(t)$ for contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ em cada valor permitido de $t$. Geometricamente, isso significa que uma curva com uma parametrização lisa não pode ter variações abruptas de direção quando o parâmetro cresce.

Matematicamente, a propriedade de ser "lisa" é da *parametrização*, e não da própria curva. No Exercício 38, veremos uma curva que é bem-comportada geometricamente e que tem uma parametrização que é lisa e outra que não é.

**▶ Exemplo 1** Determine se as seguintes funções vetoriais são lisas.

(a) $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$ $(a > 0, c > 0)$

(b) $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$

***Solução (a)*** Temos

$$\mathbf{r}'(t) = -a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Os componentes são funções contínuas, e não há valores de $t$ com os quais todos os três sejam zero (verifique), logo $\mathbf{r}(t)$ é uma função lisa. O gráfico de $\mathbf{r}(t)$ é a hélice circular da Figura 12.1.2.

***Solução (b)*** Temos

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

Embora os componentes sejam funções contínuas, elas são, ambas, iguais a zero em $t = 0$, logo $\mathbf{r}(t)$ não é uma função lisa. O gráfico de $\mathbf{r}(t)$, que é mostrado na Figura 12.3.1, é uma parábola semicúbica traçada para cima (veja o Exemplo 6 da Seção 10.1). Observe que, para os valores de $t$ ligeiramente menores do que zero, o ângulo entre $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{i}$ está próximo de $\pi$, e para valores de $t$ ligeiramente maiores do que zero, o ângulo está próximo de 0; por consequência, há uma súbita reversão do sentido do vetor tangente quando $t$ cresce e passa por $t = 0$ (veja o Exercício 44). ◀

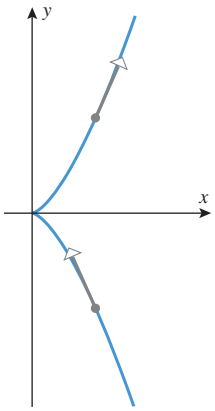



**Figura 12.3.1**

## COMPRIMENTO DE ARCO DO PONTO DE VISTA VETORIAL

Pelo Teorema 10.1.1, o comprimento de arco $L$ de uma curva paramétrica

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \le t \le b) \tag{1}$$

é dado pela fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{2}$$

Analogamente, o comprimento do arco $L$ de uma curva paramétrica

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \le t \le b) \tag{3}$$

no espaço tridimensional é dado pela fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \tag{4}$$

As Fórmulas (2) e (4) têm formas vetoriais que podem ser obtidas fazendo-se

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Espaço bidimensional — Espaço tridimensional

Segue-se que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

Espaço bidimensional — Espaço tridimensional

e, portanto,

$$\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Espaço bidimensional — Espaço tridimensional

Substituir essas expressões em (2) e (4) nos leva ao seguinte teorema.

**12.3.1 TEOREMA** *Se $C$ for o gráfico no espaço bi ou tridimensional de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$, então seu comprimento de arco $L$ de $t = a$ a $t = b$ é*

$$L = \int_a^b \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\| dt \tag{5}$$

**► Exemplo 2** Determine o comprimento de arco da parte da hélice circular

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t$$

de $t = 0$ a $t = \pi$.

***Solução*** Seja $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k} = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t \rangle$. Então

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 1 \rangle \quad \text{e} \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

A partir do Teorema 12.3.1, o comprimento de arco da hélice é

$$L = \int_0^{\pi} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \int_0^{\pi} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\pi \quad \blacktriangleleft$$

## COMPRIMENTO DE ARCO COMO PARÂMETRO

Para muitos propósitos, o melhor parâmetro a ser usado para representar parametricamente uma curva no espaço bi ou tridimensional é o comprimento de arco medido ao longo da curva a partir de algum ponto de referência fixado. Isso pode ser feito como segue:

***Usando o Comprimento de Arco como Parâmetro***

**Passo 1** Selecione um ponto arbitrário sobre a curva $C$ para servir como um ***ponto de referência***.

**Passo 2** Iniciando do ponto de referência, escolhemos um sentido ao longo da curva para o ***sentido positivo*** e o outro como sendo o ***negativo***.

**Passo 3** Se $P$ for um ponto sobre a curva, seja $s$ o comprimento de arco "com sinal" ao longo de $C$ a partir do ponto de referência ao ponto $P$, onde $s$ é positivo se $P$ estiver no sentido positivo do ponto de referência e $s$ é negativo se $P$ estiver no sentido negativo. A Figura 12.3.2 ilustra essa ideia.

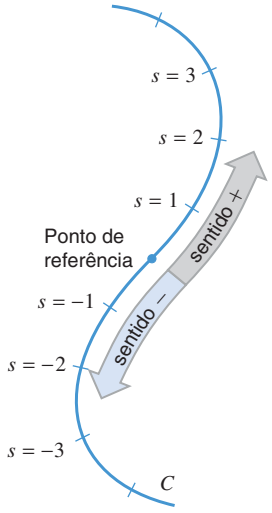



**Figura 12.3.2**

Por esse procedimento, dado um valor de $s$, é determinado um único ponto $P$ da curva. Por exemplo, $s = 2$ determina o ponto que está 2 unidades ao longo da curva no sentido positivo do ponto de referência, e $s = -\frac{3}{2}$ determina o ponto que está $\frac{3}{2}$ unidades ao longo da curva no sentido negativo do ponto de referência.

Vamos, agora, tratar $s$ como uma variável. Quando o valor de $s$ varia, o ponto correspondente $P$ move-se ao longo de $C$ e as coordenadas de $P$ tornam-se funções de $s$. Assim, no espaço bidimensional, as coordenadas de $P$ são $(x(s), y(s))$ e, no espaço tridimensional, elas são $(x(s), y(s), z(s))$. Portanto, no espaço bi ou tridimensional, a curva $C$ é dada pelas equações paramétricas

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad \text{ou} \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

Uma representação paramétrica de uma curva com comprimento de arco como o parâmetro é chamada de ***parametrização por comprimento de arco*** da curva. Note que uma curva dada terá geralmente infinitas maneiras diferentes de parametrizações por comprimento de arco, uma vez que o ponto de referência e a orientação podem ser escolhidos arbitrariamente.

**▶ Exemplo 3** Obtenha a parametrização por comprimento de arco do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ com orientação no sentido anti-horário e $(a, 0)$ como ponto de referência.

***Solução*** O círculo com a orientação no sentido anti-horário pode ser representado pelas equações paramétricas

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le 2\pi) \tag{6}$$

nas quais $t$ pode ser interpretado como o ângulo medido em radianos desde o eixo $x$ positivo até o raio da origem para o ponto $P(x, y)$ (Figura 12.3.3). Se tomarmos o sentido positivo para medir o comprimento de arco como sendo o anti-horário e tomarmos $(a, 0)$ como sendo o ponto de referência, então $s$ e $t$ estão relacionadas por

$$s = at \quad \text{ou} \quad t = s/a$$

Fazendo essa mudança de variável em (6) e notando que $s$ cresce de 0 a $2\pi a$ quando $t$ cresce de 0 a $2\pi$, obtém-se a seguinte parametrização por comprimento do arco do círculo:

$$x = a\cos(s/a), \quad y = a \operatorname{sen}(s/a) \quad (0 \le s \le 2\pi a) \quad \blacktriangleleft$$

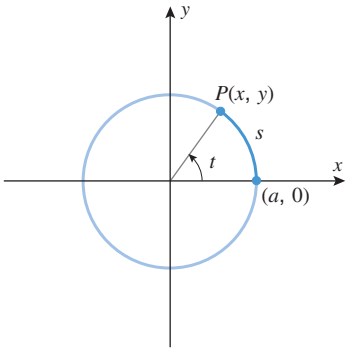



**Figura 12.3.3**

## MUDANÇA DE PARÂMETRO

Em muitas situações, a solução de um problema pode ser simplificada pela escolha certa do parâmetro da função vetorial ou da curva paramétrica. Os dois parâmetros mais comuns para as curvas no espaço bi ou tridimensional são o tempo e o comprimento do arco. Contudo, há outras possibilidades convenientes úteis. Por exemplo, analisando o movimento de uma partícula no espaço bidimensional, é frequentemente desejável parametrizar a sua trajetória em termos do ângulo $\phi$ entre o vetor tangente e o eixo $x$ positivo (Figura 12.3.4). Assim, nosso próximo objetivo é desenvolver métodos para mudar o parâmetro em uma função vetorial ou curva parametrizada. Isso nos permitirá mover livremente entre diferentes parametrizações possíveis.

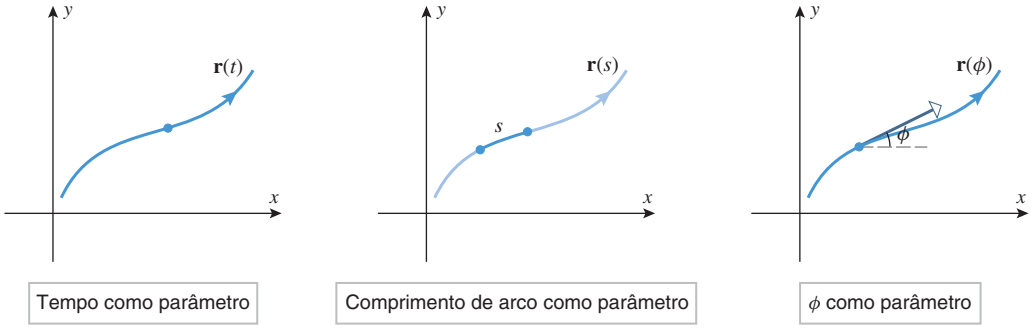



**Figura 12.3.4**

Uma ***mudança de parâmetro*** em uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é uma substituição $t = g(\tau)$ que produz uma nova função a valores vetoriais $\mathbf{r}(g(\tau))$ tendo o mesmo gráfico que $\mathbf{r}(t)$, mas possivelmente traçado diferentemente quando o parâmetro $\tau$ cresce.

► **Exemplo 4** Determine uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ para o círculo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

de modo que

(a) o círculo seja traçado no sentido anti-horário quando $\tau$ cresce ao longo do intervalo $[0, 1]$;

(b) o círculo seja traçado no sentido horário quando $\tau$ cresce ao longo do intervalo $[0, 1]$.

***Solução (a)*** O círculo dado é traçado no sentido anti-horário quando $t$ cresce. Assim, se escolhermos $g$ como sendo uma função crescente, então da relação $t = g(\tau)$ resultará que $t$ cresce quando $\tau$ cresce, portanto assegurando que o círculo seja traçado no sentido anti-horário quando $\tau$ cresce. Precisaremos, também, escolher $g$ de modo que $t$ cresça de 0 a $2\pi$ quando $\tau$ crescer de 0 a 1. Uma escolha simples de $g$ que satisfaz todos esses critérios é a função linear cujo gráfico está na Figura 12.3.5*a*. A equação dessa reta é

$$t = g(\tau) = 2\pi\tau \tag{7}$$

que é a mudança de parâmetro desejada. A representação do círculo resultante em termos do parâmetro $\tau$ é

$$\mathbf{r}(g(\tau)) = \cos 2\pi\tau\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2\pi\tau\,\mathbf{j} \quad (0 \le \tau \le 1)$$

***Solução (b)*** Para garantir que o círculo seja traçado no sentido horário, escolheremos $g$ como sendo uma função decrescente tal que $t$ decresça de $2\pi$ a 0 quando $\tau$ crescer de 0 a 1. Uma escolha simples de $g$ que realiza isso é a função linear

$$t = g(\tau) = 2\pi(1 - \tau) \tag{8}$$

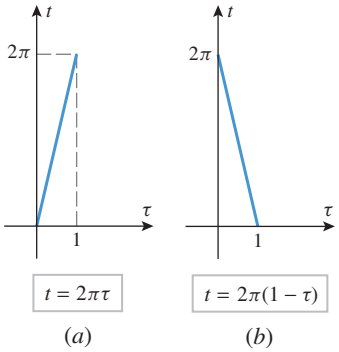



**Figura 12.3.5**

cujo gráfico está na Figura 12.3.5*b*. A representação do círculo resultante em termos do parâmetro $\tau$ é

$$\mathbf{r}(g(\tau)) = \cos(2\pi(1-\tau))\mathbf{i} + \operatorname{sen}(2\pi(1-\tau))\mathbf{j} \quad (0 \le \tau \le 1)$$

que simplifica para (verifique)

$$\mathbf{r}(g(\tau)) = \cos 2\pi\tau\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} 2\pi\tau\,\mathbf{j} \quad (0 \le \tau \le 1) \blacktriangleleft$$

Ao fazer uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ em uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, será importante assegurar que a nova função a valores vetoriais $\mathbf{r}(g(\tau))$ seja lisa se $\mathbf{r}(t)$ for lisa. Para estabelecer condições sob as quais isso acontece, necessitaremos a seguinte versão da regra da cadeia para funções vetoriais. A prova é deixada como exercício.

Mais precisamente, como $d\mathbf{r}/dt$ é um vetor e $dt/d\tau$ é um escalar, deveríamos escrever a Fórmula (9) na forma

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

com o escalar antes do vetor. No entanto, trocar a ordem dos fatores faz com que a fórmula seja mais fácil de ser lembrada, motivo pelo qual continuamos a usá-la assim.

**12.3.2 TEOREMA** (***Regra da Cadeia***) *Seja $\mathbf{r}(t)$ uma função vetorial no espaço bi ou tridimensional diferenciável em relação a $t$. Se $t = g(\tau)$ for uma mudança de parâmetro com $g$ diferenciável em relação a $\tau$, então $\mathbf{r}(g(\tau))$ será diferenciável em relação a $\tau$ e*

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau} \tag{9}$$

Uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ na qual $\mathbf{r}(g(\tau))$ é lisa se $\mathbf{r}(t)$ for lisa é chamada de ***mudança de parâmetro lisa***. Segue de (9) que $t = g(\tau)$ será uma mudança de parâmetro lisa se $dt/d\tau$ for contínua e $dt/d\tau \neq 0$ para todos os valores de $\tau$, uma vez que essas condições implicam que $d\mathbf{r}/d\tau$ é contínua e não nula se $d\mathbf{r}/dt$ for contínua e não nula. Mudanças de parâmetro lisas caem dentro de duas categorias – aquela para as quais $dt/d\tau > 0$ com $\tau$ (chamadas de ***mudanças de parâmetro positivas***) e aquelas para as quais $dt/d\tau < 0$ com $\tau$ (chamadas de ***mudanças de parâmetro negativas***). Uma mudança de parâmetro positiva preserva a orientação de uma curva paramétrica, e uma mudança de parâmetro negativa a inverte.

**► Exemplo 5** No Exemplo 4, a mudança de parâmetro dada na Fórmula (7) é positiva, uma vez que $dt/d\tau = 2\pi > 0$, e a mudança de parâmetro dada na Fórmula (8) é negativa, uma vez que $dt/d\tau = -2\pi < 0$. A mudança de parâmetro positiva preservou a orientação do círculo, e a mudança de parâmetro negativa a inverteu. ◄

## ENCONTRANDO PARAMETRIZAÇÕES POR COMPRIMENTO DE ARCO

A seguir, consideraremos o problema de encontrar uma parametrização por comprimento de arco de uma função vetorial expressa, inicialmente, em termos de algum outro parâmetro $t$. O teorema a seguir fornecerá um método geral para fazer isso.

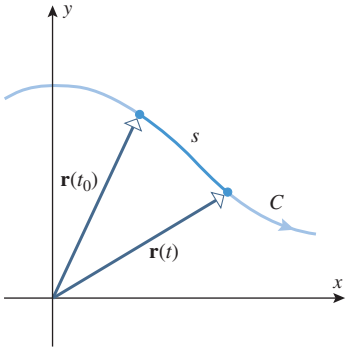



**Figura 12.3.6**

**12.3.3 TEOREMA** *Sejam $C$ o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$ no espaço bi ou tridimensional e $\mathbf{r}(t_0)$ um ponto qualquer de $C$. Então, a seguinte fórmula define uma mudança de parâmetro positiva de $t$ para $s$, onde $s$ é um parâmetro comprimento de arco tendo $\mathbf{r}(t_0)$ como seu ponto de referência* (Figura 12.3.6):

$$s = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right\| du \tag{10}$$

**DEMONSTRAÇÃO** A partir de (5), com $u$ como a variável de integração em vez de $t$, a integral representa o comprimento de arco daquela parte de $C$ entre $\mathbf{r}(t_0)$ e $\mathbf{r}(t)$ se $t > t_0$ e o negativo do comprimento de arco se $t < t_0$. Assim, $s$ é o parâmetro comprimento do arco com $\mathbf{r}(t_0)$ como seu ponto de referência e seu sentido positivo na direção de $t$ crescente. ■

Quando necessário, a Fórmula (10) pode ser expressa na forma de componentes como

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du \qquad \text{Espaço bidimensional} \qquad (11)$$

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du \qquad \text{Espaço tridimensional} \qquad (12)$$

**▶ Exemplo 6** Determine a parametrização por comprimento de arco da hélice circular

$$\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \qquad (13)$$

que tem como ponto de referência $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$ e a mesma orientação que a hélice dada.

***Solução*** Substituindo $t$ por $u$ em $\mathbf{r}$ na integração e tomando $t_0 = 0$ na Fórmula (10), obtemos

$$\mathbf{r} = \cos u\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} u\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = (-\operatorname{sen} u)\,\mathbf{i} + \cos u\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\left\|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right\| = \sqrt{(-\operatorname{sen} u)^2 + \cos^2 u + 1} = \sqrt{2}$$

$$s = \int_0^t \left\|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right\| du = \int_0^t \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}u\Big]_0^t = \sqrt{2}t$$

Assim, $t = s/\sqrt{2}$, logo (13) pode ser reparametrizado em termos de $s$ como

$$\mathbf{r} = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{k}$$

Podemos ter certeza de que essa reparametrização preserva a orientação da hélice uma vez que a Fórmula (10) produz uma mudança de parâmetro positiva. ◀

**▶ Exemplo 7** Um besouro caminha pelo tronco de uma árvore seguindo uma trajetória modelada pela hélice circular do Exemplo 6. O besouro inicia no ponto de referência (1, 0, 0) e sobe pela hélice por uma distância de 10 unidades. Quais são as coordenadas finais do besouro?

***Solução*** A partir do Exemplo 6, a parametrização por comprimento de arco da hélice relativa ao ponto de referência (1, 0, 0) é

$$\mathbf{r} = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

ou, expressa parametricamente,

$$x = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \quad y = \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \quad z = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

Assim, em $s = 10$, as coordenadas são

$$\left(\cos\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right), \frac{10}{\sqrt{2}}\right) \approx (0{,}705, 0{,}709, 7{,}07) \blacktriangleleft$$

**▶ Exemplo 8** Lembre-se, da Fórmula (9) da Seção 11.5, de que a equação

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{14}$$

é a forma vetorial da reta que passa pelo ponto terminal de $\mathbf{r}_0$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v}$. Determine a parametrização por comprimento de arco da reta que tem como ponto de referência $\mathbf{r}_0$ e a mesma orientação que a reta dada.

***Solução*** Substituindo $t$ por $u$ em (14) para a integração e tomando $t_0 = 0$ na Fórmula (10), obtemos

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{r}}{du} = \mathbf{v}$$

Pois $\mathbf{r}_0$ é constante

Segue que

$$s = \int_0^t \left\| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right\| du = \int_0^t \|\mathbf{v}\| \, du = \|\mathbf{v}\| u \Big]_0^t = t\|\mathbf{v}\|$$

Em palavras, a Fórmula (15) nos diz que a reta representada pela Equação (14) pode ser reparametrizada em termos do comprimento de arco com ponto de referência $\mathbf{r}_0$ normalizando $\mathbf{v}$ e, então, substituindo $t$ por $s$.

Isso implica que $t = s/\|\mathbf{v}\|$, logo (14) pode ser reparametrizada em termos de $s$ como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) \blacktriangleleft \tag{15}$$

**▶ Exemplo 9** Determine a parametrização por comprimento de arco da reta

$$x = 2t + 1, \quad y = 3t - 2$$

que tem a mesma orientação que a reta dada e usa $(1, -2)$ como ponto de referência.

***Solução*** A reta passa pelo ponto $(1, -2)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Para determinar a parametrização por comprimento de arco da reta, precisamos apenas reescrever a equação dada usando $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ em vez de $\mathbf{v}$ para determinar a direção e sentido, e substituir $t$ por $s$. Como

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$$

temos que as equações paramétricas da reta em termos de $s$ são

$$x = \frac{2}{\sqrt{13}}s + 1, \quad y = \frac{3}{\sqrt{13}}s - 2 \blacktriangleleft$$

## ■ PROPRIEDADES DAS PARAMETRIZAÇÕES POR COMPRIMENTO DE ARCO

Como os diversos parâmetros comprimento de arco para uma curva $C$ estão intimamente relacionados às características geométricas de $C$, a parametrização por comprimento do arco tem propriedades não oferecidas pelas outras parametrizações. Por exemplo, o teorema seguinte mostra que, se uma curva lisa for representada parametricamente usando um parâmetro comprimento de arco, então todos os vetores tangentes têm comprimento 1.

**12.3.4 TEOREMA**

(*a*) Se *C for o gráfico de uma função vetorial lisa* $\mathbf{r}(t)$ *no espaço bi ou tridimensional, onde t é um parâmetro geral, e se s for o parâmetro comprimento de arco para C definido pela Fórmula* (10), *então em cada valor de t o vetor tangente tem comprimento*

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \frac{ds}{dt} \tag{16}$$

(*b*) *Se C for o gráfico de uma função vetorial lisa* $\mathbf{r}(s)$ *no espaço bi ou tridimensional, onde s é um parâmetro comprimento de arco, então em cada valor de s o vetor tangente a C tem comprimento*

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = 1 \tag{17}$$

(*c*) *Se C for o gráfico de uma função vetorial lisa* $\mathbf{r}(t)$ *no espaço bi ou tridimensional e se* $\|d\mathbf{r}/dt\| = 1$ *em cada valor de t, então, dado qualquer valor de* $t_0$ *no domínio de* $\mathbf{r}$, *o parâmetro* $s = t - t_0$ *é um parâmetro comprimento de arco que tem seu ponto de referência no ponto de C em que* $t = t_0$.

**DEMONSTRAÇÃO (*a*)** Esse resultado segue aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 5.6.3, no Volume 1) à Fórmula (10).

**DEMONSTRAÇÃO (*b*)** Tome $t = s$ na parte (*a*).

**DEMONSTRAÇÃO (*c*)** Segue do Teorema 12.3.3 que a fórmula

$$s = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right\| du$$

define um parâmetro comprimento de arco para $C$ com ponto de referência $\mathbf{r}(0)$. Contudo, $\|d\mathbf{r}/du\| = 1$ por hipótese; logo, podemos reescrever a fórmula para $s$ como

$$s = \int_{t_0}^{t} du = u \Big]_{t_0}^{t} = t - t_0 \quad \blacksquare$$

As formas em componentes das Fórmulas (16) e (17) serão de interesse suficiente em seções posteriores para que as listemos aqui para referência:

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \qquad \text{Espaço bidimensional} \tag{18}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad \text{Espaço tridimensional} \tag{19}$$

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = 1 \qquad \text{Espaço bidimensional} \tag{20}$$

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1 \qquad \text{Espaço tridimensional} \tag{21}$$

Note que as Fórmulas (18) e (19) não envolvem $t_0$ e, portanto, não dependem de onde for escolhido o ponto de referência para $s$. Isso é de se esperar, uma vez que mudando o ponto de referência, deslocamos $s$ por uma constante (o comprimento de arco entre os dois pontos de referência), e essa constante desaparece na diferenciação.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.3 (Ver página 868 para respostas.)

1. Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial lisa, então a integral

$$\int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt$$

pode ser interpretada geometricamente como o _____.

2. Se $\mathbf{r}(s)$ for uma função vetorial lisa parametrizada pelo comprimento de arco $s$, então

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = _____$$

e o comprimento de arco do gráfico de $\mathbf{r}$ ao longo do intervalo $a \le s \le b$ é _____.

3. Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial lisa, então o parâmetro comprimento de arco $s$, com $\mathbf{r}(t_0)$ como ponto de referência, pode ser definido pela integral

$$s = \int_{t_0}^{t} _____ \, du$$

4. Suponha que $\mathbf{r}(t)$ seja uma função vetorial lisa de $t$ com $\mathbf{r}'(1) = \langle \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1 \rangle$ e seja $\mathbf{r}_1(t)$ definida pela equação $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(2 \cos t)$. Então $\mathbf{r}_1'(\pi/3) =$ _____.

## EXERCÍCIOS 12.3

**1-4** Determine se $\mathbf{r}(t)$ é uma função lisa de parâmetro $t$. ■

1. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + (3t^2 - 2t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
2. $\mathbf{r}(t) = \cos t^2\mathbf{i} + \operatorname{sen} t^2\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$
3. $\mathbf{r}(t) = t\,e^{-t}\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\mathbf{j} + \cos \pi t\mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} \pi t\mathbf{i} + (2t - \ln t)\mathbf{j} + (t^2 - t)\mathbf{k}$

**5-8** Encontre o comprimento de arco da curva paramétrica. ■

5. $x = \cos^3 t,\ y = \operatorname{sen}^3 t,\ z = 2;\ 0 \le t \le \pi/2$
6. $x = 3 \cos t,\ y = 3 \operatorname{sen} t,\ z = 4t;\ 0 \le t \le \pi$
7. $x = e^t, y = e^{-t}, z = \sqrt{2}t;\ 0 \le t \le 1$
8. $x = \frac{1}{2}t, y = \frac{1}{3}(1 - t)^{3/2}, z = \frac{1}{3}(1 + t)^{3/2};\ -1 \le t \le 1$

**9-12** Encontre o comprimento de arco do gráfico de $\mathbf{r}(t)$. ■

9. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}\sqrt{6}t^2\mathbf{k};\ 1 \le t \le 3$
10. $\mathbf{r}(t) = (4 + 3t)\mathbf{i} + (2 - 2t)\mathbf{j} + (5 + t)\mathbf{k};\ 3 \le t \le 4$
11. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ 0 \le t \le 2\pi$
12. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{k};$ $0 \le t \le \pi$

**13-16** Calcule $d\mathbf{r}/d\tau$ usando a regra de cadeia e, então, confira seu resultado expressando $\mathbf{r}$ em termos de $\tau$ e diferenciando. ■

13. $\mathbf{r} = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j};\ t = 4\tau + 1$
14. $\mathbf{r} = \langle 3 \cos t, 3 \operatorname{sen} t \rangle;\ t = \pi\tau$
15. $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + 4e^{-t}\mathbf{j};\ t = \tau^2$
16. $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3\,t^{3/2}\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ t = 1/\tau$

**17-20 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

17. Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial lisa do espaço bidimensional, então

$$\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

será um vetor.

18. Se a reta $y = x$ for parametrizada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, então $\mathbf{r}(t)$ será lisa.

19. Se $\mathbf{r}(t)$ for uma parametrização do gráfico de $y = |x|$ no espaço bidimensional, então $\mathbf{r}(t)$ será lisa.

20. Se uma curva $C$ do plano for parametrizada pela função vetorial lisa $\mathbf{r}(s)$, em que $s$ é um parâmetro comprimento de arco, então

$$\int_{-1}^{3} \|\mathbf{r}'(s)\|\, ds = 4$$

21. (a) Obtenha a parametrização por comprimento de arco da reta

$$x = t, \quad y = t$$

que tenha a mesma orientação que a reta dada e o ponto de referência $(0, 0)$.

(b) Obtenha a parametrização por comprimento de arco da reta

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t$$

que tenha a mesma orientação que a reta dada e o ponto de referência $(0, 0, 0)$.

22. Obtenha as parametrizações por comprimento de arco das retas do Exercício 21 que tenha os pontos de referência mencionados, mas orientações opostas às das retas dadas.

23. (a) Obtenha a parametrização por comprimento de arco da reta

$$x = 1 + t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = 4 + 2t$$

que tenha a mesma orientação que a reta dada e o ponto de referência $(1, 3, 4)$.

(b) Use as equações paramétricas obtidas na parte (a) para determinar o ponto sobre a reta que esteja a 25 unidades do ponto de referência na direção do parâmetro crescente.

**24.** (a) Obtenha a parametrização por comprimento de arco da reta

$$x = -5 + 3t, \quad y = 2t, \quad z = 5 + t$$

que tenha a mesma orientação que a reta dada e o ponto de referência $(-5, 0, 5)$.

(b) Use as equações paramétricas obtidas na parte (a) para determinar o ponto sobre a reta que esteja a 10 unidades do ponto de referência na direção do parâmetro crescente.

**25-30** Obtenha a parametrização por comprimento do arco da curva que tenha a mesma orientação que a curva dada e $t = 0$ como ponto de referência. ■

**25.** $\mathbf{r}(t) = (3 + \cos t)\,\mathbf{i} + (2 + \operatorname{sen} t)\,\mathbf{j};\ 0 \le t \le 2\pi$

**26.** $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j};\ 0 \le t \le \pi/2$

**27.** $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j};\ t \ge 0$

**28.** $\mathbf{r}(t) = (1 + t)^2\,\mathbf{i} + (1 + t)^3\,\mathbf{j};\ 0 \le t \le 1$

**29.** $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\,\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j};\ 0 \le t \le \pi/2$

**30.** $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} e^t\,\mathbf{i} + \cos e^t\,\mathbf{j} + \sqrt{3}e^t\mathbf{k};\ t \ge 0$

**31.** Mostre que o comprimento de arco da hélice circular $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = ct$ para $0 \le t \le t_0$ é $t_0\sqrt{a^2 + c^2}$.

**32.** Use o resultado do Exercício 31 para mostrar que a hélice circular

$$\mathbf{r} = a \cos t\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$$

pode ser expressa como

$$\mathbf{r} = \left(a \cos \frac{s}{w}\right)\mathbf{i} + \left(a \operatorname{sen} \frac{s}{w}\right)\mathbf{j} + \frac{cs}{w}\mathbf{k}$$

onde $w = \sqrt{a^2 + c^2}$ e $s$ é um parâmetro comprimento de arco com ponto de referência em $(a, 0, 0)$.

**33.** Determine uma parametização por comprimento de arco da cicloide

$$x = at - a \operatorname{sen} t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$
$$y = a - a \cos t$$

com $(0, 0)$ como ponto de referência.

**34.** Mostre que, em coordenadas cilíndricas, uma curva dada pelas equações paramétricas $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $z = z(t)$ para $a \le t \le b$ tem comprimento de arco

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

[*Sugestão*: Use as relações $x = r \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$.]

**35.** Em cada parte, use a fórmula do Exercício 34 para determinar o comprimento de arco da curva.

(a) $r = e^{2t}$, $\theta = t$, $z = e^{2t}$; $0 \le t \le \ln 2$

(b) $r = t^2$, $\theta = \ln t$, $z = t^3$; $1 \le t \le 2$

**36.** Mostre que, em coordenadas esféricas, uma curva dada pelas equações paramétricas $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\phi = \phi(t)$ para $a \le t \le b$ tem comprimento de arco

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}\,dt$$

[*Sugestão*: $x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\phi$.]

**37.** Em cada parte, use a fórmula do Exercício 36 para determinar o comprimento de arco da curva.

(a) $\rho = e^{-t}$, $\theta = 2t$, $\phi = \pi/4$; $0 \le t \le 2$

(b) $\rho = 2t$, $\theta = \ln t$, $\phi = \pi/6$; $1 \le t \le 5$

## ENFOCANDO CONCEITOS

**38.** (a) Esboce o gráfico de $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$. Mostre que $\mathbf{r}(t)$ é uma função vetorial lisa, mas a mudança de parâmetro $t = \tau^3$ produz uma função vetorial que não é lisa, embora tenha o mesmo gráfico que $\mathbf{r}(t)$.

(b) Verifique como as duas funções vetoriais são traçadas e como pode ser explicada a causa do problema.

**39.** Determine uma mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ para o semicírculo

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}\ (0 \le t \le \pi)$$

tal que

(a) o semicírculo seja traçado no sentido anti-horário quando $\tau$ varia no intervalo $[0, 1]$

(b) o semicírculo seja traçado no sentido horário quando $\tau$ varia no intervalo $[0, 1]$.

**40.** Qual mudança de parâmetro $t = g(\tau)$ devemos fazer para traçar o gráfico de $\mathbf{r}(t)$ $(0 \le t \le 1)$ no sentido oposto com $\tau$ variando de 0 a 1?

**41.** Conforme ilustrado na figura a seguir, um cabo de cobre com diâmetro de $\frac{1}{2}$ polegada deve envolver no formato de uma hélice circular um cilindro de 12 polegadas de diâmetro. Qual é o comprimento do cabo (medido ao longo de sua linha central) que irá fazer uma volta completa em torno do cilindro em uma distância de 20 polegadas medida ao longo do eixo do cilindro?

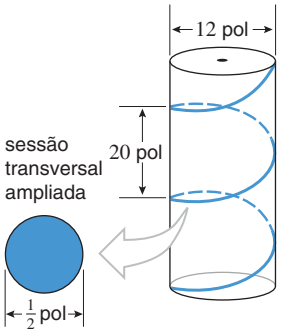



**Figura Ex-41**

**42.** Seja $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t^{3/2}\rangle$. Obtenha

(a) $\|\mathbf{r}'(t)\|$ (b) $\dfrac{ds}{dt}$ (c) $\displaystyle\int_0^2 \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$.

**43.** Seja $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$. Obtenha

(a) $\|\mathbf{r}'(t)\|$ (b) $\dfrac{ds}{dt}$ (c) $\displaystyle\int_0^2 \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$.

**44.** Seja $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ (ver Figura 12.3.1). Seja $\theta(t)$ o ângulo entre $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{i}$. Mostre que

$$\theta(t) \to \pi \quad \text{quando } t \to 0^- \quad \text{e} \quad \theta(t) \to 0 \text{ quando } t \to 0^+$$

**45.** Prove: Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função parametrizada lisa, então os ângulos entre $\mathbf{r}'(t)$ e os vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ são funções contínuas de $t$.

**46.** Prove a forma vetorial da regra da cadeia para o espaço bidimensional (Teorema 12.3.2) expressando $\mathbf{r}(t)$ em termos dos componentes.

**47.** **Texto** O triângulo de vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 1) tem três "esquinas". Discuta se é possível existir alguma função vetorial lisa cujo gráfico seja esse triângulo. Também discuta se é possível existir alguma função vetorial diferenciável cujo gráfico seja esse triângulo.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.3

**1.** comprimento de arco do gráfico de $\mathbf{r}(t)$ de $t = a$ a $t = b$ **2.** $1;\ b - a$ **3.** $\left\| \dfrac{d\mathbf{r}}{du} \right\|$ **4.** $\langle -3, 3, \sqrt{3} \rangle$

## 12.4 VETORES TANGENTE, NORMAL E BINORMAL UNITÁRIOS

*Nesta seção, discutiremos algumas das propriedades geométricas fundamentais de funções vetoriais. Nosso trabalho, aqui, terá aplicações importantes no estudo do movimento ao longo de uma trajetória curvilínea no espaço bi ou tridimensional e no estudo das propriedades geométricas de curvas e superfícies.*

### VETOR TANGENTE UNITÁRIO

Vimos que, se $C$ é o gráfico de uma função vetorial *lisa* $\mathbf{r}(t)$ no espaço bi ou tridimensional, então o vetor $\mathbf{r}'(t)$ é não nulo, tangente a $C$ e aponta no sentido do parâmetro crescente. Assim, normalizando $\mathbf{r}'(t)$, obtemos um vetor unitário

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \tag{1}$$

que é tangente a $C$ e aponta no sentido do parâmetro crescente. Chamamos $\mathbf{T}(t)$ de ***vetor tangente unitário*** a $C$ em $t$.

A menos de menção explícita em contrário, vamos supor que $\mathbf{T}(t)$ está posicionado com seu ponto inicial no ponto final de $\mathbf{r}(t)$, como na Figura 12.4.1. Isso assegura que $\mathbf{T}(t)$ é realmente tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$, e não simplesmente paralelo à reta tangente.

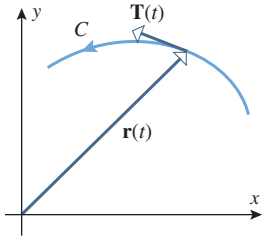



**Figura 12.4.1**

► **Exemplo 1** Encontre o vetor tangente unitário ao gráfico de $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ no ponto em que $t = 2$.

***Solução*** Como

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

obtemos

$$\mathbf{T}(2) = \frac{\mathbf{r}'(2)}{\|\mathbf{r}'(2)\|} = \frac{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j}}{\sqrt{160}} = \frac{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j}}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$$

O gráfico de $\mathbf{r}(t)$ e o vetor $\mathbf{T}(2)$ são mostrados na Figura 12.4.2. ◄

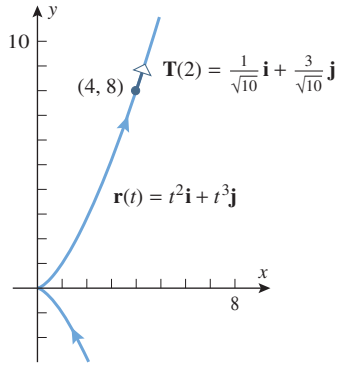



**Figura 12.4.2**

### VETOR NORMAL UNITÁRIO

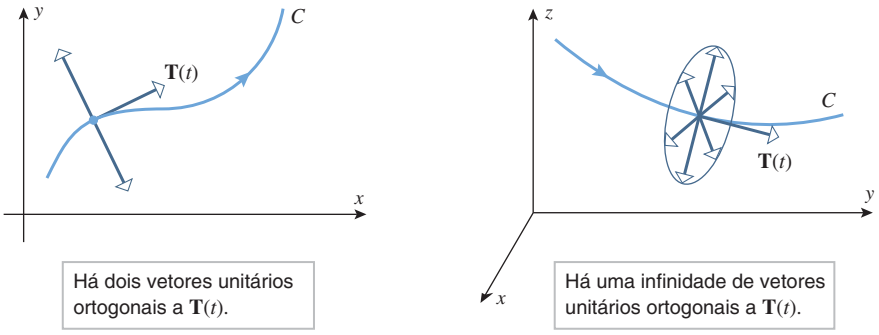
Vimos no Teorema 12.2.8 que se uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ tiver norma constante, então $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ são vetores ortogonais. Em particular, $\mathbf{T}(t)$ tem norma constante 1, logo $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{T}'(t)$ são vetores ortogonais. Isso implica que $\mathbf{T}'(t)$ é perpendicular à reta tangente a $C$ em $t$, portanto dizemos que $\mathbf{T}'(t)$ é ***normal*** a $C$ em $t$. Segue que se $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ e se normalizarmos $\mathbf{T}'(t)$, então obteremos um vetor unitário

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \tag{2}$$

que é normal a $C$ e aponta na mesma direção e sentido que $\mathbf{T}'(t)$. Chamamos $\mathbf{N}(t)$ o ***vetor normal unitário principal*** a $C$ em $t$ ou, mais simplesmente, o ***vetor normal unitário***. Observe

que o vetor normal unitário somente está definido nos pontos em que $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$. A menos de menção explícita em contrário, vamos supor que essa condição está satisfeita. Em particular, isso *exclui* retas.

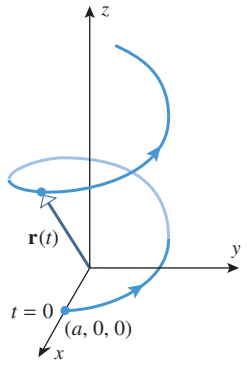
**OBSERVAÇÃO** No espaço bidimensional, há dois vetores unitários que são ortogonais a $\mathbf{T}(t)$, e no espaço tridimensional há uma infinidade de tais vetores (Figura 12.4.3). Em ambos os casos, o normal unitário principal é aquele normal particular que aponta na direção e sentido de $\mathbf{T}'(t)$. Após o exemplo a seguir, mostraremos que, para uma curva paramétrica não linear no espaço bidimensional, o normal unitário principal é aquele que aponta "para dentro", ou seja, para o lado côncavo da curva.




Há dois vetores unitários ortogonais a $\mathbf{T}(t)$.

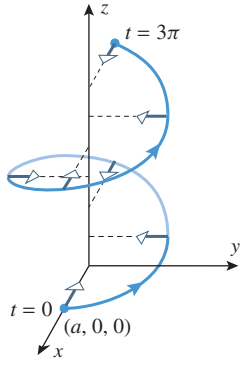
Há uma infinidade de vetores unitários ortogonais a $\mathbf{T}(t)$.

**Figura 12.4.3**




$\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$

**Figura 12.4.4**




$\mathbf{N}(t) = -(\cos t\mathbf{i} + \text{sen}\,t\mathbf{j})$

**Figura 12.4.5**

**► Exemplo 2** Obtenha $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ para a hélice circular

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\text{sen}\,t, \quad z = ct$$

onde $a > 0$.

***Solução*** O vetor posição da hélice é

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$$

(Figura 12.4.4). Assim,

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-a\,\text{sen}\,t)^2 + (a\cos t)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\frac{a\,\text{sen}\,t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{i} + \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{i} - \frac{a\,\text{sen}\,t}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \sqrt{\left(-\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2 + \left(-\frac{a\,\text{sen}\,t}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+c^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = (-\cos t)\mathbf{i} - (\text{sen}\,t)\mathbf{j} = -(\cos t\mathbf{i} + \text{sen}\,t\mathbf{j})$$

Observe que o componente $\mathbf{k}$ do normal unitário principal $\mathbf{N}(t)$ é zero com qualquer valor de $t$, portanto esse vetor sempre está num plano horizontal, conforme ilustra a Figura 12.4.5. Deixamos como exercício mostrar que esse vetor realmente sempre aponta para o eixo $z$. ◄

## ■ VETORES NORMAIS UNITÁRIOS PARA DENTRO NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Nosso próximo objetivo é mostrar que, para uma curva paramétrica não linear $C$ no espaço bidimensional, o vetor normal unitário sempre aponta para o lado côncavo de $C$. Para isso, seja $\phi(t)$ o ângulo do eixo $x$ positivo a $\mathbf{T}(t)$ e seja $\mathbf{n}(t)$ o vetor unitário que resulta

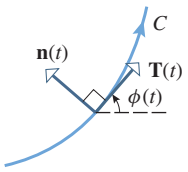



Figura 12.4.6

quando $\mathbf{T}(t)$ é girado no sentido anti-horário por um ângulo $\pi/2$ (Figura 12.4.6). Como $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{n}(t)$ são vetores unitários, segue da Fórmula (12) da Seção 11.2 que esses vetores podem ser expressos como

$$\mathbf{T}(t) = \cos \phi(t)\mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi(t)\mathbf{j} \tag{3}$$

e

$$\mathbf{n}(t) = \cos[\phi(t) + \pi/2]\mathbf{i} + \operatorname{sen}[\phi(t) + \pi/2]\mathbf{j} = -\operatorname{sen} \phi(t)\mathbf{i} + \cos \phi(t)\mathbf{j} \tag{4}$$

Observe que em intervalos nos quais $\phi(t)$ é crescente, o vetor $\mathbf{n}(t)$ aponta *para* o lado côncavo de $C$, e nos intervalos nos quais $\phi(t)$ decresce, ele aponta para o lado *oposto* ao côncavo (Figura 12.4.7).

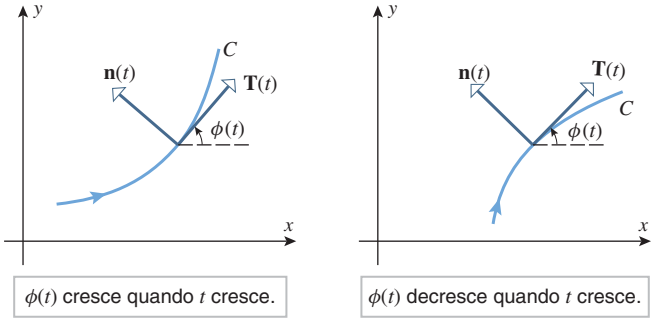



Figura 12.4.7

Agora, diferenciamos $\mathbf{T}(t)$ usando a Fórmula (3) e aplicando a regra da cadeia. Disso resulta

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = [(-\operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} + (\cos\phi)\mathbf{j}]\frac{d\phi}{dt}$$

e assim, a partir de (4),

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{n}(t)\frac{d\phi}{dt} \tag{5}$$

Contudo, $d\phi/dt > 0$ nos intervalos em que $\phi(t)$ é crescente e $d\phi/dt < 0$ nos intervalos em que $\phi(t)$ é decrescente. Desse modo, tem-se a partir de (5) que $d\mathbf{T}/dt$ tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{n}(t)$ nos intervalos em que $\phi(t)$ é crescente, mas sentido oposto nos intervalos em que $\phi(t)$ é decrescente. Consequentemente, $\mathbf{T}'(t) = d\mathbf{T}/dt$ aponta "para dentro", ou seja, para o lado côncavo da curva em todos os casos; logo, também $\mathbf{N}(t)$. Por essa razão, $\mathbf{N}(t)$ é chamado de ***normal unitário para dentro*** quando aplicado a curvas no espaço bidimensional.

## CALCULANDO T E N DE CURVAS PARAMETRIZADAS PELO COMPRIMENTO DE ARCO

No caso em que $\mathbf{r}(s)$ é parametrizada pelo comprimento de arco, o procedimento para calcular o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$ e o vetor normal unitário $\mathbf{N}(s)$ é mais simples do que no caso geral. Por exemplo, mostramos no Teorema 12.3.4 que, se $s$ for um parâmetro comprimento de arco, então $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$. Assim, a Fórmula (1) para o vetor tangente unitário simplifica para

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s) \tag{6}$$

e, consequentemente, a Fórmula (2) para o vetor normal unitário simplifica para

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|} \tag{7}$$

**ADVERTÊNCIA**

As Fórmulas (6) e (7) somente podem ser aplicadas quando a curva estiver parametrizada pelo comprimento de arco $s$. Para outras parametrizações, podemos usar as Fórmulas (1) e (2).

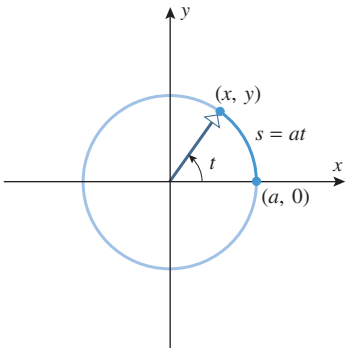



Figura 12.4.8

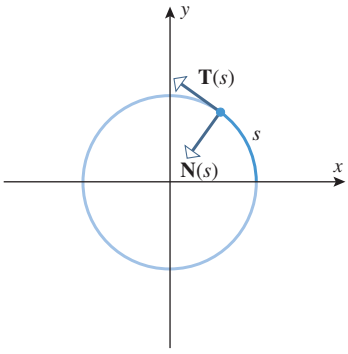



Figura 12.4.9

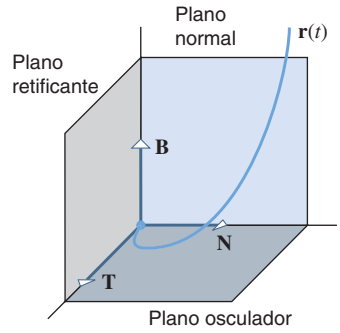
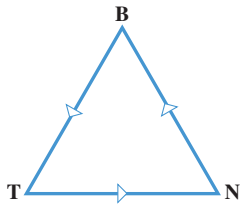



Figura 12.4.10




Em (10), os vetores **B**, **N** e **T** são dados como o produto vetorial dos outros dois tomado no sentido anti-horário em torno do triângulo.

Figura 12.4.11

► **Exemplo 3** O círculo de raio $a$ orientado no sentido anti-horário e centrado na origem pode ser representado pela função vetorial

$$\mathbf{r} = a\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 2\pi) \tag{8}$$

Parametrize esse círculo pelo comprimento de arco e encontre $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$.

***Solução*** Em (8), podemos interpretar $t$ como o ângulo medido em radianos desde o eixo $x$ até o vetor posição (Figura 12.4.8). Esse ângulo subentende um arco de comprimento $s = at$ sobre o círculo, portanto podemos reparametrizar o círculo em termos de $s$ substituindo $s/a$ no lugar de $t$ em (8). Obtemos

$$\mathbf{r}(s) = a\cos(s/a)\mathbf{i} + a\,\text{sen}(s/a)\mathbf{j} \quad (0 \le s \le 2\pi a)$$

Para encontrar $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$ pelas Fórmulas (6) e (7), devemos calcular $\mathbf{r}'(s)$, $\mathbf{r}''(s)$ e $\|\mathbf{r}'(s)\|$. Fazendo isso, obtemos

$$\mathbf{r}'(s) = -\,\text{sen}(s/a)\mathbf{i} + \cos(s/a)\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}''(s) = -(1/a)\cos(s/a)\mathbf{i} - (1/a)\,\text{sen}(s/a)\,\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{r}''(s)\| = \sqrt{(-1/a)^2\cos^2(s/a) + (-1/a)^2\,\text{sen}^2(s/a)} = 1/a$$

Assim,

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s) = -\,\text{sen}(s/a)\mathbf{i} + \cos(s/a)\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{r}''(s)/\|\mathbf{r}''(s)\| = -\cos(s/a)\mathbf{i} - \text{sen}(s/a)\,\mathbf{j}$$

de modo que $\mathbf{N}(s)$ aponta para o centro do círculo, com qualquer $s$ (Figura 12.4.9). Isso faz sentido geometricamente e é consistente, também, com nossa observação anterior, de que no espaço bidimensional o vetor normal unitário é o normal para dentro. ◄

## VETORES BINORMAIS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Se $C$ for o gráfico de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ no espaço tridimensional, definimos o ***vetor binormal*** a $C$ em $t$ como

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) \tag{9}$$

Segue das propriedades do produto vetorial que $\mathbf{B}(t)$ é ortogonal a $\mathbf{T}(t)$ e a $\mathbf{N}(t)$ e está orientado em relação a $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ pela regra da mão direita. Além disso, $\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ é um vetor unitário, pois

$$\|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)\| = \|\mathbf{T}(t)\|\|\mathbf{N}(t)\|\,\text{sen}(\pi/2) = 1$$

Assim, $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$ é um conjunto de três vetores unitários mutuamente ortogonais.

Exatamente como os vetores **i**, **j** e **k** determinam um sistema de coordenadas que satisfaz a regra da mão direita, o mesmo ocorre com os vetores $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$. Em cada ponto de uma curva paramétrica suave $C$ no espaço tridimensional, esses vetores determinam três planos mutuamente perpendiculares que passam pelo ponto – o plano **TB** (chamado de ***plano retificante***), o plano **TN** (chamado de ***plano osculador***) e o plano **NB** (chamado de ***plano normal***) (Figura 12.4.10). Além disso, pode ser mostrado que um sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ satisfaz a regra da mão direita, ou seja, que cada um desses vetores está relacionado aos outros dois pela regra da mão direita (Figura 12.4.11):

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t), \quad \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t), \quad \mathbf{T}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{B}(t) \tag{10}$$

O sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ é chamado de ***triedro* TNB** ou, então, de ***triedro de Frenet*,** em homenagem ao matemático francês Jean Frédéric Frenet (1816-1900), que foi o pioneiro em sua aplicação ao estudo de curvas no espaço. Tipicamente, o sistema de coordenadas $xyz$ determinado pelos vetores unitários **i, j** e **k** permanece fixo, enquanto que o triedro **TNB** varia à medida que a sua origem se move ao longo da curva $C$ (Figura 12.4.12).

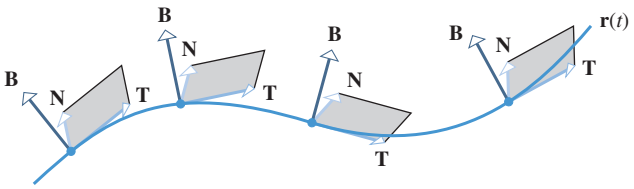



**Figura 12.4.12**

A Fórmula (9) expressa $\mathbf{B}(t)$ em termos de $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$. Alternativamente, o binormal $\mathbf{B}(t)$ pode ser expresso diretamente em termos de $\mathbf{r}(t)$ como

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|} \tag{11}$$

e no caso em que o parâmetro é o comprimento de arco, ele pode ser expresso em termos de $\mathbf{r}(s)$ como

$$\mathbf{B}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|} \tag{12}$$

Omitimos a demonstração.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.4 (*Ver página 873 para respostas.*)

1. Se $C$ for o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$, então os vetores tangente, normal e binormal unitários de $C$ em $t$ são definidos, respectivamente, por

   $\mathbf{T}(t) =$ _____, $\mathbf{N}(t) =$ _____, $\mathbf{B}(t) =$ _____

2. Se $C$ for o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(s)$ parametrizado pelo comprimento de arco, então as definições dos vetores tangente e normal unitários de $C$ em $t$ simplificam, respectivamente, para

   $\mathbf{T}(s) =$ _____ e $\mathbf{N}(s) =$ _____.

3. Se $C$ for o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$, então o vetor binormal unitário de $C$ em $t$ pode ser calculado diretamente em termos de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ pela fórmula $\mathbf{B}(t) =$ _____. Quando $t = s$ for o comprimento de arco, essa fórmula simplifica para $\mathbf{B}(s) =$ _____.

4. Suponha que $C$ seja o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(s)$ parametrizado pelo comprimento de arco, com $\mathbf{r}'(0) = \langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ e $\mathbf{r}''(0) = \langle -3, 12, -3 \rangle$. Então

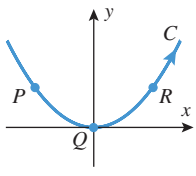
   $\mathbf{T}(0) =$ _____, $\mathbf{N}(0) =$ _____, $\mathbf{B}(0) =$ _____

## EXERCÍCIOS 12.4

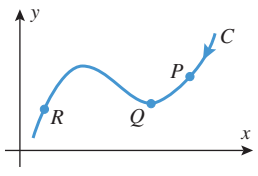
### ENFOCANDO CONCEITOS

1. Em cada parte, esboce os vetores tangente e normal unitários nos pontos $P$, $Q$ e $R$ levando em conta a orientação da curva $C$.

   (a)

   (b)

2. Faça um esboço grosseiro que mostre a elipse

   $$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\,\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

   com $0 \le t \le 2\pi$ e os vetores tangente e normal unitários nos pontos $t = 0$, $t = \pi/4$, $t = \pi/2$ e $t = \pi$.

3. Na nota à margem do Exemplo 8 da Seção 12.3, observou-se que uma reta $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ pode ser parametrizada em termos de um parâmetro comprimento de arco $s$ com ponto de referência $\mathbf{r}_0$ normalizando $\mathbf{v}$. Use esse resultado para mostrar que a reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ no ponto $t_0$ pode ser expressa como

   $$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + s\mathbf{T}(t_0)$$

   onde $s$ é um parâmetro comprimento de arco com ponto de referência $\mathbf{r}(t_0)$.

4. Use o resultado do Exercício 3 para mostrar que a reta tangente à parábola

   $$x = t, \quad y = t^2$$

   no ponto (1, 1) pode ser expressa parametricamente como

   $$x = 1 + \frac{s}{\sqrt{5}}, \quad y = 1 + \frac{2s}{\sqrt{5}}$$

**5-12** Obtenha $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ no ponto dado. ■

**5.** $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j};\ t = 1$

**6.** $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j};\ t = 1$

**7.** $\mathbf{r}(t) = 5\cos t\,\mathbf{i} + 5\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j};\ t = \pi/3$

**8.** $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j};\ t = e$

**9.** $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k};\ t = \pi/2$

**10.** $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k};\ t = 0$

**11.** $x = e^t\cos t,\ y = e^t\,\text{sen}\,t,\ z = e^t;\ t = 0$

**12.** $x = \cosh t,\ y = \text{senh}\,t,\ z = t;\ t = \ln 2$

**13-14** Use o resultado do Exercício 3 para obter equações paramétricas para a reta tangente ao gráfico de $\mathbf{r}(t)$ em $t_0$ em termos de um parâmetro comprimento de arco $s$. ■

**13.** $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k};\ t_0 = 0$

**14.** $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{9 - t^2}\,\mathbf{k};\ t_0 = 1$

**15-18** Use a fórmula $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ para obter $\mathbf{B}(t)$ e, então, confira sua resposta usando a Fórmula (11) para encontrar $\mathbf{B}(t)$ diretamente de $\mathbf{r}(t)$. ■

**15.** $\mathbf{r}(t) = 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$

**16.** $\mathbf{r}(t) = e^t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + e^t\cos t\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

**17.** $\mathbf{r}(t) = (\text{sen}\,t - t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t + t\,\text{sen}\,t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**18.** $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k}\ \ (a \neq 0, c \neq 0)$

**19-20** Encontre $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ com os valores dados de $t$. Então, encontre equações para os planos osculador, normal e retificante nos pontos que correspondem àquele valor de $t$. ■

**19.** $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} + \mathbf{k};\ t = \pi/4$

**20.** $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^t\cos t\,\mathbf{j} + e^t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k};\ t = 0$

**21-24 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**21.** Se $C$ for o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$ do espaço bidimensional, então o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ de $C$ será ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ e apontará na sentido do parâmetro crescente.

**22.** Se $C$ for o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$ do espaço bidimensional, então o ângulo medido no sentido anti-horário do vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ até o vetor normal unitário $\mathbf{N}(t)$ será $\pi/2$.

**23.** Se $\mathbf{r}(s)$ for uma função vetorial lisa de um parâmetro comprimento de arco e $\mathbf{r}''(s)$ estiver definida, então $\mathbf{r}'(s)$ e $\mathbf{r}''(s)$ serão vetores ortogonais.

**24.** O vetor binormal $\mathbf{B}(t)$ do gráfico de uma função vetorial espacial $\mathbf{r}(t)$ é o produto escalar dos vetores tangente e normal unitários $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.

**25. Texto** Confira a definição de "osculador" em um dicionário e discuta por que o termo "plano osculador" é adequado para o plano $\mathbf{TN}$.

**26. Texto** Discuta algumas das vantagens de parametrizar uma curva pelo comprimento de arco.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.4

1. $\dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|};\ \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|};\ \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ 2. $\mathbf{r}'(s);\ \dfrac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|}$ 3. $\dfrac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|};\ \dfrac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|}$

4. $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle;\ \left\langle -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}} \right\rangle;\ \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$

## 12.5 CURVATURA

*Nesta seção, consideraremos o problema de obter uma medida numérica de quanto uma curva se encurva no espaço bi ou tridimensional. Nosso resultado terá aplicações na Geometria e no estudo do movimento ao longo de uma trajetória curva.*

### ■ DEFINIÇÃO DE CURVATURA

Suponha que $C$ seja o gráfico de uma função vetorial lisa no espaço bi ou tridimensional parametrizada em termos do comprimento de arco. A Figura 12.5.1 sugere que, para uma curva no espaço bidimensional, a "intensidade" de encurvamento de $C$ está estreitamente relacionada com $d\mathbf{T}/ds$, que é a taxa de variação do vetor tangente unitário $\mathbf{T}$ em relação a $s$. (Lembre que $\mathbf{T}$ tem comprimento constante, logo somente a sua direção varia.) Se $C$ for uma reta (não há encurvamento), então a direção de $\mathbf{T}$ permanece constante (Figura 12.5.1*a*); se $C$ encurvar-se ligeiramente, então $\mathbf{T}$ passa por uma gradual mudança de direção (Figura 12.5.1*b*); se $C$ encurvar-se fortemente, então $\mathbf{T}$ passa por uma rápida variação na direção (Figura 12.5.1*c*).

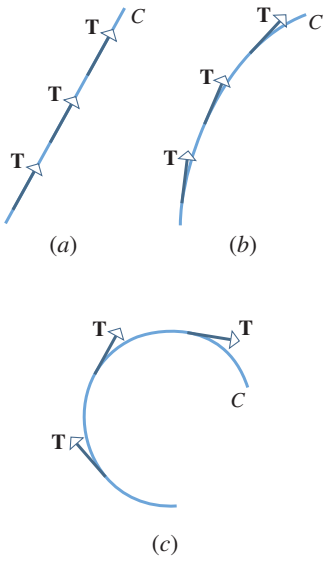



**Figura 12.5.1**

A situação no espaço tridimensional é mais complicada, pois os encurvamentos de uma curva não estão limitados a um único plano – eles podem ocorrer em todas as direções, conforme ilustrado pelo complicado tubo plotado na Figura 12.1.3. Para descrever completamente as características do encurvamento de uma curva no espaço tridimensional, devemos levar em conta $d\mathbf{T}/ds$, $d\mathbf{N}/ds$ e $d\mathbf{B}/ds$. Um estudo completo desse tópico nos afastaria muito do nosso assunto, portanto limitaremos a nossa discussão a $d\mathbf{T}/dt$, que é a mais importante dessas derivadas em aplicações.

**12.5.1 DEFINIÇÃO** Se $C$ for uma curva lisa no espaço bi ou tridimensional parametrizada pelo comprimento do arco, então a ***curvatura*** de $C$, denotada por $\kappa = \kappa(s)$ (onde $\kappa$ é a letra grega *kappa*), é definida por

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{r}''(s)\| \tag{1}$$

Observe que $\kappa(s)$ é uma função real de $s$, uma vez que é o *comprimento* de $d\mathbf{T}/ds$ que mede a curvatura. Em geral, a curvatura variará de ponto a ponto ao longo de uma curva; entretanto, o exemplo seguinte mostra que a curvatura é constante para círculos no espaço bidimensional, como é de se esperar.

**▶ Exemplo 1** No Exemplo 3 da Seção 12.4, mostramos que o círculo de raio $a$, centrado na origem, pode ser parametrizado em termos de comprimento de arco como

$$\mathbf{r}(s) = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + a\,\text{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j} \qquad (0 \le s \le 2\pi a)$$

Assim,

$$\mathbf{r}''(s) = -\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} - \frac{1}{a}\,\text{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}$$

e, portanto, por (1),

$$\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\| = \sqrt{\left[-\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right)\right]^2 + \left[-\frac{1}{a}\,\text{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\right]^2} = \frac{1}{a}$$

de modo que o círculo tem a curvatura constante $1/a$. ◀

O exemplo seguinte mostra que as retas têm curvatura zero, o que é consistente com o fato de que elas não se curvam.

**▶ Exemplo 2** Vimos, na Fórmula (15) da Seção 12.3, que uma reta no espaço bi ou tridimensional pode ser parametrizada em termos do comprimento de arco como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u}$$

onde o ponto final de $\mathbf{r}_0$ é um ponto da reta e $\mathbf{u}$ é um vetor unitário paralelo à reta. Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{r}_0$ são constantes, suas derivadas em relação a $s$ são zero, portanto

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d}{ds}[\mathbf{r}_0 + s\mathbf{u}] = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{r}''(s) = \frac{d\mathbf{r}'}{ds} = \frac{d}{ds}[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$$

Assim,

$$\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\| = 0 \quad ◀$$

## FÓRMULAS PARA A CURVATURA

A Fórmula (1) é aplicável somente se a curva estiver parametrizada em termos do comprimento de arco. O teorema seguinte fornece duas fórmulas para a curvatura em termos de um parâmetro qualquer $t$.

**12.5.2 TEOREMA** *Se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial lisa no espaço bi ou tridimensional, então, dado qualquer valor de $t$ no qual $\mathbf{T}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ existam, a curvatura $\kappa$ poderá ser expressa como*

$$(a)\quad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \tag{2}$$

$$(b)\quad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \tag{3}$$

**DEMONSTRAÇÃO (*a*)** Tem-se, a partir da Fórmula (1) e da Fórmula (16) da Seção 12.3, que

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}/dt}{\|d\mathbf{r}/dt\|} \right\| = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

**DEMONSTRAÇÃO (*b*)** Tem-se, a partir da Fórmula (1) da Seção 12.4, que

$$\mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\mathbf{T}(t) \tag{4}$$

$$\mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|'\mathbf{T}(t) + \|\mathbf{r}'(t)\|\mathbf{T}'(t) \tag{5}$$

Contudo, da Fórmula (2) da Seção 12.4 e da parte ($a$) desse teorema, temos

$$\mathbf{T}'(t) = \|\mathbf{T}'(t)\|\mathbf{N}(t) \quad \text{e} \quad \|\mathbf{T}'(t)\| = \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|$$

portanto

$$\mathbf{T}'(t) = \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|\mathbf{N}(t)$$

Substituindo isso em (5), obtemos

$$\mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|'\mathbf{T}(t) + \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^2\mathbf{N}(t) \tag{6}$$

Assim, de (4) e (6)

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\,\|\mathbf{r}'(t)\|'(\mathbf{T}(t) \times \mathbf{T}(t)) + \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^3(\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t))$$

Contudo, o produto vetorial de um vetor com ele mesmo é zero, logo essa equação simplifica para

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^3(\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)) = \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^3\mathbf{B}(t)$$

Segue dessa equação e do fato de que $\mathbf{B}(t)$ é um vetor unitário que

$$\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = \kappa(t)\|\mathbf{r}'(t)\|^3$$

Segue, então, a Fórmula (3). ■

**OBSERVAÇÃO** A Fórmula (2) é útil se $\mathbf{T}(t)$ for conhecido ou for fácil de se obter; entretanto, a Fórmula (3) será geralmente mais fácil de aplicar, uma vez que envolve apenas $\mathbf{r}(t)$ e as suas derivadas. Notamos, também, que o produto vetorial foi definido apenas para vetores no espaço tridimensional, de modo que, ao usar a Fórmula (3) no espaço bidimensional, devemos, primeiro, escrever a função $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$ do espaço bidimensional como a função $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ do espaço tridimensional, com o componente $\mathbf{k}$ nulo.

**▶ Exemplo 3** Obtenha $\kappa(s)$ para a hélice circular

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\text{sen}\,t, \quad z = ct$$

onde $a > 0$.

***Solução*** O vetor posição da hélice é

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$$

Assim,

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}''(t) = (-a\cos t)\mathbf{i} + (-a\,\text{sen}\,t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\,\text{sen}\,t & a\cos t & c \\ -a\cos t & -a\,\text{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} = (ac\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} - (ac\cos t)\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}$$

Portanto,

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-a\,\text{sen}\,t)^2 + (a\cos t)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

e

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| &= \sqrt{(ac\,\text{sen}\,t)^2 + (-ac\cos t)^2 + a^4} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + c^2}\end{aligned}$$

logo,

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{a\sqrt{a^2 + c^2}}{\left(\sqrt{a^2 + c^2}\right)^3} = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

Note que $\kappa$ não depende de $t$, o qual nos diz que a hélice tem curvatura constante. ◀

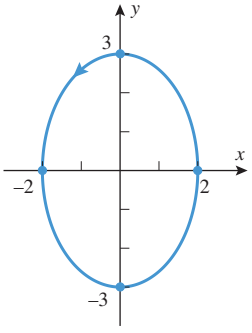



**Figura 12.5.2**

► **Exemplo 4** O gráfico da equação vetorial

$$\mathbf{r} = 2\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}\ (0 \le t \le 2\pi)$$

é a elipse da Figura 12.5.2. Obtenha a curvatura da elipse nos extremos dos eixos maior e menor e use um recurso gráfico computacional para gerar o gráfico de $\kappa(t)$.

***Solução*** Para aplicar a Fórmula (3), devemos tratar a elipse como uma curva no plano $xy$ de um sistema de coordenada $xyz$, adicionando um componente $\mathbf{k}$ zero e escrevendo sua equação como

$$\mathbf{r} = 2\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Não é essencial escrever o componente $\mathbf{k}$ zero explicitamente, desde que lembremos que ele deve estar lá quando calcularmos um produto vetorial. Assim,

$$\mathbf{r}'(t) = (-2\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}''(t) = (-2\cos t)\mathbf{i} + (-3\,\text{sen}\,t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2\,\text{sen}\,t & 3\cos t & 0 \\ -2\cos t & -3\,\text{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} = [(6\,\text{sen}^2\,t) + (6\cos^2 t)]\mathbf{k} = 6\mathbf{k}$$

Portanto,

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-2\,\text{sen}\,t)^2 + (3\cos t)^2} = \sqrt{4\,\text{sen}^2\,t + 9\cos^2 t}$$
$$\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = 6$$

logo

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{6}{[4\,\text{sen}^2\,t + 9\cos^2 t]^{3/2}} \tag{7}$$

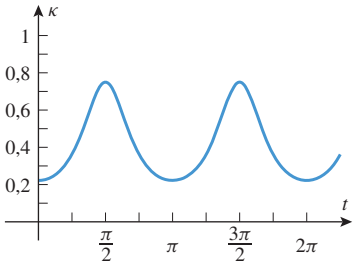
As extremidades do eixo menor são (2, 0) e (−2, 0), que correspondem a $t = 0$ e $t = \pi$, respectivamente. Substituindo esses valores em (7), obtém-se a mesma curvatura em ambos os pontos, isto é,

$$\kappa = \kappa(0) = \kappa(\pi) = \frac{6}{9^{3/2}} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

As extremidades do eixo maior são (0, 3) e (0, −3), que correspondem a $t = \pi/2$ e $t = 3\pi/2$, respectivamente; por (7), a curvatura nesses pontos é

$$\kappa = \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \kappa\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{6}{4^{3/2}} = \frac{3}{4}$$

Observe que a curvatura é maior nas extremidades do eixo maior do que nas extremidades do eixo menor, como era de se esperar. A Figura 12.5.3 mostra o gráfico de $\kappa$ *versus* $t$. Esse gráfico ilustra nitidamente que a curvatura é mínima em $t = 0$ (a extremidade direita do eixo menor), cresce até um máximo em $t = \pi/2$ (o topo do eixo maior), decresce até um mínimo outra vez em $t = \pi$ (a extremidade esquerda do eixo menor) e continua ciclicamente dessa maneira. A Figura 12.5.4 fornece outra maneira de visualizar a curvatura. ◀




$$\kappa(t) = \frac{6}{[4\,\text{sen}^2\,t + 9\,\cos^2 t]^{3/2}}$$

**Figura 12.5.3**

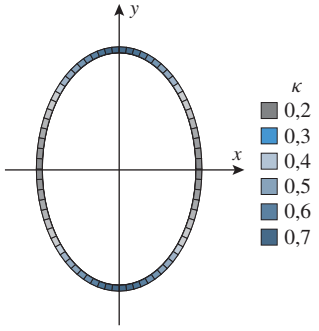



**Figura 12.5.4**

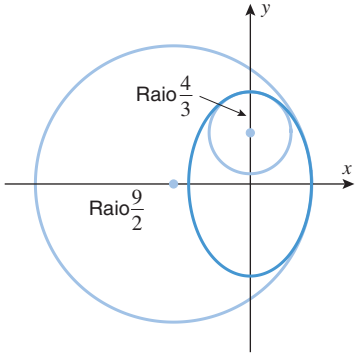



**Figura 12.5.5**

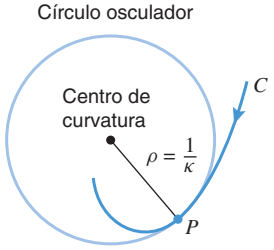



**Figura 12.5.6**

## RAIO DE CURVATURA

No último exemplo, verificamos que a curvatura nas extremidades do eixo menor é $\frac{2}{9}$ e a curvatura nas extremidades do eixo maior é $\frac{3}{4}$. Para obter um melhor entendimento do significado desses números, lembre-se de que, no Exemplo 1, vimos que um círculo de raio $a$ tem uma curvatura constante de $1/a$; assim, a curvatura da elipse nas extremidades do eixo menor é igual à de um círculo de raio $\frac{9}{2}$, e a curvatura nas extremidades do eixo maior é igual à de um círculo de raio $\frac{4}{3}$ (Figura 12.5.5 ).

Em geral, se uma curva $C$ no espaço bidimensional tem curvatura $\kappa$ no ponto $P$, então o círculo de raio $\rho = 1/\kappa$ que tenha em comum uma tangente com $C$ em $P$ e centro no lado côncavo da curva em $P$ é chamado de ***círculo de curvatura*** ou ***círculo osculador*** em $P$ (Figura 12.5.6). O círculo osculador e a curva $C$ não somente se tocam em $P$, mas têm a mesma curvatura naquele ponto. Nesse sentido, o círculo osculador é o círculo que melhor aproxima a curva $C$ na vizinhança de $P$. O raio $\rho$ de um círculo osculador em $P$ é chamado de ***raio de curvatura*** em $P$, e o centro do círculo é chamado de ***centro de curvatura*** em $P$ (Figura 12.5.6).

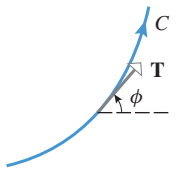



**Figura 12.5.7**

## UMA INTERPRETAÇÃO DA CURVATURA NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Uma interpretação geométrica útil da curvatura no espaço bidimensional pode ser obtida considerando o ângulo $\phi$ medido no sentido anti-horário a partir do eixo $x$ positivo até o vetor tangente unitário $\mathbf{T}$ (Figura 12.5.7). Pela Fórmula (13) da Seção 11.2, podemos expressar $\mathbf{T}$ em termos de $\phi$ como

$$\mathbf{T}(\phi) = \cos\phi\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\,\mathbf{j}$$

Assim,

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\phi} = (-\operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}$$

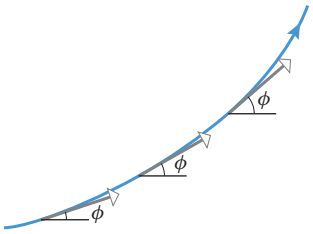
do que obtemos

$$\kappa(s) = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| \left\|\frac{d\mathbf{T}}{d\phi}\right\| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| \sqrt{(-\operatorname{sen}\phi)^2 + \cos^2\phi} = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

Em resumo, mostramos que

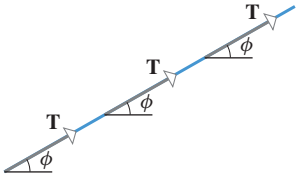
$$\kappa(s) = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| \tag{8}$$

o que nos diz que a curvatura no espaço bidimensional pode ser interpretada como a magnitude da taxa de variação de $\phi$ com relação a $s$: quanto maior for a curvatura, mais rápido varia $\phi$ em relação a $s$ (Figura 12.5.8). No caso de uma reta, o ângulo $\phi$ é constante (Figura 12.5.9) e, consequentemente, $\kappa(s) = |d\phi/ds| = 0$, o que é consistente com o fato de que a reta tem curvatura zero em todo ponto.




No espaço bidimensional, $\kappa(s)$ é a magnitude da taxa de variação de $\phi$ em relação a $s$.

**Figura 12.5.8**




$\phi$ é constante, logo a reta tem curvatura zero.

**Figura 12.5.9**

## RESUMO DAS FÓRMULAS

Concluímos esta seção com um resumo das fórmulas para **T**, **N** e **B**. Essas fórmulas ou foram deduzidas no texto ou são facilmente deduzíveis de fórmulas já estabelecidas.

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s) \tag{9}$$

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\kappa(s)} \tag{10}$$

$$\mathbf{B}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|} = \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{\kappa(s)} \tag{11}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \tag{12}$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|} \tag{13}$$

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) \tag{14}$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.5 (Ver página 881 para respostas.)

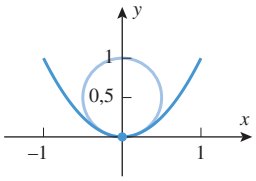
1. Se $C$ for uma curva lisa parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura é definida por $\kappa(s) =$ _____.
2. Seja $\mathbf{r}(t)$ uma função vetorial lisa com curvatura $\kappa(t)$.
   (a) A curvatura pode ser expressa em termos de $\mathbf{T}'(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ como $\kappa(t) =$ _____.
   (b) A curvatura pode ser expressa diretamente em termos de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ como $\kappa(t) =$ _____.
3. Suponha que $C$ seja o gráfico de uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(s) = \langle x(s), y(s)\rangle$ parametrizado pelo comprimento de arco, com vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s) = \langle \cos\phi(s), \operatorname{sen}\phi(s)\rangle$. Então, a curvatura pode ser expressa em termos de $\phi(s)$ como $\kappa(s) =$ _____.
4. Suponha que $C$ seja uma curva lisa e que $x^2 + y^2 = 4$ seja o círculo osculador de $C$ em $P(1, \sqrt{3})$. Então, a curvatura de $C$ em $P$ é _____.

## EXERCÍCIOS 12.5 Recurso Gráfico CAS

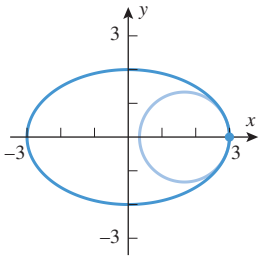
### ENFOCANDO CONCEITOS

**1-2** Use o círculo osculador mostrado na figura para estimar a curvatura nos pontos indicados. ■

**1.**

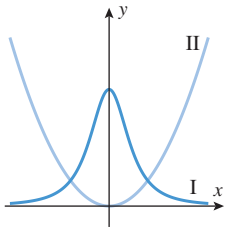



**2.**

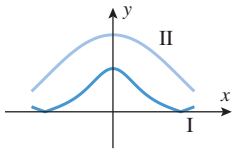



**3-4** Para uma curva plana $y = f(x)$, a curvatura em $(x, f(x))$ é uma função $\kappa(x)$. Nestes exercícios são mostrados os gráficos de $f(x)$ e de $\kappa(x)$. Determine qual é qual e explique seu raciocínio. ■

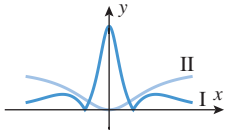
**3.** (a)



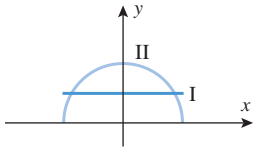

(b)




**4.** (a)




(b)




**5-12** Use a Fórmula (3) para encontrar $\kappa(t)$. ■

**5.** $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$

**6.** $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

**7.** $\mathbf{r}(t) = e^{3t}\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}$

**8.** $x = 1 - t^3,\ y = t - t^2$

**9.** $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

**10.** $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$

**11.** $x = \cosh t,\ y = \operatorname{senh} t,\ z = t$

**12.** $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

**13-16** Obtenha a curvatura e o raio de curvatura no ponto dado. ■

**13.** $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k};\ t = \pi/2$

**14.** $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k};\ t = 0$

**15.** $x = e^t\cos t,\ y = e^t\operatorname{sen} t,\ z = e^t;\ t = 0$

**16.** $x = \operatorname{sen} t,\ y = \cos t,\ z = \frac{1}{2}t^2;\ t = 0$

**17-18** Confirme que $s$ é um parâmetro comprimento de arco mostrando que $\|d\mathbf{r}/ds\| = 1$ e, então, aplique a Fórmula (1) para determinar $\kappa(s)$. ■

**17.** $\mathbf{r} = \operatorname{sen}\left(1 + \frac{s}{2}\right)\mathbf{i} + \cos\left(1 + \frac{s}{2}\right)\mathbf{j} + \sqrt{3}\left(1 + \frac{s}{2}\right)\mathbf{k}$

**18.** $\mathbf{r} = \left(1 - \frac{2}{3}s\right)^{3/2}\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3}s\right)^{3/2}\mathbf{j} \qquad \left(0 \le s \le \frac{3}{2}\right)$

**19-22 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**19.** Um círculo de raio 2 tem curvatura constante $\frac{1}{2}$.

**20.** Uma reta vertical do plano tem curvatura indefinida.

**21.** Se $\mathbf{r}(s)$ for parametrizado pelo comprimento de arco, então a curvatura do gráfico de $\mathbf{r}(s)$ será o comprimento de $\mathbf{r}'(s)$.

**22.** Se $C$ for uma curva do plano, então o círculo osculador de $C$ em um ponto $P$ terá raio igual à curvatura de $C$ em $P$.

**23.** (a) Use a Fórmula (3) para mostrar que, no espaço bidimensional, a curvatura de uma curva paramétrica lisa

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

é

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

onde as linhas denotam diferenciação em relação a $t$.

(b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que, no espaço bidimensional, a curvatura da curva plana dada por $y = f(x)$ é

$$\kappa(x) = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$

[*Sugestão*: Expresse $y = f(x)$ parametricamente com $x = t$ como o parâmetro.]

**24.** Use a parte (b) do Exercício 23 para mostrar que a curvatura de $y = f(x)$ pode ser expressa em termos do ângulo de inclinação da reta tangente como

$$\kappa(\phi) = \left|\frac{d^2y}{dx^2}\cos^3\phi\right|$$

[*Sugestão*: $\operatorname{tg}\phi = dy/dx$.]

**25-28** Use o resultado do Exercício 23(b) para obter a curvatura no ponto dado. ■

**25.** $y = \operatorname{sen} x;\ x = \pi/2$

**26.** $y = \operatorname{tg} x;\ x = \pi/4$

**27.** $y = e^{-x};\ x = 1$

**28.** $y^2 - 4x^2 = 9;\ (2, 5)$

**29-32** Use o resultado do Exercício 23(a) para determinar a curvatura no ponto dado. ■

**29.** $x = t^2,\ y = t^3;\ t = \frac{1}{2}$

**30.** $x = e^{3t},\ y = e^{-t};\ t = 0$

**31.** $x = t,\ y = 1/t;\ t = 1$

**32.** $x = 2\operatorname{sen} 2t,\ y = 3\operatorname{sen} t;\ t = \pi/2$

**33.** Em cada parte, use as fórmulas do Exercício 23 para ajudar a determinar o raio de curvatura nos pontos dados. Então, esboce o gráfico junto com os círculos osculadores nesses pontos.

(a) $y = \cos x$ em $x = 0$ e $x = \pi$

(b) $x = 2\cos t,\ y = \operatorname{sen} t\ (0 \le t \le 2\pi)$ em $t = 0$ e $t = \pi/2$

**34.** Use a fórmula do Exercício 23(a) para obter $\kappa(t)$ da curva $x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\operatorname{sen} t$. Então, esboce o gráfico de $\kappa(t)$.

**35-36** Use um recurso gráfico para gerar o gráfico de $y = f(x)$ e, então, faça uma conjectura sobre a forma do gráfico de $y = \kappa(x)$. Confira sua conjectura gerando esse gráfico. ■

**35.** $f(x) = xe^{-x}$ com $0 \le x \le 5$

**36.** $f(x) = x^3 - x$ com $-1 \le x \le 1$

**C 37.** (a) Leia o manual sobre o cálculo de derivadas de ordens superiores em um CAS. Então, use o CAS e a parte (b) do Exercício 23 para obter $\kappa(x)$ para $f(x) = x^4 - 2x^2$.
(b) Use o CAS para gerar o gráfico de $f(x) = x^4 - 2x^2$ e $\kappa(x)$ na mesma tela para $-2 \le x \le 2$.
(c) Obtenha o raio de curvatura em cada extremo relativo.
(d) Faça com precisão razoável um esboço à mão do gráfico de $f(x) = x^4 - 2x^2$ e dos círculos osculadores em suas proporções corretas nos extremos relativos.

**C 38.** (a) Use um CAS para fazer o gráfico da curva paramétrica $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$ para $t \ge 0$.
(b) Faça uma conjectura sobre o comportamento de $\kappa(t)$ quando $t \to +\infty$.
(c) Use o CAS e a parte (a) do Exercício 23 para obter $\kappa(t)$.
(d) Confira sua conjectura encontrando o limite de $\kappa(t)$ quando $t \to +\infty$.

**39.** Use a fórmula do Exercício 23(a) para mostrar que, para uma curva em coordenadas polares descrita por $r = f(\theta)$, a curvatura é

$$\kappa(\theta) = \frac{\left| r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} \right|}{\left[ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right]^{3/2}}$$

[*Sugestão*: Seja $\theta$ o parâmetro e use as relações $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$.]

**40.** Use o resultado do Exercício 39 para mostrar que um círculo tem curvatura constante.

**41-44** Use a fórmula do Exercício 39 para obter a curvatura no ponto indicado. ■

**41.** $r = 1 + \cos\theta$; $\theta = \pi/2$

**42.** $r = e^{2\theta}$; $\theta = 1$

**43.** $r = \operatorname{sen} 3\theta$; $\theta = 0$

**44.** $r = \theta$; $\theta = 1$

**45.** Obtenha o raio de curvatura da parábola $y^2 = 4px$ em $(0, 0)$.

**46.** Em qual(is) ponto(s) $y = e^x$ tem curvatura máxima?

**47.** Em qual(is) ponto(s) $4x^2 + 9y^2 = 36$ tem raio de curvatura mínimo?

**48.** Obtenha os valores máximo e mínimo do raio de curvatura da curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \cos t$.

**49.** Use a fórmula do Exercício 39 para mostrar que a curvatura da curva polar $r = e^{a\theta}$ é inversamente proporcional a $r$.

**C 50.** Use a fórmula do Exercício 39 e um CAS para mostrar que a curvatura da lemniscata $r = \sqrt{a \cos 2\theta}$ é diretamente proporcional a $r$.

**51.** (a) Use o resultado do Exercício 24 para mostrar que, para a parábola $y = x^2$, a curvatura $\kappa(\phi)$ nos pontos em que a reta tangente tem um ângulo de inclinação de $\phi$ é

$$\kappa(\phi) = |2 \cos^3 \phi|$$

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar o raio de curvatura da parábola no ponto da parábola em que a reta tangente tem inclinação 1.
(c) Faça um esboço de precisão razoável na proporção que mostre o círculo osculador no ponto da parábola em que a reta tangente tem inclinação 1.

**52.** A ***evoluta*** de uma curva paramétrica lisa $C$ no espaço bidimensional é a curva formada pelos centros de curvatura de $C$. A figura a seguir mostra a elipse $x = 3 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$ $(0 \le t \le \approx 2\pi)$ e o gráfico da evoluta em um mesmo sistema.
(a) Quais pontos da evoluta correspondem a $t = 0$ e $t = \pi/2$?
(b) Em que sentido é traçada a evoluta quando $t$ cresce de 0 a $2\pi$?
(c) Com que se parece a evoluta de um círculo? Explique seu raciocínio.

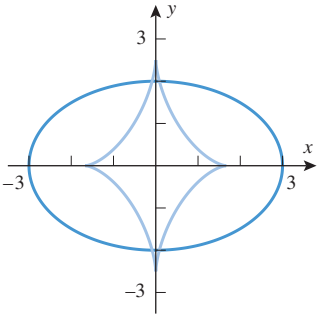



**Figura Ex-52**

## ENFOCANDO CONCEITOS

**53-57** Nestes exercícios, ocuparemo-nos do problema de criar uma curva lisa única, juntando partes separadas de duas curvas lisas. Se duas curvas lisas $C_1$ e $C_2$ forem unidas em um ponto $P$ para formar uma curva $C$, então diremos que $C_1$ e $C_2$ fazem uma ***transição lisa*** em $P$ se a curvatura de $C$ for contínua em $P$. ■

**53.** Mostre que a transição em $x = 0$ da reta horizontal $y = 0$ com $x \le 0$ para a parábola $y = x^2$ com $x > 0$ não é lisa, enquanto que a transição para $y = x^3$ com $x > 0$ é lisa.

**54.** (a) Esboce o gráfico da curva definida por partes por $y = x^2$ com $x < 0$, $y = x^4$ com $x \ge 0$.
(b) Mostre que, para a curva da parte (a), a transição em $x = 0$ não é lisa.

**55.** A figura a seguir mostra o arco de um círculo de raio $r$ com centro em $(0, r)$. Determine o valor de $a$ que garante uma transição lisa do círculo para a parábola $y = ax^2$ no ponto em que $x = 0$.

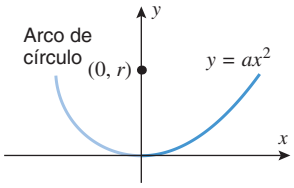



**Figura Ex-55**

**56.** Determine $a$, $b$ e $c$ tais que haja uma transição lisa em $x = 0$ da curva $y = e^x$ com $x \leq 0$ para a parábola $y = ax^2 + bx + c$ com $x > 0$. [*Sugestão*: A curvatura é contínua nos pontos em que $y''$ for contínua.]

**57.** Suponha que $f$ seja uma função tal que $f'''(x)$ esteja definida em cada $x \leq 0$. Explique por que é sempre possível encontrar números $a$, $b$ e $c$ tais que exista uma transição lisa em $x = 0$ da curva $y = f(x)$, $x \leq 0$, para a parábola $y = ax^2 + bx + c$.

**58-61** Suponha que $s$ seja um parâmetro comprimento de arco para uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(s)$ no espaço tridimensional e que $d\mathbf{T}/ds$ e $d\mathbf{N}/ds$ existam em cada ponto da curva. (Isto implica que $d\mathbf{B}/ds$ também existe, já que $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.) ■

**58.** Mostre que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$$

e use esse resultado para obter as fórmulas em (10).

**59.** (a) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{B}(s)$.

(b) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{T}(s)$. [*Sugestão*: Use o fato de que $\mathbf{B}(s)$ é perpendicular a $\mathbf{T}(s)$ e a $\mathbf{N}(s)$ e diferencie $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T}$ em relação a $s$.]

(c) Use os resultados das partes (a) e (b) para mostrar que $d\mathbf{B}/ds$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{N}(s)$. O *negativo* desse escalar é chamado de ***torção*** de $\mathbf{r}(s)$ e é denotado por $\tau(s)$. Assim,

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau(s)\mathbf{N}(s)$$

(d) Mostre que $\tau(s) = 0$ para todo $s$ se o gráfico de $\mathbf{r}(s)$ situar-se num plano. [*Nota*: Por razões que não discutiremos aqui, a torção está relacionada ao retorcimento de uma curva, e $\tau(s)$ é considerado como uma medida numérica da tendência de a curva torcer-se para fora do plano osculador.]

**60.** Seja $\kappa$ a curvatura de $C$ e $\tau$ a torção (definida no Exercício 59). Diferenciando $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ com relação a $s$, mostre que $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$.

**61.** As seguintes derivadas, conhecidas como ***fórmulas de Frenet-Serret***, são fundamentais na teoria das curvas no espaço tridimensional:

$d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$ [Exercício 58]
$d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ [Exercício 60]
$d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$ [Exercício 59(c)]

Use as duas primeiras fórmulas de Frenet-Serret e o fato de que $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T}$ se $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ para mostrar que

$$\tau = \frac{[\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)] \cdot \mathbf{r}'''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|}$$

**62.** (a) Use a regra da cadeia e as duas primeiras fórmulas de Frenet-Serret do Exercício 61 para mostrar que

$$\mathbf{T}' = \kappa s'\mathbf{N} \quad \text{e} \quad \mathbf{N}' = -\kappa s'\mathbf{T} + \tau s'\mathbf{B}$$

onde as linhas denotam diferenciação em relação a $t$.

(b) Mostre que as Fórmulas (4) e (6) podem ser escritas na forma

$$\mathbf{r}'(t) = s'\mathbf{T} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}''(t) = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$$

(c) Use os resultados das partes (a) e (b) para mostrar que

$$\mathbf{r}'''(t) = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$$

(d) Use os resultados das partes (b) e (c) para mostrar que

$$\tau(t) = \frac{[\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)] \cdot \mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}$$

**63-66** Use a fórmula do Exercício 62(d) para obter a torção $\tau = \tau(t)$. ■

**63.** A cúbica torcida $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$

**64.** A hélice circular $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$

**65.** $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$

**66.** $\mathbf{r}(t) = (t - \text{sen}\,t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

**67.** **Texto** Uma propriedade de uma função $f(x)$ duas vezes derivável é que um ponto de inflexão do gráfico é um ponto em que a reta tangente cruza o gráfico de $f$. Considere analogamente um círculo osculador de uma curva $C$ num ponto $P$ do plano: o que significa para o círculo osculador cruzar (ou não) a curva $C$ em $P$? Investigue esse assunto por meio de alguns exemplos próprios e escreva um ensaio breve, com figuras, suportando suas conclusões.

**68.** **Texto** A figura a seguir é o gráfico do raio de curvatura *versus* $\theta$ em coordenadas retangulares da cardioide $r = 1 + \cos\theta$. Em palavras, explique o que o gráfico nos diz sobre a cardioide.

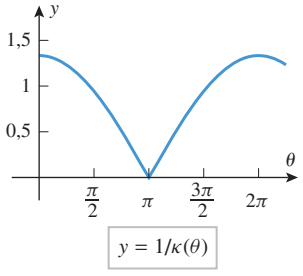



**Figura Ex-68**

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.5

1. $\left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$ 2. (a) $\frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ (b) $\frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$ 3. $\left|\frac{d\phi}{ds}\right|$ 4. $\frac{1}{2}$

# 12.6 MOVIMENTO AO LONGO DE UMA CURVA

*Em seções anteriores, consideramos o movimento de uma partícula ao longo de uma reta. Em uma reta há apenas dois sentidos nos quais a partícula pode se mover – o sentido positivo ou o negativo. O movimento no espaço bi ou tridimensional é mais complicado, pois há uma infinidade de direções segundo as quais uma partícula pode se mover. Nesta seção, mostraremos como os vetores podem ser usados para analisar o movimento ao longo de curvas no espaço bi ou tridimensional.*

## VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

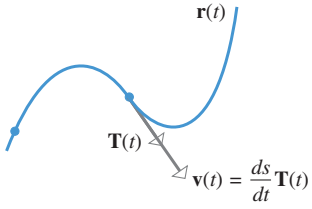
Vamos supor que o movimento de uma partícula no espaço bi ou tridimensional seja descrito por uma função vetorial lisa $\mathbf{r}(t)$, na qual o parâmetro $t$ denota o tempo; chamaremos isso de ***função posição*** ou ***trajetória*** da partícula. Quando a partícula se move ao longo de sua trajetória, a direção e o sentido do movimento e a sua velocidade escalar podem variar de instante a instante. Assim, antes de podermos empreender a análise de tal movimento, precisamos ter claras as respostas para as seguintes questões:

- Quais são a direção e o sentido do movimento da partícula em um instante do tempo?
- Qual é a velocidade escalar da partícula em um instante do tempo?

Definiremos a direção e o sentido do movimento no instante $t$ como sendo a direção e o sentido do vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$, e definiremos a velocidade escalar como sendo $ds/dt$ – a taxa de variação instantânea do comprimento de arco percorrido pela partícula desde um ponto de referência arbitrário. Dando um passo mais adiante, combinaremos a velocidade escalar com a direção e o sentido do movimento para formar o vetor

$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(t) \tag{1}$$

que chamamos de ***função velocidade vetorial*** ou, simplesmente, ***velocidade*** da partícula no instante $t$. Dessa forma, em cada instante do tempo o vetor velocidade $\mathbf{v}(t)$ aponta na direção e no sentido do movimento e tem uma magnitude que é igual à velocidade escalar da partícula (Figura 12.6.1).




O comprimento do vetor velocidade é a velocidade escalar da partícula, e a direção e sentido do vetor velocidade são a direção e sentido do movimento.

**Figura 12.6.1**

Lembre-se de que, para o movimento ao longo de uma reta coordenada, a função velocidade é a derivada da função posição. O mesmo é verdadeiro para o movimento ao longo de uma curva, uma vez que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(t) = \mathbf{v}(t)$$

Para o movimento ao longo de uma reta coordenada, a função aceleração foi definida como sendo a derivada da função velocidade. A definição é a mesma para o movimento ao longo de uma curva.

**12.6.1 DEFINIÇÃO** Se $\mathbf{r}(t)$ for a função posição de uma partícula em movimento ao longo de uma curva no espaço bi ou tridimensional, então a ***velocidade instantânea***, a ***aceleração instantânea*** e a ***velocidade escalar instantânea*** da partícula no instante $t$ são definidas por

$$\text{velocidade} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{2}$$

$$\text{aceleração} = \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{3}$$

$$\text{velocidade escalar} = \|\mathbf{v}(t)\| = \frac{ds}{dt} \tag{4}$$

Como mostramos na Tabela 12.6.1, a posição, a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar podem também ser expressas em forma de componentes.

**Tabela 12.6.1**
FÓRMULAS PARA A POSIÇÃO, VELOCIDADE, ACELERAÇÃO E VELOCIDADE ESCALAR

| | ESPAÇO BIDIMENSIONAL | ESPAÇO TRIDIMENSIONAL |
|---|---|---|
| POSIÇÃO | $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ | $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ |
| VELOCIDADE | $\mathbf{v}(t) = \dfrac{dx}{dt}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{dt}\mathbf{j}$ | $\mathbf{v}(t) = \dfrac{dx}{dt}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{dt}\mathbf{j} + \dfrac{dz}{dt}\mathbf{k}$ |
| ACELERAÇÃO | $\mathbf{a}(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}$ | $\mathbf{a}(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$ |
| VELOCIDADE ESCALAR | $\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$ | $\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}$ |

**▶ Exemplo 1** Uma partícula move-se ao longo de um caminho circular de tal maneira que suas coordenadas $x$ e $y$ no instante $t$ são

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\operatorname{sen} t$$

(a) Determine as velocidades vetorial e escalar instantâneas da partícula no instante $t$.

(b) Esboce o caminho da partícula e mostre os vetores posição e velocidade no instante $t = \pi/4$ com o vetor velocidade desenhado de tal forma que o seu ponto inicial esteja na ponta do vetor posição.

(c) Mostre que, em cada instante, o vetor aceleração é perpendicular ao vetor velocidade.

***Solução (a)*** No instante $t$, o vetor posição é

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

logo as velocidades vetorial e escalar instantâneas são

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$$
$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(-2\operatorname{sen} t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$$

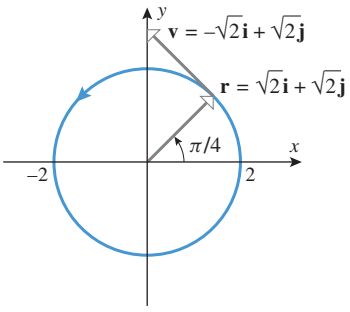


**Figura 12.6.2**

***Solução (b)*** O gráfico das equações paramétricas é um círculo de raio 2 centrado na origem. No instante $t = \pi/4$, os vetores posição e velocidade da partícula são

$$\mathbf{r}(\pi/4) = 2\cos(\pi/4)\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}(\pi/4)\mathbf{j} = \sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v}(\pi/4) = -2\operatorname{sen}(\pi/4)\mathbf{i} + 2\cos(\pi/4)\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$

Esses vetores e o círculo são mostrados na Figura 12.6.2.

***Solução (c)*** No instante $t$, o vetor aceleração é

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\cos t\,\mathbf{i} - 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

Como poderíamos aplicar o Teorema 12.2.8 para resolver a parte (c) do Exemplo 1?

Uma maneira de provar que $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ são perpendiculares é mostrar que seu produto vetorial é zero (tente fazer isso). Contudo, é mais fácil observar que $\mathbf{a}(t)$ é o negativo de $\mathbf{r}(t)$, o que implica que $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ são perpendiculares, uma vez que, em cada ponto sobre um círculo, o raio e a reta tangente são perpendiculares. ◀

Como $\mathbf{v}(t)$ pode ser obtido diferenciando $\mathbf{r}(t)$, e como $\mathbf{a}(t)$ pode ser obtido diferenciando $\mathbf{v}(t)$, tem-se que $\mathbf{r}(t)$ pode ser obtido integrando $\mathbf{v}(t)$, e $\mathbf{v}(t)$ pode ser obtido integrando $\mathbf{a}(t)$. Entretanto, tais integrações não produzem funções únicas, pois ocorrem constantes das integrações. Tipicamente, são necessárias condições iniciais para determinar essas constantes.

► **Exemplo 2** Uma partícula move-se pelo espaço tridimensional de tal maneira que sua velocidade é

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

Determine as coordenadas da partícula no instante $t = 1$, dado que a partícula está no ponto $(-1, 2, 4)$ no instante $t = 0$.

***Solução*** Integrando a função velocidade para obter a função posição, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt = \int (\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})\,dt = t\mathbf{i} + \frac{t^2}{2}\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k} + \mathbf{C} \tag{5}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração. Uma vez que as coordenadas da partícula no instante $t = 0$ são $(-1, 2, 4)$, o vetor posição no instante $t = 0$ é

$$\mathbf{r}(0) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \tag{6}$$

Substituindo $t = 0$ em (5) e equacionando o resultado com (6) obtemos

$$\mathbf{C} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Substituindo esse valor de $\mathbf{C}$ em (5) e simplificando, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + \left(\frac{t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{t^3}{3} + 4\right)\mathbf{k}$$

Assim, no instante $t = 1$, o vetor posição da partícula é

$$\mathbf{r}(1) = 0\mathbf{i} + \frac{5}{2}\mathbf{j} + \frac{13}{3}\mathbf{k}$$

de modo que suas coordenadas naquele instante são $\left(0, \frac{5}{2}, \frac{13}{3}\right)$. ◄

## DESLOCAMENTO E DISTÂNCIA PERCORRIDA

Se uma partícula movimenta-se ao longo de uma curva $C$ no espaço bi ou tridimensional, o ***deslocamento*** da partícula durante o intervalo do tempo $t_1 \le t \le t_2$ é comumente denotado por $\Delta\mathbf{r}$ e é definido como

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) \tag{7}$$

(Figura 12.6.3). O vetor deslocamento, que descreve a variação na posição da partícula durante o intervalo de tempo, pode ser obtido integrando a função velocidade de $t_1$ a $t_2$:

$$\Delta\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \mathbf{r}(t)\Big]_{t_1}^{t_2} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) \qquad \boxed{\text{Deslocamento}} \tag{8}$$

A partir do Teorema 12.3.1, podemos determinar a distância $s$ percorrida por uma partícula durante um intervalo do tempo $t_1 \le t \le t_2$ integrando a velocidade escalar sobre aquele intervalo, uma vez que

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{v}(t)\|\,dt \qquad \boxed{\text{Distância percorrida}} \tag{9}$$

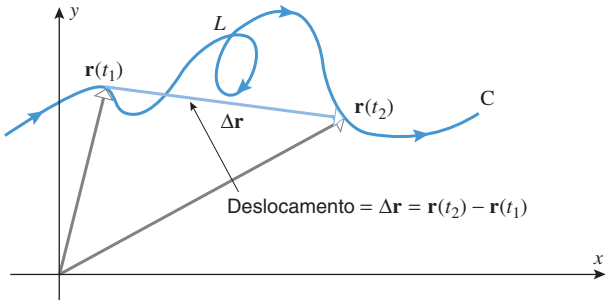



Figura 12.6.3

► **Exemplo 3** Uma partícula move-se ao longo de uma hélice circular no espaço tridimensional, de tal maneira que o seu vetor posição no instante $t$ é

$$\mathbf{r}(t) = (4\cos \pi t)\mathbf{i} + (4 \operatorname{sen} \pi t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

Determine a distância percorrida e o deslocamento da partícula durante o intervalo de tempo $1 \leq t \leq 5$.

***Solução*** Temos

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-4\pi \operatorname{sen} \pi t)\mathbf{i} + (4\pi \cos \pi t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(-4\pi \operatorname{sen} \pi t)^2 + (4\pi \cos \pi t)^2 + 1} = \sqrt{16\pi^2 + 1}$$

Assim, segue de (9) que a distância percorrida pela partícula do instante $t = 1$ até $t = 5$ é

$$s = \int_1^5 \sqrt{16\pi^2 + 1}\, dt = 4\sqrt{16\pi^2 + 1}$$

Além disso, segue de (8) que o deslocamento durante o intervalo de tempo é

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}(5) - \mathbf{r}(1) \\ &= (4\cos 5\pi\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} 5\pi\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) - (4\cos \pi\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} \pi\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= (-4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) - (-4\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 4\mathbf{k} \end{aligned}$$

o que nos mostra que a variação da partícula no intervalo de tempo é igual a 4 unidades diretamente para cima. ◄

## COMPONENTES NORMAL E TANGENCIAL DA ACELERAÇÃO

Sabemos de nossa experiência como passageiros de automóvel que, se a velocidade do carro aumentar rapidamente, nosso corpo será jogado para trás contra o encosto do assento. Sabemos também que se o carro percorrer uma curva na estrada, então nosso corpo será jogado para fora da curva – quanto maior a curvatura na estrada, maior será a força com que somos empurrados. A explicação desses fenômenos pode ser entendida resolvendo-se a velocidade e a aceleração em componentes vetoriais que são paralelos aos vetores tangente e normal unitários. O teorema seguinte explica como isso pode ser feito.

**12.6.2** TEOREMA *Se uma partícula move-se ao longo de uma curva lisa $C$ no espaço bi ou tridimensional, então em cada ponto da curva os vetores velocidade e aceleração podem ser escritos como*

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} \qquad \mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N} \tag{10–11}$$

*onde $s$ é um parâmetro comprimento de arco da curva e $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\kappa$ denotam o vetor tangente unitário, o vetor normal unitário e a curvatura no ponto (Figura 12.6.4).*

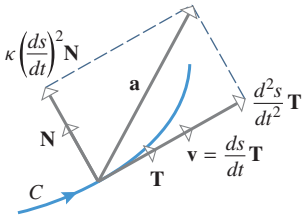



Figura 12.6.4

**DEMONSTRAÇÃO** A Fórmula (10) é simplesmente uma reformulação de (1). Para obter (11), diferenciamos ambos os lados de (10) em relação a $t$; disso resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\mathbf{T}\right) &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\mathbf{T}}{ds} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\kappa\mathbf{N} \qquad \text{Fórmula (10) da Seção 12.5}\end{aligned}$$

de onde segue (11). ■

Os coeficientes de **T** e **N** em (11) são denotados usualmente por

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad a_N = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{12–13}$$

e, nesse caso, a Fórmula (11) é expressa como

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N} \tag{14}$$

A Fórmula (14) aplica-se a movimentos tanto no espaço bidimensional quanto tridimensional. O que é interessante é que a fórmula no espaço tridimensional não envolve o vetor binormal **B**, portanto o vetor aceleração está sempre no plano de **T** e **N** (o plano osculador), mesmo para os caminhos mais sinuosos (Figura 12.6.5).

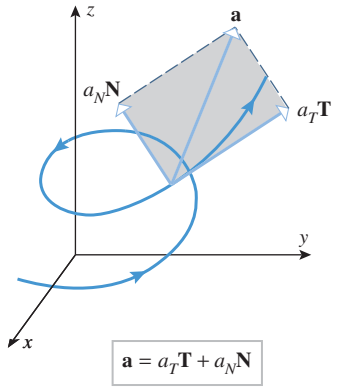



**Figura 12.6.5**

Nessa fórmula, os escalares $a_T$ e $a_N$ são chamados de ***componente tangencial escalar da aceleração*** e ***componente normal escalar da aceleração***, e os vetores $a_T\mathbf{T}$ e $a_N\mathbf{N}$ são chamados de ***componente tangencial vetorial da aceleração*** e ***componente normal vetorial da aceleração***.

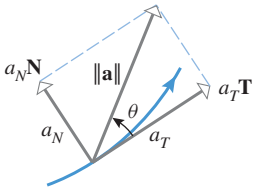
Os componentes escalares da aceleração explicam o efeito que experimentamos quando um carro arranca rapidamente ou faz uma curva. O crescimento abrupto na velocidade escalar produz grandes valores para $d^2s/dt^2$, o que resulta em um grande componente tangencial escalar da aceleração; pela segunda lei de Newton, isso produz uma grande força tangencial sobre o carro na direção do movimento. Para entender o efeito de percorrer uma curva, observe que o componente normal escalar da aceleração tem a curvatura $\kappa$ e a velocidade escalar $ds/dt$ como fatores. Assim, curvas acentuadas ou curvas feitas em alta velocidade produzem grandes forças normais sobre o carro.

Embora as Fórmulas (12) e (13) sejam úteis para o conhecimento do movimento de partículas movendo-se ao longo de trajetórias curvas, elas não são sempre as melhores fórmulas de cálculo. O teorema a seguir fornece algumas fórmulas mais úteis que relacionam $a_T$, $a_N$ e $\kappa$ à velocidade **v** e à aceleração **a**.

O Teorema 12.6.3 aplica-se a movimentos no espaço bi ou tridimensional, mas para o movimento no espaço bidimensional, precisamos acrescentar um componente **k** nulo a **v** e a **a** para calcular o produto vetorial.

**12.6.3 TEOREMA** *Se uma partícula move-se ao longo de uma curva lisa C no espaço bi ou tridimensional, então em cada ponto da curva a velocidade* **v** *e a aceleração* **a** *estão relacionadas com* $a_T$, $a_N$ *e* $\kappa$ *pelas fórmulas*

$$a_T = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} \qquad a_N = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} \qquad \kappa = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} \tag{15–17}$$




$a_T = \|\mathbf{a}\| \cos\theta$
$a_N = \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen}\theta$

**Figura 12.6.6**

**DEMONSTRAÇÃO** Conforme ilustrado na Figura 12.6.6, seja $\theta$ o ângulo entre o vetor $\mathbf{a}$ e o vetor $a_T\,\mathbf{T}$. Assim,

$$a_T = ||\mathbf{a}|| \cos\theta \quad \text{e} \quad a_N = ||\mathbf{a}|| \operatorname{sen}\theta$$

de onde obtemos que

$$a_T = \|\mathbf{a}\| \cos\theta = \frac{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{a}\| \cos\theta}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$a_N = \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen}\theta = \frac{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{a}\| \operatorname{sen}\theta}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\kappa = \frac{a_N}{(ds/dt)^2} = \frac{a_N}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}\frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} \quad \blacksquare$$

Lembre-se de que, para curvas lisas não lineares no espaço bidimensional, o vetor normal unitário $\mathbf{N}$ é o normal para dentro (pois aponta para o lado côncavo da curva). Explique por que o mesmo é verdadeiro para $a_N\mathbf{N}$.

**▶ Exemplo 4** Uma partícula move-se pelo espaço tridimensional, de tal maneira que o vetor posição no instante $t$ é

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

(O caminho é a cúbica torcida mostrada na Figura 12.1.5.)

(a) Obtenha os componentes tangencial e normal escalares da aceleração no instante $t$.

(b) Obtenha os componentes tangencial e normal escalares da aceleração no instante $t = 1$.

(c) Obtenha os componentes tangencial e normal vetoriais da aceleração no instante $t = 1$.

(d) Obtenha a curvatura da trajetória no ponto em que a partícula está no instante $t = 1$.

***Solução (a)*** Temos

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 4t + 18t^3$$

$$\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Assim, de (15) e (16)

$$a_T = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4t + 18t^3}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

$$a_N = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}} = 2\sqrt{\frac{9t^4 + 9t^2 + 1}{9t^4 + 4t^2 + 1}}$$

***Solução (b)*** No instante $t = 1$, os componentes $a_T$ e $a_N$ na parte (a) são

$$a_T = \frac{22}{\sqrt{14}} \approx 5{,}88 \quad \text{e} \quad a_N = 2\sqrt{\frac{19}{14}} \approx 2{,}33$$

***Solução (c)*** Como $\mathbf{T}$ e $\mathbf{v}$ têm a mesma direção e sentido, $\mathbf{T}$ pode ser obtido normalizando $\mathbf{v}$, isto é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}$$

No instante $t = 1$, temos

$$\mathbf{T}(1) = \frac{\mathbf{v}(1)}{\|\mathbf{v}(1)\|} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\|\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

Disso e da parte (b), obtemos o componente tangencial vetorial da aceleração:

$$a_T(1)\mathbf{T}(1) = \frac{22}{\sqrt{14}}\mathbf{T}(1) = \frac{11}{7}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \frac{11}{7}\mathbf{i} + \frac{22}{7}\mathbf{j} + \frac{33}{7}\mathbf{k}$$

Para encontrar o componente normal vetorial da aceleração, reescrevemos $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ como

$$a_N\mathbf{N} = \mathbf{a} - a_T\mathbf{T}$$

Assim, no instante $t = 1$, o componente normal vetorial da aceleração é

$$\begin{aligned} a_N(1)\mathbf{N}(1) &= \mathbf{a}(1) - a_T(1)\mathbf{T}(1) \\ &= (2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) - \left(\frac{11}{7}\mathbf{i} + \frac{22}{7}\mathbf{j} + \frac{33}{7}\mathbf{k}\right) \\ &= -\frac{11}{7}\mathbf{i} - \frac{8}{7}\mathbf{j} + \frac{9}{7}\mathbf{k} \end{aligned}$$

***Solução (d)*** Aplicaremos a Fórmula (17) com $t = 1$. Da parte (a),

$$\|\mathbf{v}(1)\| = \sqrt{14} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}(1) \times \mathbf{a}(1) = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Assim, no instante $t = 1$,

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\sqrt{76}}{(\sqrt{14})^3} = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{38}{7}} \approx 0{,}17 \quad \blacktriangleleft$$

Use a Fórmula (18) para confirmar o valor de $a_N$ obtido no Exemplo 4.

No caso em que $\|\mathbf{a}\|$ e $a_T$ são conhecidos, existe uma alternativa útil da Fórmula (16) para $a_N$ que não requer o cálculo de um produto vetorial. Segue geometricamente da Figura 12.6.6 e do Teorema de Pitágoras, ou algebricamente da Fórmula (14) (Ver Exercício 51), que

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2} \tag{18}$$

## UM MODELO DE MOVIMENTO DE PROJÉTIL

Anteriormente neste livro, examinamos vários problemas relacionados com objetos que se movem *verticalmente* no campo gravitacional da Terra (ver a subseção da Seção 5.7, no Volume 1, intitulado O Modelo de Queda Livre e a subseção da Seção 8.4 intitulada Um Modelo de Queda Livre Retardada pela Resistência do Ar). Agora, consideraremos o movimento de um projétil lançado ao longo de uma trajetória *curva* no campo gravitacional da Terra. Para isso, necessitaremos da *versão vetorial* da Segunda Lei do Movimento de Newton (6.6.4), a saber,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{19}$$

e precisaremos fazer três hipóteses de modelagem:

- A massa $m$ do objeto é constante.
- A única força agindo sobre o objeto depois de lançado é a força da gravidade da Terra. (Assim, são ignorados a resistência do ar e o efeito gravitacional de outros planetas e objetos celestes.)
- O objeto permanece suficientemente próximo à Terra para que possamos supor a força da gravidade como sendo constante.

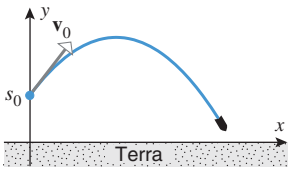



**Figura 12.6.7**

Vamos supor que, no instante $t = 0$, um objeto de massa $m$ seja lançado de uma altura $s_0$ acima da Terra com um vetor velocidade inicial de $\mathbf{v}_0$. Além disso, introduzamos um sistema de coordenadas $xy$, conforme mostrado na Figura 12.6.7. Nesse sistema de coordenadas, o sentido $y$ positivo é para cima, a origem está na superfície da Terra e a localização inicial do objeto é $(0, s_0)$. Nosso objetivo é usar os princípios básicos da Física para deduzir a função velocidade $\mathbf{v}(t)$ e a função posição $\mathbf{r}(t)$ a partir da função aceleração $\mathbf{a}(t)$ do objeto. Nosso ponto de partida é a observação física de que a força $\mathbf{F}$ da gravidade da Terra sobre um objeto de massa $m$ é dirigida para baixo e dada por

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$$

onde $g$ é a aceleração devido à gravidade (ver 9.4.3). Tem-se, a partir desse fato e da segunda lei de Newton (19), que

$$m\mathbf{a} = -mg\mathbf{j}$$

ou, cancelando $m$ em ambos os lados,

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j} \tag{20}$$

Observe que essa função aceleração não envolve $t$ e é, portanto, constante. Podemos, agora, obter a função velocidade $\mathbf{v}(t)$ integrando essa função aceleração e usando a condição inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ para determinar a constante de integração. Integrando (20) em relação a $t$ e lembrando que $-g\mathbf{j}$ é constante, obtemos

$$\mathbf{v}(t) = \int -g\mathbf{j}\,dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{c}_1$$

onde $\mathbf{c}_1$ é um vetor constante de integração. Substituindo $t = 0$ nessa equação e usando a condição inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, obtemos $\mathbf{v}_0 = \mathbf{c}_1$. Assim, a função velocidade do objeto é

$$\mathbf{v}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 \tag{21}$$

Para obter a função posição $\mathbf{r}(t)$ do objeto, integraremos a função velocidade e usaremos o conhecimento da posição inicial do objeto para determinar a constante de integração. Observe que o objeto tem coordenadas $(0, s_0)$ no instante $t = 0$, logo o vetor posição nesse instante é

$$\mathbf{r}(0) = 0\mathbf{i} + s_0\mathbf{j} = s_0\mathbf{j} \tag{22}$$

Essa é a condição inicial de que necessitaremos para determinar a constante de integração. Integrando (21) em relação a $t$, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = \int (-gt\mathbf{j} + \mathbf{v}_0)\,dt = -\tfrac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{c}_2 \tag{23}$$

onde $\mathbf{c}_2$ é outro vetor constante de integração. Substituindo $t = 0$ em (23) e usando a condição inicial (22), obtemos

$$s_0\mathbf{j} = \mathbf{c}_2$$

de modo que (23) pode ser escrito como

$$\mathbf{r}(t) = \left(-\tfrac{1}{2}gt^2 + s_0\right)\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 \tag{24}$$

Essa fórmula expressa a função posição do objeto em termos da posição e da velocidade inicial conhecidas.

Observe que a massa $m$ do objeto não aparece nas Fórmulas (21) e (24) e, portanto, não tem influência sobre a trajetória ou a velocidade do objeto. Isso explica a famosa observação de Galileu que dois objetos de massas diferentes, deixados cair da mesma altura, atingirão o chão no mesmo instante se a resistência do ar for ignorada.

## EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO MOVIMENTO DE PROJÉTIL

As Fórmulas (21) e (24) podem ser usadas para obter equações paramétricas da posição e velocidade em termos da velocidade inicial do objeto e o ângulo que o vetor da velocidade inicial faz com o eixo $x$. Para esse fim, sejam $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$, $\alpha$ o ângulo que o vetor velocidade

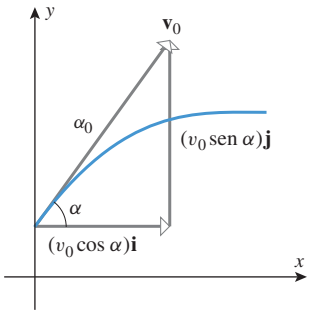



**Figura 12.6.8**

inicial $\mathbf{v}_0$ faz com o eixo $x$, $v_x$ e $v_y$ os componentes escalares horizontal e vertical de $\mathbf{v}(t)$ no instante $t$ e $x$ e $y$ os componentes horizontal e vertical de $\mathbf{r}(t)$ no instante $t$. Como está ilustrado na Figura 12.6.8, o vetor velocidade inicial pode ser expresso como

$$\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)\mathbf{j} \tag{25}$$

Substituindo essa expressão em (24) e combinando componentes iguais, obtemos (verifique)

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + \left(s_0 + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \tag{26}$$

que é equivalente às equações paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = s_0 + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{27}$$

Analogamente, substituindo (25) em (21) e combinando componentes iguais, obtemos

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen} \alpha - gt)\mathbf{j}$$

que é equivalente às equações paramétricas

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \operatorname{sen} \alpha - gt \tag{28}$$

O parâmetro $t$ pode ser eliminado em (27) resolvendo a primeira equação para $t$ e substituindo na segunda equação. Deixamos para o leitor mostrar que disso resulta

$$y = s_0 + (\operatorname{tg} \alpha)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2 \tag{29}$$

que é a equação de uma parábola, já que o lado direito é um polinômio quadrático em $x$. Assim, mostramos que a trajetória de um projétil é um arco parabólico.

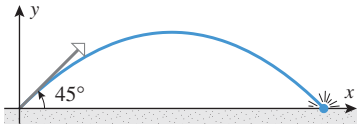



**Figura 12.6.9**

▶ **Exemplo 5** Um projétil disparado por um canhão tem uma velocidade de 800 pés/s na boca do canhão. O cano faz um ângulo de 45° com a horizontal e, para simplificar, vamos supor que a abertura do cano esteja ao nível do solo.

(a) Obtenha equações paramétricas para a trajetória do projétil em relação ao sistema de coordenadas da Figura 12.6.9.

(b) Que altura atinge o projétil?

(c) Que distância o projétil percorre horizontalmente?

(d) Qual é a velocidade do projétil no ponto de impacto com o chão?

***Solução (a)*** A partir de (27) com $v_0 = 800$ pés/s, $\alpha = 45°$, $s_0 = 0$ pés (uma vez que o projétil começa ao nível do solo) e $g = 32$ pés/s$^2$, obtemos as equações paramétricas

$$x = (800 \cos 45°)t, \quad y = (800 \operatorname{sen} 45°)t - 16t^2 \quad (t \geq 0)$$

que simplificam para

$$x = 400\sqrt{2}t, \quad y = 400\sqrt{2}t - 16t^2 \qquad (t \geq 0) \tag{30}$$

***Solução (b)*** A altura máxima do projétil é o valor máximo de $y$ em (30), que ocorre quando $dy/dt = 0$, isto é, quando

$$400\sqrt{2} - 32t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

Substituindo esse valor de $t$ em (30), obtemos

$$y = 5.000 \text{ pés}$$

como a altura máxima do projétil.

***Solução (c)*** O projétil atingirá o solo quando $y = 0$. A partir de (30), isso ocorre quando

$$400\sqrt{2}t - 16t^2 = 0 \quad \text{ou} \quad t(400\sqrt{2} - 16t) = 0$$

A solução $t = 0$ corresponde à posição inicial do projétil e a solução $t = 25\sqrt{2}$, ao instante do impacto. Substituindo o último valor na equação de $x$ em (30), obtemos

$$x = 20.000 \text{ pés}$$

como a distância horizontal percorrida pelo projétil.

***Solução (d)*** A partir de (30), a função posição do projétil é

$$\mathbf{r}(t) = 400\sqrt{2}t\,\mathbf{i} + (400\sqrt{2}t - 16t^2)\,\mathbf{j}$$

de modo que a função velocidade é

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 400\sqrt{2}\,\mathbf{i} + (400\sqrt{2} - 32t)\,\mathbf{j}$$

Da parte (c), o impacto ocorre quando $t = 25\sqrt{2}$, logo o vetor velocidade nesse ponto é

$$\mathbf{v}(25\sqrt{2}) = 400\sqrt{2}\,\mathbf{i} + [400\sqrt{2} - 32(25\sqrt{2})]\,\mathbf{j} = 400\sqrt{2}\,\mathbf{i} - 400\sqrt{2}\,\mathbf{j}$$

Assim, a velocidade no impacto é de

$$\|\mathbf{v}(25\sqrt{2})\| = \sqrt{(400\sqrt{2})^2 + (-400\sqrt{2})^2} = 800 \text{ pés/s} \blacktriangleleft$$

A velocidade de impacto no Exemplo 5 é igual à velocidade na boca do canhão. Isso é esperado? Explique.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.6 (*Ver página 895 para respostas.*)

1. Se $\mathbf{r}(t)$ for a função posição de uma partícula, então a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula no instante $t$ são dadas, respectivamente, por

   $\mathbf{v}(t) =$ _____, $\mathbf{a}(t) =$ _____, $\dfrac{ds}{dt} =$ _____.

2. Se $\mathbf{r}(t)$ for a função posição de uma partícula, então o deslocamento da partícula ao longo do intervalo de tempo $t_1 \le t \le t_2$ é _____ e a distância $s$ percorrida pela partícula durante esse intervalo de tempo é dada pela integral _____.

3. O componente tangencial escalar da aceleração é dado pela fórmula _____ e o componente normal escalar da aceleração é dado pela fórmula _____.

4. O modelo de movimento de projétil

   $$\mathbf{r}(t) = \left(-\tfrac{1}{2}gt^2 + s_0\right)\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0$$

   descreve o movimento de um objeto com aceleração constante $\mathbf{a} =$ _____ e função velocidade $\mathbf{v}(t) =$ _____. A posição inicial do objeto é _____ e sua velocidade inicial é _____.

## EXERCÍCIOS 12.6 Recurso Gráfico C CAS

**1-4** Nestes exercícios, $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição de uma partícula em movimento no plano. Obtenha a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar em um instante arbitrário $t$. Esboce a trajetória da partícula junto com os vetores velocidade e aceleração no instante $t$ indicado. ■

1. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j};\ t = \pi/3$
2. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j};\ t = 2$
3. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j};\ t = 0$
4. $\mathbf{r}(t) = (2 + 4t)\,\mathbf{i} + (1 - t)\,\mathbf{j};\ t = 1$

**5-8** Obtenha a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração em um dado instante $t$ de uma partícula em movimento ao longo da curva dada. ■

5. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\,\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\,\mathbf{k};\ t = 1$
6. $x = 1 + 3t,\ y = 2 - 4t,\ z = 7 + t;\ t = 2$
7. $x = 2\cos t,\ y = 2\operatorname{sen} t,\ z = t;\ t = \pi/4$
8. $\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k};\ t = \pi/2$

### ENFOCANDO CONCEITOS

9. Conforme ilustrado na figura a seguir, suponha que as equações do movimento de uma partícula movendo-se ao longo de uma trajetória elíptica sejam $x = a\cos \omega t$, $y = b \operatorname{sen} \omega t$.
   (a) Mostre que a aceleração está dirigida para a origem.

(b) Mostre que a magnitude da aceleração é proporcional à distância da partícula à origem.

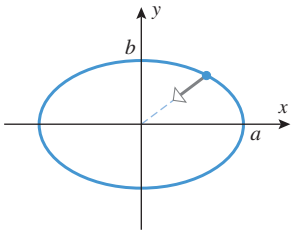



**Figura Ex-9**

**10.** Suponha que uma partícula vibre de tal maneira que sua função posição seja $\mathbf{r}(t) = 16 \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{i} + 4 \cos 2\pi t\,\mathbf{j}$, onde a distância está em milímetros e $t$ está em segundos.
(a) Determine a velocidade e a aceleração no instante $t = 1$ s.
(b) Mostre que a partícula move-se ao longo de uma curva parabólica.
(c) Mostre que a partícula move-se para frente e para trás ao longo da curva.

**11.** O que pode ser dito sobre a trajetória de uma partícula que se move no espaço bi ou tridimensional com aceleração nula? Justifique sua resposta.

**12.** No Teorema 12.2.8 foi visto que se $\mathbf{r}(t)$ for uma função vetorial no espaço bi ou tridimensional e se $\|\mathbf{r}(t)\|$ for constante para todo $t$, então $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.
(a) Traduza esse teorema em uma afirmação sobre o movimento de uma partícula no espaço bi ou tridimensional.
(b) Substitua $\mathbf{r}(t)$ por $\mathbf{r}'(t)$ no teorema e traduza o resultado numa afirmação sobre o movimento de uma partícula no espaço bi ou tridimensional.

**13.** Suponha que o vetor posição de uma partícula movendo-se em um plano seja $\mathbf{r} = 12\sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j}$, $t > 0$. Determine a velocidade mínima da partícula e sua localização quando estiver com essa velocidade.

**14.** Suponha que o movimento de uma partícula seja descrito pelo vetor posição $\mathbf{r} = (t - t^2)\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j}$. Determine a velocidade mínima da partícula e sua localização quando estiver com esta velocidade.

**15.** Suponha que a função posição de uma partícula movendo-se no espaço bidimensional seja $\mathbf{r} = \operatorname{sen} 3t\,\mathbf{i} - 2\cos 3t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi/3$.
(a) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico da velocidade da partícula *versus* o tempo de $t = 0$ a $t = 2\pi/3$.
(b) Qual é a velocidade máxima e mínima da partícula?
(c) Use o gráfico para estimar o instante no qual a velocidade máxima ocorre pela primeira vez.
(d) Determine o instante exato no qual a velocidade máxima ocorre pela primeira vez.

**16.** Suponha que a função posição de uma partícula movendo-se no espaço tridimensional seja $\mathbf{r} = 3\cos 2t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}$.
(a) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico da velocidade da partícula *versus* o tempo de $t = 0$ a $t = \pi$.
(b) Qual é a velocidade máxima e mínima da partícula?
(c) Use o gráfico para estimar o instante no qual a velocidade máxima ocorre pela primeira vez.
(d) Determine os valores exatos da velocidade máxima e mínima e o instante exato no qual a velocidade máxima ocorre pela primeira vez.

**17-20** Use a informação dada para determinar os vetores posição e velocidade da partícula. ■

**17.** $\mathbf{a}(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$; $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$; $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$

**18.** $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$; $\mathbf{v}(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

**19.** $\mathbf{a}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$; $\mathbf{v}(0) = \mathbf{k}$; $\mathbf{r}(0) = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$

**20.** $\mathbf{a}(t) = (t+1)^{-2}\mathbf{j} - e^{-2t}\mathbf{k}$; $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{r}(0) = 2\mathbf{k}$

**21.** Determine, até o grau mais próximo, o ângulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ para $\mathbf{r} = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$ quando $t = 1$.

**22.** Mostre que o ângulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ é constante para o vetor posição $\mathbf{r} = e^t \cos t\,\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$. Determine o ângulo.

**23.** (a) Suponha que, no instante $t = t_0$, um elétron tenha um vetor posição de $\mathbf{r} = 3{,}5\,\mathbf{i} - 1{,}7\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e em um instante mais tarde $t = t_1$, seu vetor posição seja $\mathbf{r} = 4{,}2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2{,}4\,\mathbf{k}$. Qual é o deslocamento do elétron durante o intervalo de tempo de $t_0$ a $t_1$?
(b) Suponha que, durante um certo intervalo de tempo, um próton tenha um deslocamento $\Delta\mathbf{r} = 0{,}7\,\mathbf{i} + 2{,}9\,\mathbf{j} - 1{,}2\,\mathbf{k}$ e que o seu vetor posição final observado seja $\mathbf{r} = 3{,}6\,\mathbf{k}$. Qual foi o vetor posição inicial do próton?

**24.** Suponha que a função posição de uma partícula movendo-se ao longo de um círculo no plano $xy$ seja dada por $\mathbf{r} = 5\cos 2\pi t\,\mathbf{i} + 5\operatorname{sen} 2\pi t\,\mathbf{j}$.
(a) Esboce alguns vetores deslocamento durante o intervalo de tempo de $t = 0$ a $t = 1$.
(b) Qual é a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo?

**25-28** Obtenha o deslocamento e a distância percorrida ao longo do intervalo de tempo indicado. ■

**25.** $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j}$; $1 \le t \le 3$

**26.** $\mathbf{r} = (1 - 3\operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j}$; $0 \le t \le 3\pi/2$

**27.** $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$; $0 \le t \le \ln 3$

**28.** $\mathbf{r} = \cos 2t\,\mathbf{i} + (1 - \cos 2t)\,\mathbf{j} + \left(3 + \frac{1}{2}\cos 2t\right)\mathbf{k}$; $0 \le t \le \pi$

**29-30** São dados os vetores posições de duas partículas. Mostre que as partículas movem-se ao longo da mesma trajetória, mas que a velocidade da primeira é constante e a velocidade da segunda não é. ■

**29.** $\mathbf{r}_1 = 2\cos 3t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} 3t\,\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_2 = 2\cos(t^2)\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}(t^2)\mathbf{j} \quad (t \ge 0)$

**30.** $\mathbf{r}_1 = (3 + 2t)\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1 - t)\mathbf{k}$
$\mathbf{r}_2 = (5 - 2t^3)\mathbf{i} + (1 - t^3)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

**31-36** É dada a função posição de uma partícula. Use o Teorema 12.6.3. para encontrar
(a) os componentes escalares tangencial e normal da aceleração no instante $t$ indicado;
(b) os componentes vetoriais tangencial e normal da aceleração no instante $t$ indicado;
(c) a curvatura da trajetória no ponto em que a partícula está localizada no instante $t$ indicado. ■

**31.** $\mathbf{r} = e^{-t}\mathbf{i} + e^{t}\mathbf{j};\ t = 0$

**32.** $\mathbf{r} = \cos(t^2)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(t^2)\mathbf{j};\ t = \sqrt{\pi}/2$

**33.** $\mathbf{r} = (t^3 - 2t)\mathbf{i} + (t^2 - 4)\mathbf{j};\ t = 1$

**34.** $\mathbf{r} = e^{t}\cos t\,\mathbf{i} + e^{t}\operatorname{sen} t\,\mathbf{j};\ t = \pi/4$

**35.** $\mathbf{r} = e^{t}\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ t = 0$

**36.** $\mathbf{r} = 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k};\ t = \pi/2$

**37-38** Nestes exercícios, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ são dadas num certo instante de tempo. Determine $a_T$, $a_N$, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$ nesse instante. ■

**37.** $\mathbf{v} = -4\mathbf{j},\ \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

**38.** $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

**39-40** É dada a velocidade escalar $\|\mathbf{v}\|$ de uma partícula em um instante de tempo arbitrário $t$. Determine o componente tangencial escalar da aceleração no instante indicado. ■

**39.** $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{t^2 + e^{-3t}};\ t = 0$

**40.** $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(4t - 1)^2 + \cos^2 \pi t};\ t = \frac{1}{4}$

**41.** O acelerador nuclear do Laboratório Enrico Fermi é circular com um raio de 1 km. Encontre o componente normal escalar da aceleração de um próton movendo-se ao longo do acelerador com uma velocidade constante de $2{,}9 \times 10^5$ km/s.

**42.** Suponha que uma partícula se mova com aceleração não nula ao longo da curva $y = f(x)$. Use a parte (b) do Exercício 23 da Seção 12.5 para mostrar que o vetor aceleração é tangente à curva em cada ponto em que $f''(x) = 0$.

**43-44** Use a informação dada e o Exercício 23 da Seção 12.5 para determinar o componente normal escalar da aceleração como uma função de $x$. ■

**43.** Uma partícula move-se ao longo da parábola $y = x^2$ com uma velocidade constante de 3 unidades por segundo.

**44.** Uma partícula move-se ao longo da curva $x = \ln y$ com uma velocidade constante de 2 unidades por segundo.

**45-46** Use a informação dada para determinar o componente normal escalar da aceleração no instante $t = 1$. ■

**45.** $\mathbf{a}(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k};\ a_T(1) = 3$

**46.** $\|\mathbf{a}(1)\| = 9;\ a_T(1)\mathbf{T}(1) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**47-50 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**47.** São paralelos os vetores velocidade e tangente unitário de uma partícula em movimento.

**48.** Se uma partícula move-se ao longo de uma curva lisa $C$ no espaço, então, em cada ponto de $C$, o componente escalar da aceleração da partícula será o produto da curvatura de $C$ pela velocidade escalar da partícula nesse ponto.

**49.** Se uma partícula move-se ao longo de uma curva lisa $C$ e passa por um ponto de curvatura zero, então os vetores velocidade e aceleração terão a mesma direção nesse ponto.

**50.** A distância percorrida por uma partícula ao longo de um intervalo de tempo é a magnitude do vetor deslocamento da partícula durante esse intervalo de tempo.

**51.** Deduza a Fórmula (18) da Fórmula (14).

**52.** Um automóvel viaja a uma velocidade constante ao longo de uma curva cujo raio de curvatura é de 1.000 metros. Qual é a velocidade máxima permitida se o valor máximo aceito para o componente normal escalar da aceleração for de 1,5 m/s$^2$?

**53.** Se um automóvel de massa $m$ fizer uma curva, então o componente vetorial da aceleração para dentro $a_N\mathbf{N}$ é causado pela força de atrito $\mathbf{F}$ da estrada. Assim, segue da forma vetorial da segunda lei de Newton [Equação (19)] que a força de atrito e o componente escalar normal da aceleração estão relacionados pela equação $\mathbf{F} = ma_N\mathbf{N}$. Assim,

$$\|\mathbf{F}\| = m\kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Use esse resultado para encontrar a magnitude da força de atrito em newtons exercida pela estrada sobre um carrinho de kart de 500 kg dirigido a uma velocidade de 10 km/h ao longo de uma pista circular com raio de 15 m. [*Nota*: 1N = 1kg · m/s$^2$]

**54.** Um projétil é disparado a partir do nível do chão com uma velocidade de 320 pés/s na boca de canhão e ângulo de elevação de 60°. Determine:
(a) as equações paramétricas da trajetória do projétil;
(b) a altura máxima alcançada pelo projétil;
(c) a distância horizontal percorrida pelo projétil;
(d) a velocidade do projétil no impacto.

**55.** Uma pedra é atirada para baixo do topo de um prédio a 168 pés de altura a um ângulo de 60° com a horizontal. A que distância da base do prédio a pedra atinge o solo se sua velocidade inicial for de 80 pés/s?

**56.** Resolva o Exercício 55 supondo que a pedra seja atirada horizontalmente com uma velocidade de 80 pés/s.

**57.** Um projétil é disparado do nível do chão com um ângulo de elevação de 30°. Qual deveria ser a velocidade na boca do canhão a fim de que a altura máxima do projétil seja 2.500 pés?

**58.** Um projétil, disparado do nível do chão com um ângulo de elevação de 45°, atinge o chão a uma distância de 24.500 m. Calcule a velocidade do projétil na boca do canhão.

**59.** Determine dois ângulos de elevação que irão possibilitar um projétil atirado a partir do nível do chão com uma velocidade de 800 pés/s na boca do canhão atingir no chão um alvo que está a 10.000 pés.

**60.** Uma bola rola para fora de uma mesa de 4 pés de altura, enquanto se move a uma velocidade constante de 5 pés/s.
(a) Quanto tempo irá levar para a bola atingir o chão após deixar a mesa?
(b) Com que velocidade a bola atinge o chão?
(c) Se uma bola fosse deixada cair a partir do repouso da mesma mesa exatamente quando a outra bola rolando deixa a mesa, qual das duas atingirá o chão primeiro? Justifique sua resposta.

**61.** Na figura a seguir, uma mangueira de incêndio joga água com uma velocidade inicial de 40 pés/s a um ângulo de 60° com a horizontal.
(a) Confirme que a água irá passar acima do canto $A$.
(b) Confirme que a água irá atingir o telhado.
(c) A que distância do ponto $A$ a água irá atingir o telhado?

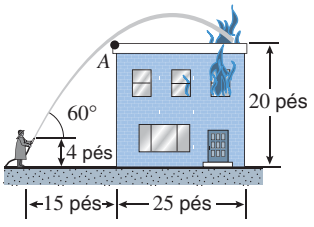



**Figura Ex-61**

**62.** Qual é a velocidade inicial mínima que irá permitir à água do Exercício 61 atingir o telhado?

**63.** Conforme mostra a figura a seguir, água é esguichada de uma mangueira com uma velocidade inicial de 35m/s a um ângulo de 45° com a horizontal.
(a) Qual é o raio de curvatura do jato de água no ponto em que ele deixa a mangueira?
(b) Qual é a máxima altura do jato acima da ponta da mangueira?

**64.** Conforme ilustrado na figura a seguir, um trem percorre uma curva. No ponto em que o trem está a uma velocidade de 132 pés/s e o raio de curvatura da curva é 3.000 pés, o maquinista aciona o freio e diminui a velocidade do trem a uma taxa constante de 7,5 pés/s$^2$.
(a) Encontre a magnitude da aceleração no instante em que o maquinista aciona o freio.
(b) Aproxime o ângulo entre o vetor aceleração e o vetor tangente unitário no instante em que o maquinista aciona o freio.

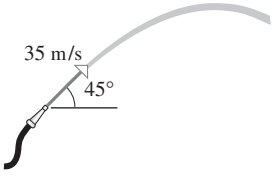



**Figura Ex-63**

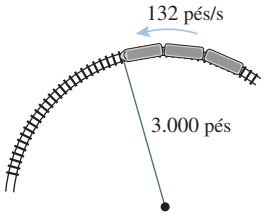



**Figura Ex-64**

**65.** Um projétil é disparado de um ponto ao nível do chão com ângulo de elevação $\alpha$ e uma velocidade de boca $v_0$.
(a) Mostre que a altura máxima atingida pelo projétil é

$$\text{altura máxima} = \frac{(v_0 \operatorname{sen}\alpha)^2}{2g}$$

(b) O ***alcance horizontal*** $R$ do projétil é a distância horizontal percorrida até retornar ao solo. Mostre que $R = (v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha)/g$. Para que ângulo de elevação o alcance será máximo? Qual é o alcance máximo?

**66.** Um projétil é disparado a partir do nível do solo com um ângulo de elevação $\alpha$ e uma velocidade de boca $v_0$. Obtenha dois ângulos que podem ser usados para atingir um alvo ao nível do solo que está a 3/4 do alcance máximo do projétil. Expresse sua resposta até o décimo de grau mais próximo. [*Sugestão*: Ver Exercício 65(b).]

**67.** No instante $t = 0$, uma bola de beisebol que está 5 pés acima do solo é atingida com um bastão. A bola deixa o bastão com uma velocidade de 80 pés/s em um ângulo de 30° acima da horizontal.
(a) Quanto tempo leva até a bola atingir o chão? Expresse a sua resposta até o centésimo de segundo mais próximo.
(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a distância horizontal percorrida pela bola. Expresse a sua resposta até o décimo de pé mais próximo.

**68.** Repita o Exercício 67, supondo que a bola deixe o bastão a uma velocidade de 70 pés/s em um ângulo de 60º acima da horizontal.

C **69.** No instante $t = 0$, um esquiador deixa a extremidade de uma rampa com uma velocidade de $v_0$ pés/s a um ângulo $\alpha$ com a horizontal (ver figura a seguir). Ele atinge o solo a 259 pés em 2,9 segundos.
(a) Aproxime $v_0$ até o pé/s mais próximo e $\alpha$ até o grau mais próximo. [*Nota:* Use $g = 32$ pés/s$^2$ como aceleração devido à gravidade].
(b) Use um CAS ou uma calculadora com capacidade de integração para aproximar a distância percorrida pelo esquiador.

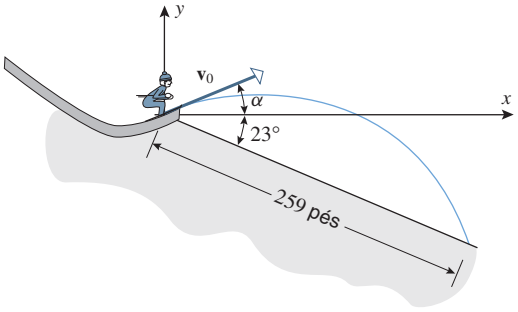



**Figura Ex-69**

**70.** No instante $t = 0$, um projétil é atirado de uma altura $h$ acima do solo a um ângulo de elevação de $\alpha$ com uma velocidade $v$. Seja $R$ a distância horizontal até o ponto onde o projétil atinge o chão.

(a) Mostre que $\alpha$ e $R$ devem satisfazer a equação

$$g(\sec^2\alpha)R^2 - 2v^2(\text{tg}\,\alpha)R - 2v^2h = 0$$

(b) Se $g$, $h$ e $v$ forem constantes, então a equação da parte (a) define $R$ implicitamente como uma função de $\alpha$. Seja $R_0$ o valor máximo de $R$ e $\alpha_0$ o valor de $\alpha$ quando $R = R_0$. Use diferenciação implícita para encontrar $dR/d\alpha$ e mostrar que

$$\text{tg}\,\alpha_0 = \frac{v^2}{gR_0}$$

[*Sugestão:* Suponha que $dR/d\alpha = 0$ quando $R$ for máximo.]

(c) Use os resultados nas partes (a) e (b) para mostrar que

$$R_0 = \frac{v}{g}\sqrt{v^2 + 2gh}$$

e

$$\alpha_0 = \text{arc tg}\,\frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}}$$

**71.** **Texto** Considere as várias forças que o passageiro de um carro sentiria se o carro passasse pelo alto de um morro ou ao longo de uma curva. Relacione essas sensações com os componentes vetoriais tangencial e normal do vetor aceleração do movimento do carro. Discuta como o aumento ou a diminuição da velocidade (por exemplo, duplicando a velocidade do carro ou reduzindo-a à metade) afeta esses componentes.

**72.** **Texto** A fórmula

$$\mathbf{r}(t) = (v_0\cos\alpha)t\mathbf{i} + (s_0 + (v_0\,\text{sen}\,\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{j}$$

modela a função posição do movimento de um projétil [Fórmula (26)]. Identifique as diversas quantidades ($v_0$, $\alpha$, $s_0$ e $g$) nessa fórmula e discuta como ela foi deduzida, incluindo as hipóteses necessárias.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.6

**1.** $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$; $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$; $\|\mathbf{v}(t)\|$ **2.** $\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$; $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{v}(t)\|\,dt$ **3.** $\dfrac{d^2s}{dt^2}$; $\kappa(ds/dt)^2$ **4.** $-g\mathbf{j}$; $-gt\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$; $s_0\mathbf{j}$; $\mathbf{v}_0$

## 12.7 LEIS DE KEPLER DO MOVIMENTO PLANETÁRIO

*Um dos grandes avanços na história da Astronomia ocorreu no início dos anos 1600, quando Johannes Kepler* deduziu, a partir de dados empíricos, que todos os planetas em nosso sistema solar movem-se em órbitas elípticas com o Sol em um foco. Subsequentemente, Isaac Newton mostrou matematicamente que tal movimento planetário é uma consequência de uma lei do quadrado inverso da atração gravitacional. Nesta seção, usaremos os conceitos desenvolvidos nas seções precedentes deste capítulo para deduzir as três leis básicas do movimento planetário, conhecidas como as* ***leis de Kepler****.*

### LEIS DE KEPLER

Na Seção 10.6, enunciamos as seguintes leis do movimento planetário que foram publicadas por Johannes Kepler em 1609, no seu livro conhecido como *Astronomia Nova*.

© Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.
*Os planetas do nosso sistema solar movem-se de acordo com as três leis de Kepler.*

**12.7.1 LEIS DE KEPLER**

- Primeira lei (***Lei das Órbitas***) Cada planeta move-se em uma órbita elíptica com o Sol em um foco.
- Segunda lei (***Lei das Áreas***) Áreas iguais são varridas em tempos iguais pela reta que vai do Sol ao planeta.
- Terceira lei (***Lei dos Períodos***) O quadrado do período do planeta (o tempo que o planeta leva para completar uma órbita em torno do Sol) é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita.

* Ver biografia na página 759.

## FORÇAS CENTRAIS

Se uma partícula mover-se sob a influência de uma *única* força que está sempre voltada para um ponto fixo $O$, então diz-se que a partícula está em movimento num ***campo de força central***. A força é chamada de ***força central*** e o ponto $O$ é chamado de ***centro da força***. Por exemplo, no modelo mais simples do movimento planetário, supõe-se que a única força agindo sobre o planeta seja a força da gravidade do Sol, voltada em direção ao centro do Sol. Esse modelo, que produz as leis de Kepler, ignora as forças que outros objetos celestes exercem sobre o planeta, bem como o efeito menor que a gravidade do planeta tem sobre o Sol. Os modelos de forças centrais são também usados para estudar o movimento dos cometas, dos asteroides, das luas e dos satélites artificiais. Eles também têm importantes aplicações no eletromagnetismo. Nosso objetivo, nesta seção, é desenvolver alguns princípios básicos sobre os campos de forças centrais e, então, usar esses resultados para deduzir as leis de Kepler.

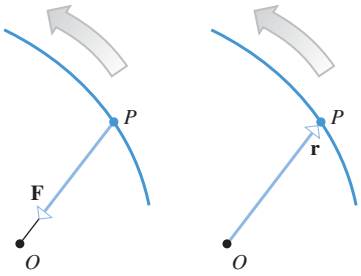


**Figura 12.7.1**

Suponha que uma partícula $P$ de massa $m$ mova-se em um campo de força central devido a uma força $\mathbf{F}$ que é voltada para um ponto fixado $O$ e seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ o vetor posição de $O$ a $P$ (Figura 12.7.1). Sejam $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ as funções velocidade e aceleração da partícula, e suponha que $\mathbf{F}$ e $\mathbf{a}$ estejam relacionadas pela segunda lei de Newton ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

Nosso primeiro objetivo é mostrar que a partícula $P$ move-se em um plano contendo o ponto $O$. Para isso, observe que $\mathbf{a}$ tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{F}$ pela segunda lei de Newton, e isso implica que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{r}$ são vetores de mesma direção com sentidos opostos. Assim, segue da parte $(c)$ do Teorema 11.4.5 que

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Como a velocidade e a aceleração da partícula são dadas por $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ e $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, respectivamente, temos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Integrando os lados esquerdo e direito desta equação em relação a $t$, obtemos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{b} \tag{2}$$

onde $\mathbf{b}$ é uma constante (independente de $t$). Entretanto, $\mathbf{b}$ é ortogonal a $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$, logo podemos concluir que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ situam-se em um plano fixo contendo o ponto $O$.

Os astrônomos chamam o plano que contém a órbita de um planeta de a ***elíptica*** do planeta.

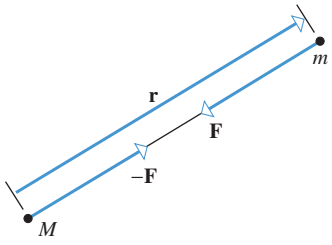
## LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL DE NEWTON

Nosso próximo objetivo é deduzir a função posição de uma partícula movendo-se sob uma força central em um sistema de coordenadas polares. Para alcançar isso, necessitaremos do seguinte resultado, conhecido como ***Lei da Gravitação Universal de Newton***.

**12.7.2** **LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL DE NEWTON** Toda partícula de matéria no universo atrai qualquer outra partícula de matéria no universo com uma força que é proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Especificamente, se uma partícula de massa $M$ e uma partícula de massa $m$ estão a uma distância $r$ uma da outra, então elas se atraem com forças iguais e opostas $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ de magnitude

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{GMm}{r^2} \tag{3}$$

onde $G$ é uma constante chamada de ***constante gravitacional universal***.



$M$ exerce uma força $\mathbf{F}$ sobre $m$ e $m$ exerce a força $-\mathbf{F}$ sobre $M$.

**Figura 12.7.2**

Para obter uma fórmula para a força vetorial $\mathbf{F}$ que a massa $M$ exerce sobre a massa $m$, tomaremos $\mathbf{r}$ como sendo o vetor posição da massa $M$ para a massa $m$ (Figura 12.7.2). Assim, a distância $r$ entre as massas é $\|\mathbf{r}\|$, e a força $\mathbf{F}$ pode ser expressa em termos de $\mathbf{r}$ como

$$\mathbf{F} = \|\mathbf{F}\| \left(-\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right) = \|\mathbf{F}\| \left(-\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

que, por (3), pode ser expressa como

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} \tag{4}$$

Inicialmente, queremos encontrar uma fórmula para a função aceleração. Para alcançar isso, usamos a Fórmula (4) e a segunda lei de Newton, obtendo

$$m\mathbf{a} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$$

e, portanto,

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \tag{5}$$

Observe na Fórmula (5) que a aceleração **a** não envolve $m$. Assim, a aceleração de um planeta não é afetada por sua massa.

Para obter uma fórmula para a função posição da massa $m$, precisaremos introduzir um sistema de coordenadas e fazer algumas hipóteses sobre as condições iniciais. Vamos supor que:

- A distância $r$ de $m$ a $M$ é mínima no instante $t = 0$.
- A massa $m$ tem vetores posição e velocidade não nulos $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$ no instante $t = 0$.
- Um sistema de coordenadas polares é introduzido com seu polo na massa $M$ e orientado de tal modo que $\theta = 0$ no instante $t = 0$.
- O vetor $\mathbf{v}_0$ é perpendicular ao eixo polar no instante $t = 0$.

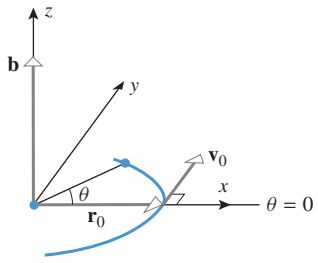



**Figura 12.7.3**

Além disso, para assegurar que o ângulo polar $\theta$ cresça com $t$, concordaremos em observar esse sistema de coordenadas polares olhando em direção ao polo a partir do ponto final do vetor $\mathbf{b} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$. Veremos, também, que é útil superpor um sistema de coordenadas $xyz$ ao sistema de coordenadas polares com eixo positivo $z$ na direção e sentido de **b** (Figura 12.7.3).

Para fins computacionais, será útil denotar $\|\mathbf{r}_0\|$ por $r_0$ e $\|\mathbf{v}_0\|$ por $v_0$, caso em que podemos expressar os vetores $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$ no sistema de coordenadas $xyz$ como

$$\mathbf{r}_0 = r_0\mathbf{i} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{j}$$

e o vetor **b** como

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 = r_0\mathbf{i} \times v_0\mathbf{j} = r_0v_0\mathbf{k} \tag{6}$$

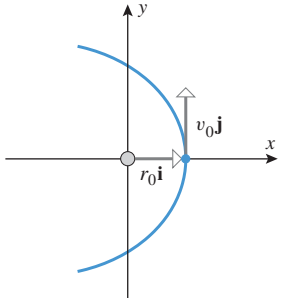



**Figura 12.7.4**

(Figura 12.7.4). Será útil também introduzir o vetor unitário

$$\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} \tag{7}$$

que nos permite expressar a forma polar do vetor posição **r** como

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\mathbf{i} + r\operatorname{sen}\theta\mathbf{j} = r(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) = r\mathbf{u} \tag{8}$$

e expressar o vetor aceleração **a** em termos de **u** reescrevendo (5) como

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{u} \tag{9}$$

Estamos, agora, prontos para deduzir a função posição da massa $m$ em coordenadas polares. Inicialmente, lembremos de (2) que o vetor $\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ é constante, portanto segue de (6) que a relação

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r_0v_0\mathbf{k} \tag{10}$$

é válida para *todos* os valores de $t$. Agora, examinaremos **b** de outro ponto de vista. Segue de (8) que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}) = r\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}$$

e, portanto,

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = (r\mathbf{u}) \times \left(r\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}\right) = r^2\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} + r\frac{dr}{dt}\mathbf{u} \times \mathbf{u} = r^2\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{11}$$

No entanto, (7) implica que

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = (-\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j})\frac{d\theta}{dt}$$

logo,

$$\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{k} \tag{12}$$

Substituindo (12) em (11), obtém-se

$$\mathbf{b} = r^2\frac{d\theta}{dt}\mathbf{k} \tag{13}$$

Assim, segue de (7), (9) e (13) que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\frac{GM}{r^2}(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \times \left(r^2\frac{d\theta}{dt}\mathbf{k}\right) \\ &= GM(-\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j})\frac{d\theta}{dt} = GM\frac{d\mathbf{u}}{dt}\end{aligned} \tag{14}$$

A partir dessa fórmula e do fato de que $d\mathbf{b}/dt = \mathbf{0}$ (pois $\mathbf{b}$ é constante), obtemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{b}) = \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = GM\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

Integrando ambos os lados dessa equação em relação a $t$, obtemos

$$\mathbf{v} \times \mathbf{b} = GM\mathbf{u} + \mathbf{C} \tag{15}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração. Essa constante pode ser obtida calculando ambos os lados da equação em $t = 0$. Deixamos como exercício mostrar que

$$\mathbf{C} = (r_0v_0^2 - GM)\mathbf{i} \tag{16}$$

do que segue

$$\mathbf{v} \times \mathbf{b} = GM\mathbf{u} + (r_0v_0^2 - GM)\mathbf{i} \tag{17}$$

Podemos, agora, obter a função posição calculando o produto misto $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{b})$ de duas maneiras. Primeiro, usamos (10) e a propriedade (11) da Seção 11.4 para obter

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = r_0^2v_0^2 \tag{18}$$

e, em seguida, usamos (17) para obter

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{r} \cdot (GM\mathbf{u}) + \mathbf{r} \cdot (r_0v_0^2 - GM)\mathbf{i} \\ &= \mathbf{r} \cdot \left(GM\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + r\mathbf{u} \cdot (r_0v_0^2 - GM)\mathbf{i} \\ &= GMr + r(r_0v_0^2 - GM)\cos\theta\end{aligned}$$

Se, agora, igualarmos isso com (18), obteremos

$$r_0^2v_0^2 = GMr + r(r_0v_0^2 - GM)\cos\theta$$

que, resolvendo para $r$, dá

$$r = \frac{r_0^2v_0^2}{GM + (r_0v_0^2 - GM)\cos\theta} = \frac{\dfrac{r_0^2v_0^2}{GM}}{1 + \left(\dfrac{r_0v_0^2}{GM} - 1\right)\cos\theta} \tag{19}$$

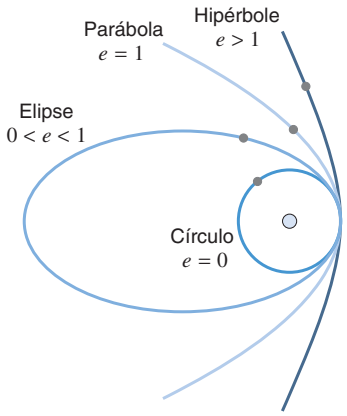



**Figura 12.7.5**

ou, mais simplesmente,

$$r = \frac{k}{1 + e\cos\theta} \tag{20}$$

onde

$$k = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM} \quad \text{e} \quad e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{21–22}$$

Deixaremos como exercício mostrar que $e \geq 0$. Aceitando isso, segue que comparando (20) com a Fórmula (3) da Seção 10.6 concluímos que a trajetória é uma seção cônica com excentricidade $e$, o foco no polo e $d = k/e$. Assim, dependendo se $e < 1$, $e = 1$ ou $e > 1$, a trajetória será, respectivamente, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole (Figura 12.7.5).

Note a partir da Fórmula (22) que $e$ depende de $r_0$ e $v_0$, logo a forma exata da trajetória é determinada pela massa $M$ e as condições iniciais. Se as condições iniciais são tais que $e < 1$, então a massa $m$ é capturada em uma órbita elíptica; caso contrário, a massa $m$ "escapa" e nunca retorna para a sua posição inicial. Consequentemente, a velocidade inicial que produz uma excentricidade de $e = 1$ é chamada de ***velocidade de escape*** e é denotada por $v_{\text{esc}}$. Assim, segue de (22) que

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \tag{23}$$

(verifique).

## AS PRIMEIRA E SEGUNDA LEIS DE KEPLER

Segue de nossa discussão geral de campos de forças centrais que os planetas têm órbitas elípticas com o Sol no foco, o que é a primeira lei de Kepler. Para deduzir a segunda lei de Kepler, começamos igualando (10) e (13) para obter

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r_0 v_0 \tag{24}$$

Para provar que a reta radial do centro do Sol ao centro de um planeta varre áreas iguais em tempos iguais, sejam $r = f(\theta)$ a equação polar do planeta e $A$ a área varrida pela reta radial quando ela varia de qualquer ângulo fixado $\theta_0$ para um ângulo $\theta$. Segue da fórmula de área em 10.3.4 que $A$ pode ser expressa como

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2}[f(\phi)]^2\, d\phi$$

em que a variável muda $\phi$ é introduzida na integração para reservar $\theta$ como limite superior. Segue, agora, da Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo e da regra da cadeia que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Assim, decorre de (24) que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r_0 v_0 \tag{25}$$

o que mostra que $A$ varia a uma taxa constante. Isso implica que áreas iguais são varridas em tempos iguais.

## A TERCEIRA LEI DE KEPLER

Para deduzir a terceira de lei de Kepler, sejam $a$ e $b$ os semieixos maior e menor da órbita elíptica; lembremos que a área dessa elipse é $\pi ab$. Integrando (25), segue que em $t$ unidades de tempo a reta radial varre uma área de $A = \frac{1}{2} r_0 v_0 t$. Assim, se $T$ denotar o tempo necessário

para o planeta completar uma revolução em torno do Sol (o período), então a reta radial varrerá toda a área da elipse durante aquele tempo e, portanto,

$$\pi ab = \frac{1}{2} r_0 v_0 T$$

da qual obtemos

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{r_0^2 v_0^2} \tag{26}$$

Entretanto, segue da Fórmula (1) da Seção 10.6 e da relação $c^2 = a^2 - b^2$ para uma elipse que

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Assim, $b^2 = a^2(1 - e^2)$ e, portanto, (26) pode ser escrito como

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{r_0^2 v_0^2} \tag{27}$$

Porém, comparando a Equação (20) com a Equação (17) da Seção 10.6, vemos que

$$k = a(1 - e^2)$$

Finalmente, substituindo essa expressão e (21) em (27), obtemos

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{r_0^2 v_0^2} k = \frac{4\pi^2 a^3}{r_0^2 v_0^2} \frac{r_0^2 v_0^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \tag{28}$$

Assim, provamos que $T^2$ é proporcional a $a^3$, que é a terceira lei de Kepler. Quando conveniente, a Fórmula (28) pode também ser expressa como

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2} \tag{29}$$

## SATÉLITES ARTIFICIAIS

A segunda e a terceira leis de Kepler e a Fórmula (23) aplicam-se também a satélites que orbitam um corpo celeste; precisaremos apenas interpretar $M$ como sendo a massa do corpo que está exercendo a força e $m$ como sendo a massa do satélite. Os valores de $GM$ que são exigidos em muitas das fórmulas nesta seção foram determinados experimentalmente para vários corpos atratores (Tabela 12.7.1).

**Tabela 12.7.1**

| CORPO ATRATOR | SISTEMA INTERNACIONAL | SISTEMA BRITÂNICO DE ENGENHARIA |
|---|---|---|
| TERRA | $GM = 3{,}99 \times 10^{14}\ \text{m}^3/\text{s}^2$<br>$GM = 3{,}99 \times 10^{5}\ \text{km}^3/\text{s}^2$ | $GM = 1{,}41 \times 10^{16}\ \text{pés}^3/\text{s}^2$<br>$GM = 1{,}24 \times 10^{12}\ \text{milhas}^3/\text{h}^2$ |
| SOL | $GM = 1{,}33 \times 10^{20}\ \text{m}^3/\text{s}^2$<br>$GM = 1{,}33 \times 10^{11}\ \text{km}^3/\text{s}^2$ | $GM = 4{,}69 \times 10^{21}\ \text{pés}^3/\text{s}^2$<br>$GM = 4{,}13 \times 10^{17}\ \text{milhas}^3/\text{h}^2$ |
| LUA | $GM = 4{,}90 \times 10^{12}\ \text{m}^3/\text{s}^2$<br>$GM = 4{,}90 \times 10^{3}\ \text{km}^3/\text{s}^2$ | $GM = 1{,}73 \times 10^{14}\ \text{pés}^3/\text{s}^2$<br>$GM = 1{,}53 \times 10^{10}\ \text{milhas}^3/\text{h}^2$ |

Lembre-se de que, para as órbitas de planetas ao redor do Sol, o ponto no qual a distância entre o centro do planeta e o centro do Sol é máxima é chamado de *afélio* e o ponto no qual é mínima é chamado de *periélio*. Para os satélites em torno da Terra, o ponto no qual a

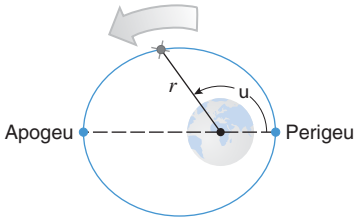



**Figura 12.7.6**

distância máxima ocorre é chamada de ***apogeu*** e o ponto no qual a distância mínima ocorre é chamada de ***perigeu*** (Figura 12.7.6). As distâncias reais entre os centros no apogeu e no perigeu são chamadas de ***distância do apogeu*** e ***distância do perigeu***.

**▶ Exemplo 1** Uma órbita geossincrônica para um satélite é uma órbita circular em torno do Equador da Terra na qual o satélite permanece fixado sobre um ponto do Equador. Use o fato de que a Terra faz uma revolução em torno de seu eixo a cada 24 horas para determinar a altitude em milhas de um satélite de comunicações em órbita geossincrônica. Suponha que a Terra seja uma esfera com raio de 4000 milhas.

***Solução*** Para permanecer fixado em relação a um ponto sobre o Equador, o satélite deve ter um período de $T = 24$ h. Segue de (28) ou (29) e do valor da Terra na Tabela 12.7.1 de $GM = 1{,}24 \times 10^{12}$ milhas$^3$/h$^2$ que

$$a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(1{,}24 \times 10^{12})(24)^2}{4\pi^2}} \approx 26.250 \text{ milhas}$$

e, portanto, a altitude $h$ do satélite é

$$h \approx 26.250 - 4.000 = 22.250 \text{ milhas} \quad \blacktriangleleft$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.7 (Ver página 902 para respostas.)

1. Sejam $G$ a constante gravitacional universal e $M$ e $m$ duas massas a uma distância $r$ entre si.
   (a) De acordo com a Lei de Newton da Gravitação Universal, $M$ e $m$ se atraem uma à outra com uma força de magnitude _____.
   (b) Se $\mathbf{r}$ for o vetor de posição de $M$ para $m$, então a força de atração que a massa $M$ exerce sobre a massa $m$ é _____.
2. Suponha que uma massa $m$ esteja em uma órbita em torno de uma massa $M$ e que $r_0$ seja a distância mínima de $m$ a $M$. Se $G$ for a constante gravitacional universal, então a velocidade "de escape" de $m$ será _____.
3. Para um planeta numa órbita elíptica em torno do Sol, qual é a potência do semieixo maior da órbita que é proporcional ao quadrado do período do planeta?
4. Suponha que uma massa $m$ esteja em uma órbita em torno de uma massa $M$ e que $r_0$ seja a distância mínima de $m$ a $M$. Se $v_0$ for a velocidade escalar da massa $m$ quando esta estiver a uma distância $r_0$ de $M$, e se $G$ denotar a constante gravitacional universal, então a excentricidade da órbita será _____.

## EXERCÍCIOS 12.7

**1-14** Nos exercícios que requeiram valores numéricos, quando necessário, use a Tabela 12.7.1 e os seguintes valores:

raio da Terra = 4.000 milhas = 6.440 km
raio da Lua = 1.080 milhas = 1.740 km
1 ano (terrestre) = 365 dias ■

### ENFOCANDO CONCEITOS

1. (a) Obtenha o valor de $\mathbf{C}$ dado na Fórmula (16), pondo $t = 0$ em (15).
   (b) Use as Fórmulas (7), (17) e (22) para mostrar que
   $$\mathbf{v} \times \mathbf{b} = GM[(\mathbf{e} + \cos\theta)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}]$$
   (c) Mostre que $\|\mathbf{v} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{b}\|$.
   (d) Use os resultados das partes (b) e (c) para mostrar que a velocidade de uma partícula em órbita elíptica é
   $$v = \frac{v_0}{1+e}\sqrt{e^2 + 2e\cos\theta + 1}$$
   (e) Suponha que uma partícula esteja em uma órbita elíptica. Use a parte (d) para concluir que a distância da partícula ao centro da força atinge um mínimo se, e somente se, a velocidade da partícula atinge um máximo. Analogamente, argumente que a distância da partícula ao centro da força atinge um máximo se, e somente se, a velocidade da partícula atinge um mínimo.
2. Use o resultado do Exercício 1(d) para mostrar que quando uma partícula em órbita elíptica com excentricidade $e$ alcança uma extremidade do eixo menor, sua velocidade é
   $$v = v_0\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$
3. Use o resultado do Exercício 1(d) para mostrar que, para uma partícula em órbita elíptica com excentricidade $e$, as velocidades máxima e mínima estão relacionadas por
   $$v_{\max} = v_{\min}\frac{1+e}{1-e}$$

**4.** Use a Fórmula (22) e o resultado do Exercício 1(d) para mostrar que a velocidade $v$ de uma partícula em órbita circular de raio $r_0$ é constante e é dada por

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

**5.** Suponha que uma partícula esteja em uma órbita elíptica em um campo de forças central em que o centro da força esteja em um foco, e sejam $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ as funções posição e velocidade da partícula, respectivamente. Sejam $r_{\min}$ e $r_{\max}$ as distância mínima e máxima da partícula ao centro de força e sejam $v_{\min}$ e $v_{\max}$ as velocidade mínima e máxima da partícula.

(a) Relembre a discussão sobre elipses em coordenadas polares na Seção 10.6 e mostre que se a elipse tem excentricidade $e$ e semieixo maior $a$, então $r_{\min} = a(1 - e)$ e $r_{\max} = a(1 + e)$.

(b) Explique por que $r_{\min}$ e $r_{\max}$ ocorrem em pontos em que $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais. [*Sugestão*: Primeiramente, mostre que os valores extremos de $\|\mathbf{r}\|$ ocorrem em pontos críticos da função $\|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$.]

(c) Explique por que $v_{\min}$ e $v_{\max}$ ocorrem em pontos em que $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais. [*Sugestão*: Primeiramente, mostre que os valores extremos de $\|\mathbf{v}\|$ ocorrem em pontos críticos da função $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Em seguida, use a Equação (5).]

(d) Use a Equação (2) e as partes (b) e (c) para concluir que $r_{\max} v_{\min} = r_{\min} v_{\max}$.

**6.** Use os resultados nas partes (a) e (d) do Exercício 5 para deduzir a equação no Exercício 3.

**7.** Use o resultado do Exercício 4 para determinar a velocidade em km/s de um satélite em órbita circular 200 km acima da superfície da Terra.

**8.** Use o resultado do Exercício 4 para determinar a velocidade em mi/h de um satélite de comunicações que está em órbita geossincrônica em torno da Terra. [Ver Exemplo 1.]

**9.** Encontre a velocidade de escape em km/s para uma sonda espacial em órbita circular 300 km acima da superfície da Terra.

**10.** A constante de gravitação universal é aproximadamente

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$$

e o semieixo maior da órbita da Terra é aproximadamente

$$a = 149{,}6 \times 10^6\ \text{km}$$

Estime a massa do Sol em kg.

**11.** (a) A excentricidade da órbita da Lua em torno da Terra é 0,055 e o semieixo maior é $a = 238.900$ milhas. Encontre as distâncias máxima e mínima entre a superfície da Terra e a superfície da Lua.

(b) Determine o período da órbita da Lua em dias.

**12.** (a) O *Vanguard 1* foi lançado em março de 1958 com altitude de perigeu e apogeu acima da Terra de 649 km e 4.340 km, respectivamente. Encontre o comprimento do semieixo maior de sua órbita.

(b) Use o resultado da parte (a) do Exercício 16 da Seção 10.6 para encontrar a excentricidade de sua órbita.

(c) Encontre o período do *Vanguard 1* em minutos.

**13.** (a) Suponha que uma sonda espacial esteja em órbita circular a uma altitude de 180 milhas acima da superfície da Terra. Use o Exercício 4 para determinar sua velocidade.

(b) Durante um período muito curto de tempo, um propulsor da sonda espacial é acionado para aumentar a velocidade da sonda em 600 mi/h na direção do movimento. Encontre a excentricidade da órbita elíptica resultante e use o resultado da parte (b) do Exercício 5 para encontrar a altitude do apogeu.

**14.** Mostre que a grandeza $e$ definida pela Fórmula (22) é não negativa. [*Sugestão*: O eixo polar foi escolhido de tal modo que $r$ é mínimo quando $\theta = 0$.]

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 12.7

**1.** (a) $\dfrac{GMm}{r^2}$ (b) $-\dfrac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$ **2.** $\sqrt{\dfrac{2GM}{r_0}}$ **3.** 3 **4.** $e = \dfrac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$

## EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 12

**1.** Em palavras, o que se quer dizer com o gráfico de uma função vetorial?

**2-5** Descreva o gráfico da equação. ■

**2.** $\mathbf{r} = (2 - 3t)\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}$ **3.** $\mathbf{r} = 3 \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + 3 \cos 2t\mathbf{j}$

**4.** $\mathbf{r} = 3 \cos t\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **5.** $\mathbf{r} = -2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (t^2 - 1)\mathbf{k}$

**6.** Descreva o gráfico das funções vetoriais.

(a) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$

(b) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \quad (0 \le t \le 1)$

(c) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}'(t_0)$

**7.** Mostre que o gráfico de $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen}\pi t\,\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t \cos\pi t\mathbf{k}$ está situado na superfície de um cone e esboce o cone.

**8.** Obtenha equações pamétricas para a interseção das superfícies

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad 2x^2 + y^2 + 6z^2 = 24$$

e esboce a interseção.

**9.** Em palavras, dê uma descrição geométrica da afirmação $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$.

**10.** Calcule $\lim_{t\to 0}\left(e^{-t}\mathbf{i}+\dfrac{1-\cos t}{t}\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}\right)$.

**11.** Encontre equações paramétricas da reta tangente ao gráfico de

$$\mathbf{r}(t)=(t+\cos 2t)\mathbf{i}-(t^2+t)\mathbf{j}+\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$$

no ponto em que $t=0$.

**12.** Suponha que $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ sejam funções vetoriais lisas tais que $\mathbf{r}_1(0)=\langle -1,1,2\rangle$, $\mathbf{r}_2(0)=\langle 1,2,1\rangle$, $\mathbf{r}_1'(0)$ e $\mathbf{r}_2'(0)=\langle 4,0,2\rangle$. Use essa informação para calcular a derivada em $t=0$ de cada função.

(a) $\mathbf{r}(t)=3\mathbf{r}_1(t)+2\mathbf{r}_2(t)$ (b) $\mathbf{r}(t)=[\ln(t+1)]\mathbf{r}_1(t)$

(c) $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)$ (d) $f(t)=\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$

**13.** Calcule $\displaystyle\int(\cos t\,\mathbf{i}+\operatorname{sen} t\,\mathbf{j})\,dt$.

**14.** Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\langle\cos 3t,-\operatorname{sen} 3t\rangle\,dt$.

**15.** Resolva o problema de valor inicial vetorial

$$\mathbf{y}'(t)=t^2\mathbf{i}+2t\mathbf{j},\quad \mathbf{y}(0)=\mathbf{i}+\mathbf{j}$$

**16.** Resolva o problema de valor inicial vetorial

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{r},\quad \mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0$$

para uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ desconhecida.

**17.** Encontre o comprimento de arco do gráfico de

$$\mathbf{r}(t)=e^{\sqrt{2}t}\mathbf{i}+e^{-\sqrt{2}t}\mathbf{j}+2t\mathbf{k}\quad(0\le t\le\sqrt{2}\ln 2)$$

**18.** Suponha que $\mathbf{r}(t)$ seja uma função vetorial lisa de $t$ com $\mathbf{r}'(0)=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e que $\mathbf{r}_1(t)=\mathbf{r}(2-e^{t\ln 2})$. Encontre $\mathbf{r}_1'(1)$.

**19.** Obtenha a parametrização por comprimento de arco da reta que passa por $P(-1,4,3)$ e $Q(0,2,5)$ que tem ponto de referência $P$ e orienta a reta no sentido de $P$ para $Q$.

**20.** Encontre a parametrização pelo comprimento de arco da curva

$$\mathbf{r}(t)=\langle e^t\cos t,-e^t\operatorname{sen} t\rangle\quad(0\le t\le\pi/2)$$

que tenha a mesma orientação e que tenha $\mathbf{r}(0)$ como ponto de referência.

**21.** Suponha que $\mathbf{r}(t)$ seja uma função vetorial lisa. Dê as definições de $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$.

**22.** Encontre $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{N}(0)$ e $\mathbf{B}(0)$ para a curva

$$\mathbf{r}(t)=\left\langle 2\cos t,2\cos t+\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{sen} t,\cos t-\frac{6}{\sqrt{5}}\operatorname{sen} t\right\rangle$$

**23.** Dê a definição de "curvatura" e explique o que isso significa geometricamente.

**24.** Suponha que $\mathbf{r}(t)$ seja uma curva lisa com $\mathbf{r}'(0)=\mathbf{i}$ e $\mathbf{r}''(0)=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$. Encontre a curvatura em $t=0$.

**25-28** Encontre a curvatura da curva no ponto dado. ■

**25.** $\mathbf{r}(t)=2\cos t\,\mathbf{i}+3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}-t\mathbf{k};\ t=\pi/2$

**26.** $\mathbf{r}(t)=\langle 2t,e^{2t},e^{-2t}\rangle;\ t=0$

**27.** $y=\cos x;\ x=\pi/2$ **28.** $y=\ln x;\ x=1$

**29.** Suponha que $\mathbf{r}(t)$ seja a função posição de uma partícula em movimento no espaço bi ou tridimensional. Em cada parte, explique o que a grandeza dada representa fisicamente.

(a) $\left\|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|$ (b) $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|dt$ (c) $\|\mathbf{r}(t)\|$

**30.** (a) O que o Teorema 12.2.8 nos diz sobre o vetor velocidade de uma partícula que se move sobre uma esfera?

(b) O que o Teorema 12.2.8 nos diz sobre o vetor aceleração de uma partícula que se move com velocidade escalar constante?

(c) Mostre que a partícula com função posição

$$\mathbf{r}(t)=\sqrt{1-\tfrac{1}{4}\cos^2 t}\cos t\,\mathbf{i}+\sqrt{1-\tfrac{1}{4}\cos^2 t}\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}+\tfrac{1}{2}\cos t\,\mathbf{k}$$

move-se sobre uma esfera.

**31.** Como ilustrado na figura a seguir, suponha que uma partícula mova-se no sentido anti-horário em torno de um círculo de raio $R$ centrado na origem a uma taxa constante de $\omega$ radianos por segundo. Isso é chamado de ***movimento circular uniforme***. Supondo que a partícula esteja no ponto $(R,0)$ no instante $t=0$, então sua função posição será

$$\mathbf{r}(t)=R\cos\omega t\,\mathbf{i}+R\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j}$$

(a) Mostre que o vetor velocidade $\mathbf{v}(t)$ é sempre tangente ao círculo e que a partícula tem velocidade escalar constante $v$ dada por

$$v=R\omega$$

(b) Mostre que o vetor aceleração $\mathbf{a}(t)$ está sempre voltado para o centro do círculo e tem magnitude constante $a$ dada por

$$a=R\omega^2$$

(c) Mostre que o tempo $T$ necessário para a partícula fazer uma revolução completa é

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi R}{v}$$

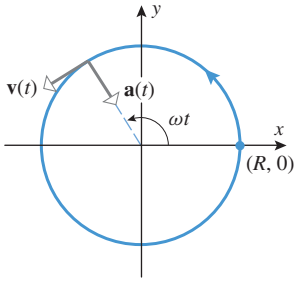



**Figura Ex-31**

**32.** Se uma partícula de massa $m$ estiver em movimento circular uniforme [ver Exercício 31], então o vetor aceleração $\mathbf{a}(t)$ é chamado de ***aceleração centrípeta***. De acordo com a segunda lei de Newton, essa aceleração deve ser produzida por alguma força $\mathbf{F}(t)$, chamada de ***força centrípeta***, que está relacionada com $\mathbf{a}(t)$ pela equação $\mathbf{F}(t)=m\mathbf{a}(t)$. Se essa força não estiver presente, então a partícula não pode estar submetida a um movimento circular uniforme.

(a) Mostre que a direção da força centrípeta varia com o tempo, mas tem magnitude constante $F$, dada por

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

(b) Um astronauta com uma massa de $m = 60$ kg orbita a Terra em uma altitude de $h = 3.200$ km com uma velocidade constante de $v = 6{,}43$ km/s. Obtenha a aceleração centrípeta supondo que o raio da Terra seja de 6.440 km.

(c) Que força gravitacional centrípeta em newtons a Terra exerce sobre o astronauta?

**33.** No instante $t = 0$, uma partícula na origem de um sistema de coordenadas $xyz$ tem uma velocidade de $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. A função aceleração da partícula é $\mathbf{a}(t) = 2t^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \cos 2t\mathbf{k}$.

(a) Encontre a função posição da partícula.

(b) Encontre a velocidade escalar da partícula no instante $t = 1$.

**34.** Sejam $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ os vetores velocidade e aceleração de uma partícula se movendo no espaço bi ou tridimensional. Mostre que a taxa de variação de sua velocidade pode ser expressa como

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{v}\|) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})$$

**35.** Use a fórmula (23) da Seção 12.7 e os dados da Tabela 12.7.1 para encontrar a velocidade de escape (em km/s) de uma sonda espacial numa órbita circular a 600 km acima da superfície da Terra.

**36.** Conforme ilustrado na figura a seguir, as coordenadas polares de um foguete são rastreadas por radar de um ponto que está a $b$ unidades da rampa de lançamento. Mostre que a velocidade escalar $v$ do foguete pode ser expressa em termos de $b$, $\theta$ e $d\theta/dt$ como

$$v = b \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

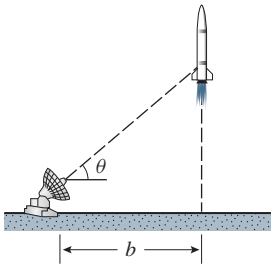



**Figura Ex-36**

**37.** Um jogador lança uma bola com uma velocidade inicial de 60 pés/s em um ângulo desconhecido $\alpha$ com a horizontal a partir de um ponto que está 4 pés acima do chão de um ginásio coberto. Dado que o forro do ginásio está a 25 pés de altura, determine a altura máxima $h$ na qual a bola pode atingir uma parede que está a 60 pés adiante (ver figura a seguir).

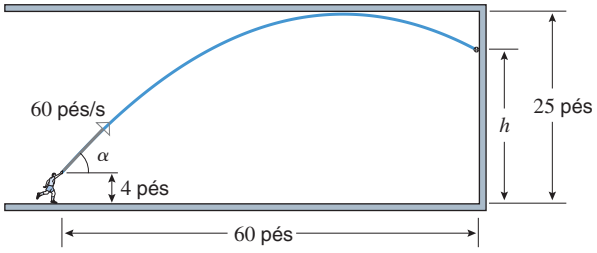



**Figura Ex-37**

## CAPÍTULO 12 ESTABELECENDO CONEXÕES C CAS

**1.** (a) Use as fórmulas

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$$
$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/||\mathbf{r}'(t)||$$

e

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}$$

para mostrar que $\mathbf{N}(t)$ pode ser dado em termos de $\mathbf{r}(t)$ por

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|} \times \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

(b) Use propriedades do produto vetorial para mostrar que a fórmula da parte (a) pode ser expressa por

$$\mathbf{N}(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}'(t)}{\|(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}'(t)\|}$$

(c) Use o resultado da parte (b) para encontrar $\mathbf{N}(t)$ no ponto dado.

(i) $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$; $t = 1$

(ii) $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $t = \pi/2$

**2.** (a) Use o resultado do Exercício 1(b) e o Exercício 45 da Seção 11.4 para mostrar que $\mathbf{N}(t)$ pode ser dado diretamente em termos de $\mathbf{r}(t)$ por

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{u}(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|}$$

onde

$$\mathbf{u}(t) = ||\mathbf{r}'(t)||^2\mathbf{r}''(t) - (\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t))\mathbf{r}'(t)$$

(c) Use o resultado da parte (b) para encontrar $\mathbf{N}(t)$.

(i) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

(ii) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

**3.** No Exercício 1 de Estabelecendo Conexões do Capítulo 10, definimos a espiral de Cornu parametricamente como

$$x = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du, \quad y = \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du$$

Essa curva, cujo gráfico está ilustrado na figura a seguir, é usada no planejamento de rodovias para criar uma transição gradual de uma estrada reta (curvatura zero) para uma rampa de saída com curvatura positiva.

(a) Expresse a espiral de Cornu como uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ e, então, use o Teorema 12.3.4 para mostrar que $s = t$ é o parâmetro comprimento de arco com ponto de referência (0, 0).

(b) Substitua $t$ por $s$ e use a Fórmula (1) para mostrar que $\kappa(s) = \pi\,|s|$. [*Nota*: Se $s \geq 0$, então a curvatura $\kappa(s) = \pi s$ cresce a partir de 0 a uma taxa constante em relação a $s$. Isso torna essa espiral ideal para unir uma estrada curva com uma estrada reta.]

(c) O que acontece com a curvatura da espiral de Cornu quando $s \to +\infty$? Em palavras, explique por que isso é consistente com o gráfico.

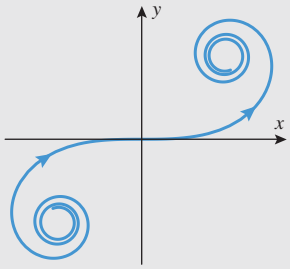



**Figura Ex-63**

C **4.** Em 1975, o engenheiro alemão Werner Stengel foi o pioneiro na utilização de espirais de Cornu (ver Exercício 3) para o traçado de laços de montanhas-russas, que utilizou na montanha-russa *Revolution* do parque Six Flags Magic Mountain, na Califórnia, nos Estados Unidos. Nesse projeto, a parte superior do laço é um arco circular que, em cada extremidade, está conectado a uma espiral de Cornu que facilita a transição à pista horizontal. A figura a seguir ilustra esse projeto nos casos em que o arco circular (em azul) é um semicírculo, um quarto de círculo ou um único ponto, respectivamente. Suponha que o laço da montanha-russa seja projetada para ter 45 pés de extensão em sua parte mais larga. Em cada caso da Figura Ex-4, encontre a distância vertical entre o nível horizontal da pista e o alto do laço. Use a capacidade de integração numérica de seu computador para obter uma estimativa das integrais, quando necessário.

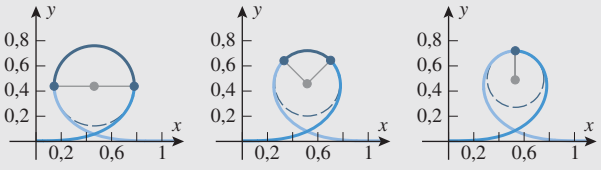



**Figura Ex-4**

**5.** Use os resultados do Exercício 61 da Seção 12.5 e do Exercício 32 da Seção 12.3 para mostrar que, para a hélice circular

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$$

com $a > 0$, a torção e o vetor binormal são

$$\tau = \frac{c}{w^2}$$

e

$$\mathbf{B} = \left(\frac{c}{w}\,\text{sen}\,\frac{s}{w}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{c}{w}\cos\frac{s}{w}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{a}{w}\right)\mathbf{k}$$

onde $w = \sqrt{a^2 + c^2}$ e $s$ tem ponto de referência $(a, 0, 0)$.

**6.** Suponha que a função posição de um ponto em movimento no plano $xy$ seja

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Essa equação pode ser expressa em coordenadas polares fazendo a substituição

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t), \quad y(t) = r(t)\,\text{sen}\,\theta(t)$$

Disso resulta

$$\mathbf{r} = r(t)\cos\theta(t)\mathbf{i} + r(t)\,\text{sen}\,\theta(t)\mathbf{j}$$

que pode ser expresso como

$$\mathbf{r} = r(t)\mathbf{e}_r(t)$$

onde $\mathbf{e}_r = \cos\theta\,(t)\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,(t)\,\mathbf{j}$.

(a) Mostre que $\mathbf{e}_r(t)$ é um vetor unitário que tem a mesma direção e sentido que o vetor posição $\mathbf{r}$ se $r(t) > 0$ e que $\mathbf{e}_\theta\,(t) = -\,\text{sen}\theta\,(t)\,\mathbf{i} + \cos\theta\,(t)\,\mathbf{j}$ é o vetor unitário que resulta quando $\mathbf{e}_r\,(t)$ é girado no sentido anti-horário por um ângulo de $\pi/2$. O vetor $\mathbf{e}_r$(t) é chamado de ***vetor radial unitário*** e o vetor $\mathbf{e}_\theta(t)$ é chamado de ***vetor transversal unitário*** (ver figura a seguir).

(b) Mostre que a função velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ pode ser expressa em termos de componentes radial e transversal como

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta$$

(c) Mostre que a função aceleração $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ pode ser expressa em termos de componentes radial e transversal como

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{e}_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\mathbf{e}_\theta$$

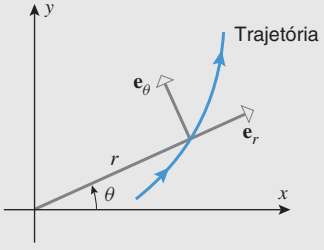



**Figura Ex-6**

## EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO

Para uma aplicação prática do movimento de projéteis em um contexto divertido, confira o módulo intitulado **Kabum, o Homem Bala** em

www.grupoa.com.br

© Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.

# 13 DERIVADAS PARCIAIS

*Superfícies tridimensionais têm pontos mais altos e pontos mais baixos que são parecidos com os cumes e os vales de uma cordilheira. Neste capítulo, utilizaremos derivadas para localizar esses pontos e estudar outras características dessas superfícies.*

Neste capítulo, estenderemos muitos dos conceitos básicos do Cálculo para funções de duas ou mais variáveis, comumente chamadas de funções de várias variáveis. Iniciaremos discutindo limites e continuidade de funções de duas ou três variáveis, então definiremos as derivadas de tais funções, depois usaremos essas derivadas para estudar planos tangentes, taxas de variação, inclinações de superfícies e problemas de maximização e minimização. Embora muitas das ideias básicas que desenvolvemos para funções de uma variável persistam de uma maneira natural, as funções da várias variáveis são intrisicamente mais complicadas do que as funções de uma variável, logo precisaremos desenvolver novas ferramentas e novas ideias para tratar dessas funções.

## 13.1 FUNÇÕES DE DUAS OU MAIS VARIÁVEIS

*Em seções anteriores, estudamos funções reais de uma variável real e funções vetoriais de uma variável real. Nesta seção, consideraremos funções reais de duas ou mais variáveis reais.*

### NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA

Há muitas fórmulas familiares em que uma variável dada depende de outras duas ou mais variáveis. Por exemplo, a área $A$ de um triângulo depende do comprimento da base $b$ e da altura $h$ pela fórmula $A = \frac{1}{2}bh$; o volume de uma caixa retangular depende do comprimento $l$, da largura $w$ e da altura $h$ pela fórmula $V = lwh$; e a média aritmética $\bar{x}$ de $n$ números reais $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ depende desses números pela fórmula

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

Assim, dizemos que

$A$ é uma função das duas variáveis $b$ e $h$;

$V$ é uma função das três variáveis $l$, $w$ e $h$;

$\bar{x}$ é uma função das $n$ variáveis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

A terminologia e a notação para funções de duas ou mais variáveis são análogas àquelas para funções de uma variável. Por exemplo, a expressão

$$z = f(x, y)$$

significa que $z$ é uma função de $x$ e $y$ no sentido de que um único valor da variável dependente $z$ é determinado especificando valores para as variáveis independentes $x$ e $y$. Analogamente,

$$w = f(x, y, z)$$

expressa $w$ como uma função de $x$, $y$ e $z$ e

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

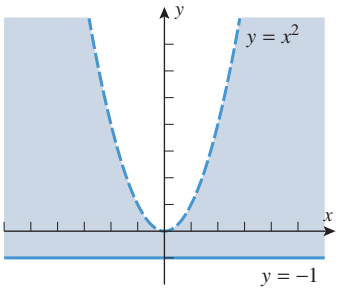
expressa $u$ como uma função de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Como ocorre com funções de uma variável, as variáveis independentes de uma função de duas ou mais variáveis podem estar restritas a algum conjunto $D$, que denominamos ***domínio*** de $f$. Às vezes, o domínio é determinado por restrições físicas sobre as variáveis. Se a função estiver definida por uma fórmula e se não houver restrições físicas nem outras explicitadas, entende-se que o domínio consiste em todos os pontos para os quais a fórmula dá um valor real para a variável dependente. Esse é o que chamamos de ***domínio natural*** da função. As definições a seguir resumem essa discussão.

Por extensão, podemos definir a noção de "espaço $n$-dimensional" em que um "ponto" é uma sequência de n números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Então uma função de $n$ variáveis reais é uma regra que associa um único número real $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a cada ponto de algum conjunto desse espaço.

**13.1.1 DEFINIÇÃO** Uma ***função f de duas variáveis***, $x$ e $y$, é uma regra que associa um único número real $f(x, y)$ a cada ponto $(x, y)$ de algum conjunto $D$ no plano $x\,y$.

**13.1.2 DEFINIÇÃO** Uma ***função f de três variáveis***, $x$, $y$ e $z$, é uma regra que associa um único número real $f(x, y, z)$ a cada ponto $(x, y, z)$ de algum conjunto $D$ no espaço tridimensional.




A linha de fronteira sólida está incluída no domínio, ao passo que a linha tracejada não está incluída no domínio.

**Figura 13.1.1**

▶ **Exemplo 1** Seja $f(x, y) = \sqrt{y + 1} + \ln(x^2 - y)$. Encontre $f(e, 0)$ e esboce o domínio natural de $f$.

***Solução*** Por substituição,

$$f(e, 0) = \sqrt{0 + 1} + \ln(e^2 - 0) = \sqrt{1} + \ln(e^2) = 1 + 2 = 3$$

Para encontrar o domínio natural de $f$, observe que $\sqrt{y + 1}$ só está definida se $y \geq -1$, enquanto que $\ln(x^2 - y)$ só está definida se $0 < x^2 - y$ ou $y < x^2$. Assim, o domínio natural de $f$ consiste em todos os pontos do plano $xy$ com $-1 \leq y < x^2$. Para esboçar o domínio natural, começamos esboçando a parábola $y = x^2$ como uma curva tracejada e a reta $y = -1$ como uma linha sólida. Então, o domínio natural de $f$ é a região que fica acima ou na reta $y = -1$ e abaixo da parábola $y = x^2$ (Figura 13.1.1). ◀

▶ **Exemplo 2** Seja

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Determine $f\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e o domínio natural de $f$.

***Solução*** Por substituição

$$f\left(0, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - (0)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Por causa do sinal da raiz quadrada, devemos ter $0 \leq 1 - x^2 - y^2 - z^2$ para ter um valor real para $f(x, y, z)$. Reescrevendo essa desigualdade na forma

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

vemos que o domínio natural de $f$ consiste em todos os pontos sobre ou dentro da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \blacktriangleleft$$

## FUNÇÕES DESCRITAS POR TABELAS

Às vezes, é necessário ou conveniente representar funções de duas variáveis por meio de uma tabela, em vez de dar uma fórmula explícita. Por exemplo, o Serviço Nacional de Meteorologia dos EUA utiliza a fórmula

$$W = 35{,}74 + 0{,}6215T + (0{,}4275T - 35{,}75)v^{0{,}16} \tag{1}$$

para modelar o índice de sensação térmica $W$ em graus Fahrenheit (°F) como uma função da temperatura $T$, dada em graus Fahrenheit, e da velocidade do vento $v$ (em milhas por hora), para velocidades superiores a 3 milhas por hora. Essa fórmula é suficientemente complexa a ponto de ser difícil ter uma ideia intuitiva da relação entre as variáveis. É possível ter uma ideia mais precisa dessa relação escolhendo valores amostrais de $T$ e de $v$ e construir uma tabela, como a Tabela 13.1.1, em que arredondamos os valores de $W$ até o inteiro mais próximo. Por exemplo, se a temperatura for de 30°F e a velocidade do vento for de 5 milhas por hora, a sensação que teremos será de uma temperatura de 25°F. Se a velocidade do vento aumentasse para 15 milhas por hora, teríamos a impressão de que a temperatura despencou para 19°F. Observe que, nesse caso, um aumento de 10 milhas por hora no vento causa uma queda de 6°F no índice de sensação térmica. Para estimar valores de sensação térmica que não estejam dispostos na tabela, podemos utilizar a ***interpolação linear***. Por exemplo, suponha que a temperatura seja de 30°F e a velocidade do vento seja de 7 milhas por hora. Uma estimativa razoável para a queda no índice de sensação térmica em relação a uma velocidade do vento de 5 milhas por hora seria $\frac{2}{10} \cdot 6°\text{F} = 1{,}2°\text{F}$. (Por quê?) A estimativa resultante do índice de sensação térmica, então, seria de $25°\text{F} - 1{,}2°\text{F} = 23{,}8°\text{F}$.

O índice de sensação térmica indica aquela temperatura (em graus Fahrenheit) com a qual um vento de 3 milhas por hora produziria na pele exposta a mesma sensação do que a combinação de temperatura e velocidade do vento nas condições climatológicas atuais.

**Tabela 13.1.1**

| VELOCIDADE DO VENTO $v$ (milhas/h) \ TEMPERATURA $T$ (°F) | 20 | 25 | 30 | 35 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 13 | 19 | 25 | 31 |
| 15 | 6 | 13 | 19 | 25 |
| 25 | 3 | 9 | 16 | 23 |
| 35 | 0 | 7 | 14 | 21 |
| 45 | −2 | 5 | 12 | 19 |

Em alguns casos, as tabelas para funções de duas variáveis surgem diretamente dos dados experimentais, quando então devemos trabalhar diretamente com a tabela ou então utilizar alguma técnica para construir uma fórmula que modele os dados da tabela. Essas técnicas de modelagem são abordadas em textos de Estatística e de Análise Numérica.

## GRÁFICOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Lembre que, para uma função $f$ de uma variável, o gráfico de $f(x)$ no plano $xy$ foi definido como sendo o gráfico da equação $y = f(x)$. Analogamente, se $f$ for uma função de duas variáveis, definimos o ***gráfico*** de $f(x, y)$ no espaço $xyz$ como sendo o gráfico da equação $z = f(x, y)$. Em geral, tal gráfico será uma superfície no espaço tridimensional.

**▶ Exemplo 3** Em cada parte, descreva o gráfico da função em um sistema de coordenadas $xyz$.

(a) $f(x, y) = 1 - x - \frac{1}{2}y$ (b) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(c) $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

***Solução (a)*** Por definição, o gráfico da função dada é o gráfico da equação

$$z = 1 - x - \tfrac{1}{2}y$$

que representa um plano. Uma parte triangular do plano pode ser esboçada plotando as interseções com os eixos coordenados e unindo-os com segmentos de reta (Figura 13.1.2*a*).

***Solução (b)*** Por definição, o gráfico da função dada é o gráfico da equação

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \tag{2}$$

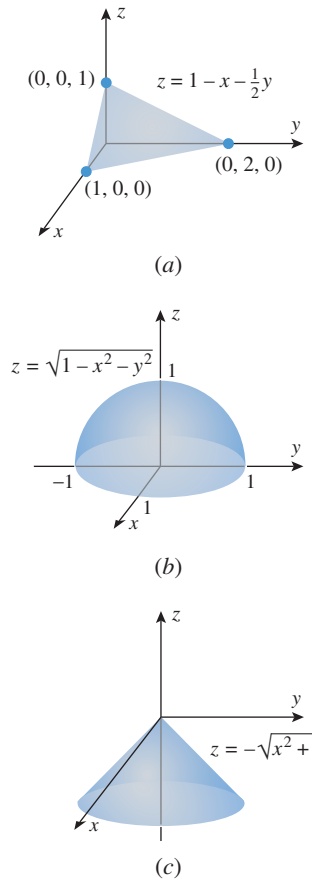



**Figura 13.1.2**

Depois de elevar ao quadrado ambos os lados, isso pode ser reescrito como

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

que representa uma esfera de raio 1 centrada na origem. Uma vez que (2) impõe a condição adicional $z \geq 0$, o gráfico é somente a semiesfera superior (Figura 13.1.2*b*).

***Solução (c)*** O gráfico da função dada é o gráfico da equação

$$z = -\sqrt{x^2 + y^2} \tag{3}$$

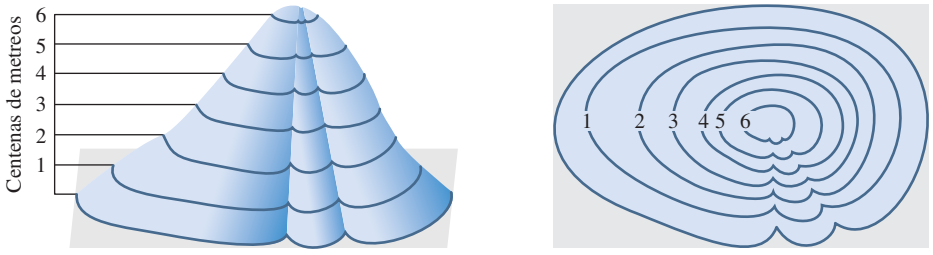
Depois de elevar ao quadrado, obtemos

$$z^2 = x^2 + y^2$$

que é a equação de um cone circular (ver Tabela 11.7.1). Como (3) impõe a condição $z \leq 0$, o gráfico é precisamente a folha inferior do cone (Figura 13.1.2*c*). ◄

## CURVAS DE NÍVEL

Estamos todos familiarizados com os mapas topográficos (ou de contornos) nos quais uma paisagem tridimensional, tal como a extensão de uma montanha, está representada por linhas de contorno bidimensionais ou curvas de elevação constante. Considere, por exemplo, o modelo de montanha e seu mapa de contornos mostrados na Figura 13.1.3. O mapa de contornos foi construído passando planos de elevação constante pela montanha, projetando o contorno resultante sobre uma superfície plana e classificando os contornos por sua elevação. Na Figura 13.1.3, notamos como os dois sulcos aparecem como reentrâncias das linhas de contorno, e como as curvas estão mais próximas no mapa de contornos quando a colina tem uma inclinação íngreme e tornam-se mais espaçadas quando a inclinação é gradual.




Uma vista em perspectiva de uma montanha modelo com dois sulcos

Um mapa de contornos da montanha modelo

**Figura 13.1.3**

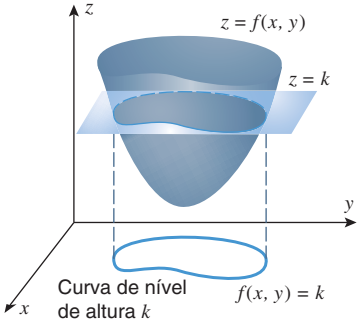
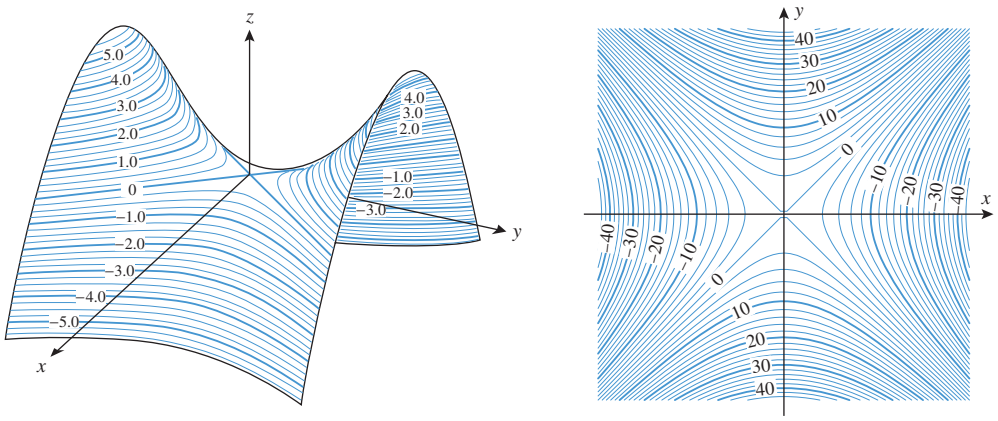



**Figura 13.1.4**

Os mapas de contornos são úteis também para o estudo de funções de duas variáveis. Se a superfície $z = f(x, y)$ for cortada pelo plano horizontal $z = k$, então todos os pontos da interseção têm $f(x, y) = k$. A projeção dessa interseção sobre o plano $xy$ é denominada ***curva de nível de altura k*** ou ***curva de nível com constante k*** (Figura 13.1.4). Um conjunto de curvas de nível para $z = f(x, y)$ é chamado de um ***esboço de contornos*** ou ***mapa de contornos*** de $f$.

► **Exemplo 4** O gráfico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$ no espaço $xyz$ é o paraboloide hiperbólico (superfície de sela), mostrado na Figura 13.1.5*a*. As curvas de nível têm equações da forma $y^2 - x^2 = k$. Se $k > 0$, essas curvas são hipérboles abrindo ao longo de retas paralelas ao eixo $y$; se $k < 0$, elas são hipérboles abrindo ao longo de retas paralelas ao eixo $x$; e se $k = 0$, a curva de nível consiste nas retas que se intersectam $y + x = 0$ e $y - x = 0$ (Figura 13.1.5*b*). ◄




(*a*) (*b*)

**Figura 13.1.5**

► **Exemplo 5** Esboce o mapa de contornos de $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ usando as curvas de nível de altura $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

***Solução*** O gráfico da superfície $z = 4x^2 + y^2$ é o paraboloide mostrado na parte esquerda da Figura 13.1.6, logo é razoável esperar que o mapa de contorno seja uma família de elipses centradas na origem. A curva de nível de altura $k$ tem a equação $4x^2 + y^2 = k$. Se $k = 0$, então o gráfico é o único ponto (0, 0). Se $k > 0$, podemos reescrever a equação como

$$\frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

que representa uma família de elipses com cortes no eixo $x$ iguais a $\pm\sqrt{k}/2$ e cortes no eixo $y$ iguais a $\pm\sqrt{k}$. O mapa de contornos para os valores especificados de $k$ é mostrado na parte à direita da Figura 13.1.6. ◄

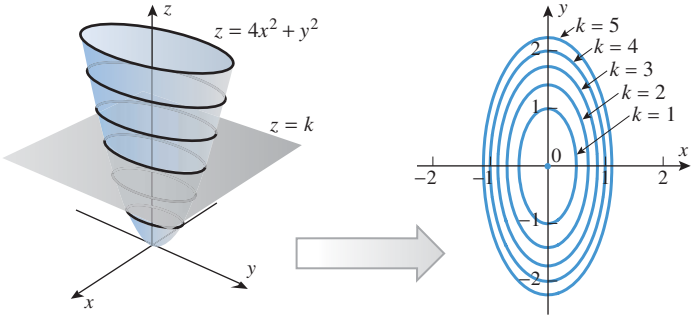



**Figura 13.1.6**

Nos dois últimos exemplos, utilizamos uma fórmula de $f(x, y)$ para encontrar o mapa de contornos de $f$. Reciprocamente, dado um mapa de contornos de alguma função, podemos utilizá-lo para obter estimativas dos valores da função.

► **Exemplo 6** Seja $f(r, L)$ o pagamento mensal para um empréstimo de 5 anos para a compra de uma moto como uma função da taxa de juros $r$ e o total financiado $L$. A Figura 13.1.7 é um mapa de contornos de $f(r, L)$. Use esse mapa em cada parte seguinte.

(a) Obtenha uma estimativa do pagamento mensal de um empréstimo de 3.000 reais a uma taxa de 7%.

(b) Obtenha uma estimativa do pagamento mensal de um empréstimo de 5.000 reais a uma taxa de 3%.

(c) Obtenha uma estimativa do total do empréstimo se o pagamento mensal for de 80 reais e a taxa de juros for de 7%.

***Solução (a)*** Como o ponto (7; 3.000) aparenta estar na curva de nível 60, uma estimativa do pagamento mensal é de 60 reais.

***Solução (b)*** Como o ponto (3; 5.000) aparenta estar entre as curvas de nível 80 e 100, uma estimativa do pagamento mensal é de 90 reais.

***Solução (c)*** A reta vertical $x = 3$ intersecta a curva de nível 80 em um ponto cuja coordenada $L$ parece ser 4.500. Assim, uma estimativa do total do empréstimo é de 4.500 reais.

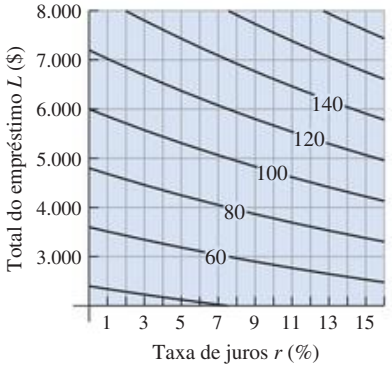
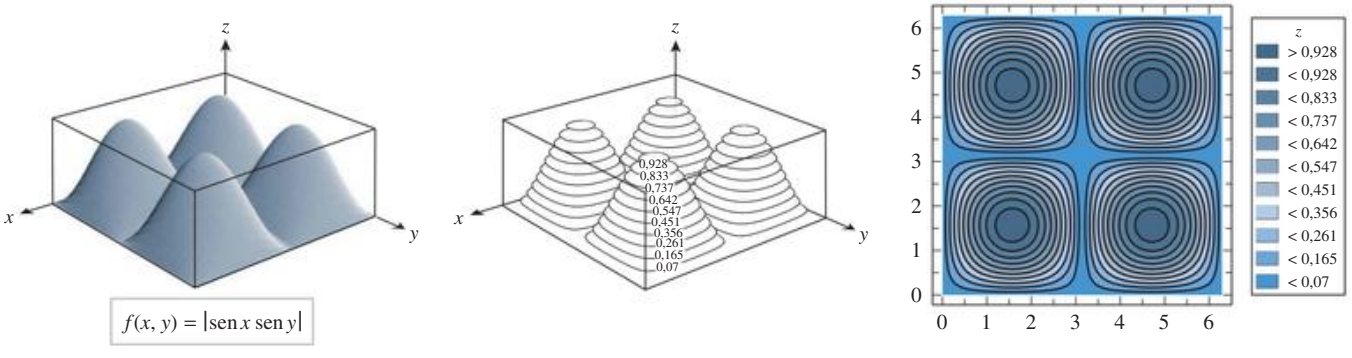



**Figura 13.1.7**

## MAPAS DE CONTORNOS USANDO RECURSOS GRÁFICOS

Exceto nos casos mais simples, os mapas de contornos podem ser difíceis de se produzir sem a ajuda de um recurso gráfico. A Figura 13.1.8 ilustra como a tecnologia gráfica pode ser usada para exibir curvas de nível. A Figura 13.1.8*a* mostra o gráfico de $f(x, y) = |\text{sen } x \text{ sen } y|$ esboçado acima do domínio $0 \le x \le 2\pi$, $0 \le y \le 2\pi$, e a Figura 13.1.8*b* exibe as curvas de elevação constante do gráfico de $f$. As projeções dessas curvas no plano $xy$ são as curvas de nível de $f$. A Figura 13.1.8*c* ilustra como essas curvas de nível podem ser exibidas mais claramente com o uso de tonalidades.




(*a*) (*b*) (*c*)

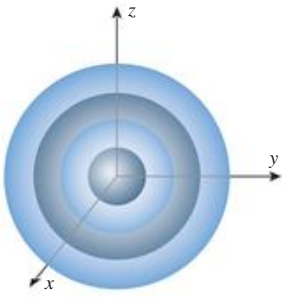
**Figura 13.1.8**

## SUPERFÍCIES DE NÍVEL

O termo "superfície de nível" é padrão, mas confuso, uma vez que uma superfície de nível *não* precisa estar nivelada no sentido de ser horizontal; é simplesmente uma superfície sobre a qual todos os valores de $f$ são o mesmo.

Observe que o gráfico de $y = f(x)$ é uma curva no espaço bidimensional, e o gráfico de $z = f(x, y)$ é uma superfície no espaço tridimensional, logo o número de dimensões necessárias para esses gráficos é o número de variáveis mais 1. Consequentemente, não há maneira "direta" de fazer o gráfico de uma função de três variáveis, uma vez que necessitamos de quatro dimensões. Contudo, se $k$ for constante, então o gráfico da equação $f(x, y, z) = k$ será, geralmente, uma superfície no espaço tridimensional (por exemplo, o gráfico de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é uma esfera), que denominamos ***superfície de nível com constante k***. Alguma intuição ge-

ométrica do comportamento da função $f$ pode, às vezes, ser obtida fazendo o gráfico dessas superfícies de nível com vários valores de $k$.




Superfícies de nível de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

**Figura 13.1.9**

► **Exemplo 7** Descreva as superfícies de nível de

$$\text{(a) } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{(b) } f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$$

***Solução (a)*** As superfícies de nível têm equações da forma

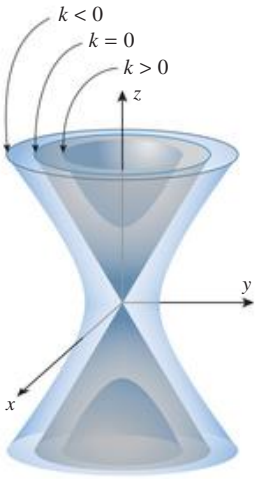
$$x^2 + y^2 + z^2 = k$$

Se $k > 0$, o gráfico dessa equação é uma esfera de raio $\sqrt{k}$ centrada na origem; se $k = 0$, o gráfico é o único ponto (0, 0, 0); e se $k < 0$, não há superfície de nível (Figura 13.1.9).

***Solução (b)*** As superfícies de nível têm equações da forma

$$z^2 - x^2 - y^2 = k$$

Como foi visto na Seção 11.7, essa equação representa um cone se $k = 0$, um hiperboloide de duas folhas se $k > 0$ e um hiperboloide de uma folha se $k < 0$ (Figura 13.1.10). ◄




Superfícies de nível de $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$

**Figura 13.1.10**

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Se o leitor dispuser de um recurso gráfico computacional que gere superfícies no espaço tridimensional, leia seu manual e tente reproduzir algumas das superfícies das Figuras 13.1.11 e 13.1.12 e da Tabela 13.1.2.

## FAZENDO O GRÁFICO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS USANDO RECURSOS GRÁFICOS

Gerar superfícies com um recurso gráfico é mais complicado do que gerar curvas planas, pois há mais fatores que devem ser levados em conta. Podemos tratar disso apenas superficialmente aqui, portanto se o leitor precisar usar um recurso gráfico, o manual será a principal fonte de informações.

Os recursos gráficos podem apenas mostrar uma parte do espaço $x$, $y$, $z$ em uma tela de visualização, logo o primeiro passo para fazer o gráfico de uma superfície é determinar qual parte do espaço $x$, $y$, $z$ queremos exibir. Essa região é chamada de ***janela de inspeção*** ou ***caixa de inspeção***. Por exemplo, a Figura 13.1.11 mostra o efeito de produzir o gráfico do paraboloide $z = x^2 + y^2$ em três diferentes janelas de inspeção. Entretanto, dentro de uma janela de inspeção fixa, a aparência da superfície também é afetada pelo ***ponto de vista***, isto é, a direção da qual a superfície é vista, e a distância do observador à superfície. Por exemplo, a Figura 13.1.12 mostra o gráfico do paraboloide $z = x^2 + y^2$ de três pontos de vista diferentes usando a primeira janela de inspeção da Figura 13.1.11.

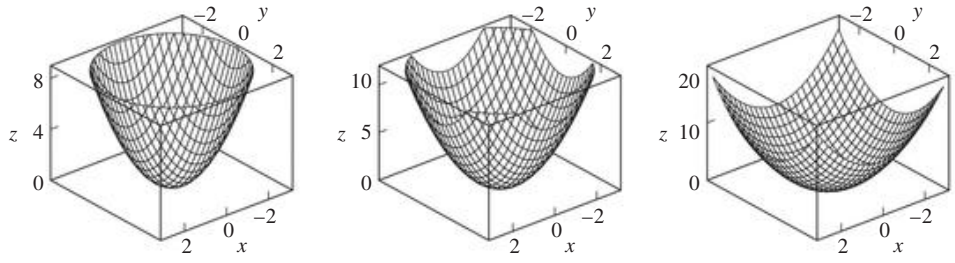



**Figura 13.1.11** Variando a caixa de inspeção.

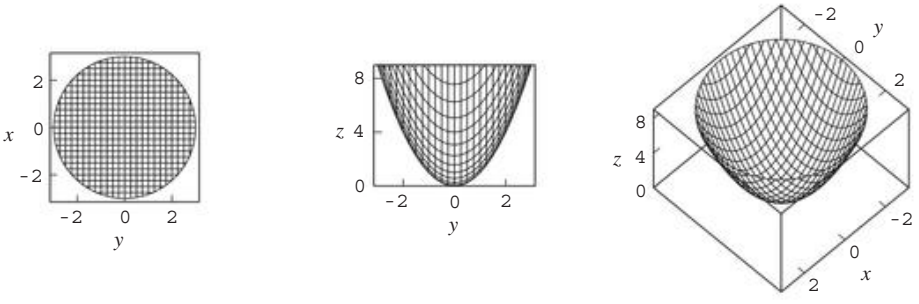
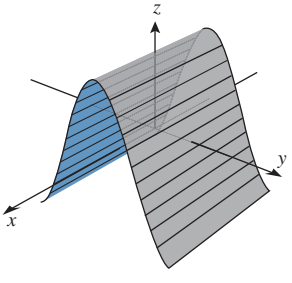
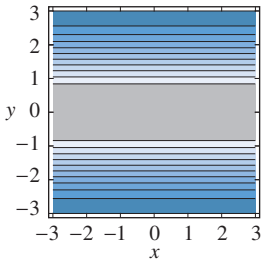
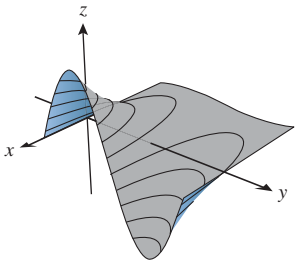
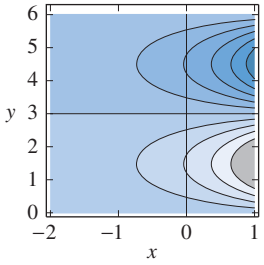
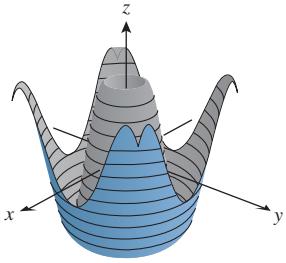
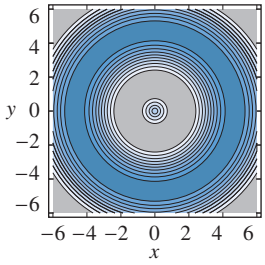
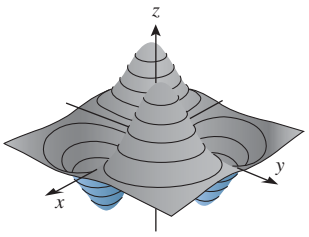
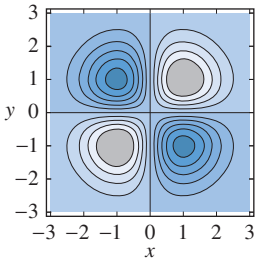
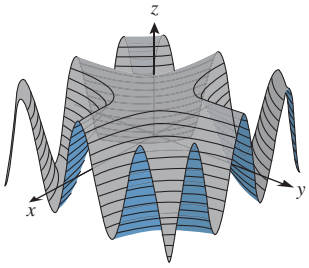
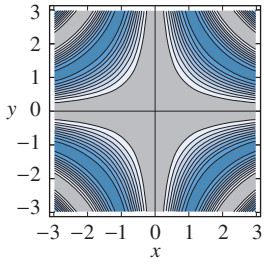
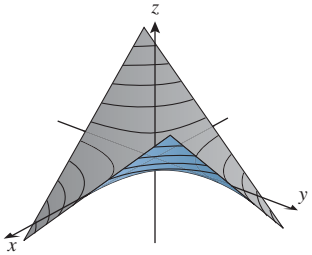
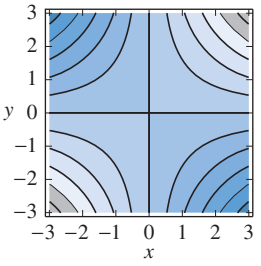



**Figura 13.1.12** Variando o ponto de vista.

Na Tabela 13.1.2, mostramos seis superfícies no espaço tridimensional, junto aos mapas de contornos associados. Observe que a malha das curvas nas superfícies são os traços em planos verticais, enquanto que as curvas de nível correspondem a traços em planos horizontais.

**Tabela 13.1.2**

| SUPERFÍCIE | MAPA DE CONTORNOS | SUPERFÍCIE | MAPA DE CONTORNOS |
|---|---|---|---|
| $z = \cos y$  |  | $z = 5e^x \operatorname{sen} y$  |  |
| $z = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$  |  | $z = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$  |  |
| $z = \cos(xy)$  |  | $z = xy$  |  |

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.1 (Ver página 917 para respostas.)

**1.** O domínio de $f(x, y) = \ln xy$ é _____, e o domínio de $g(x, y) = \ln x + \ln y$ é _____.

**2.** Seja $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y + 1}$.

(a) $f(2, 1) =$ _____ (b) $f(1, 2) =$ _____

(c) $f(a, a) =$ _____ (d) $f(y + 1, y) =$ _____

**3.** Seja $f(x, y) = e^{x+y}$.

(a) Com quais valores de $k$ a curva de nível $f(x, y) = k$ contém pelo menos um ponto?

(b) Descreva as curvas de nível $f(x, y) = k$ com os valores de $k$ obtidos em (a).

**4.** Seja $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$.

(a) Determine todos os valores de $k$ tais que a superfície de nível $f(x, y, z) = k$ contenha pelo menos um ponto.

(b) Descreva as curvas de nível $f(x, y, z) = k$ com os valores de $k$ obtidos em (a).

## EXERCÍCIOS 13.1 Recurso Gráfico CAS

**1-8** Estes exercícios dizem respeito a funções de duas variáveis. ■

**1.** Seja $f(x, y) = x^2y + 1$. Determine
(a) $f(2, 1)$ (b) $f(1, 2)$ (c) $f(0, 0)$
(d) $f(1, -3)$ (e) $f(3a, a)$ (f) $f(ab, a - b)$.

**2.** Seja $f(x, y) = x + \sqrt[3]{xy}$. Determine
(a) $f(t, t^2)$ (b) $f(x, x^2)$ (c) $f(2y^2, 4y)$.

**3.** Seja $f(x, y) = xy + 3$. Determine
(a) $f(x + y, x - y)$ (b) $f(xy, 3x^2y^3)$.

**4.** Seja $g(x) = x \operatorname{sen} x$. Determine
(a) $g(x/y)$ (b) $g(xy)$ (c) $g(x - y)$.

**5.** Determine $F(g(x), h(y))$ se $F(x, y) = xe^{xy}$, $g(x) = x^3$ e $h(y) = 3y + 1$.

**6.** Determine $g(u(x, y), v(x, y))$ se $g(x, y) = y \operatorname{sen}(x^2y)$, $u(x, y) = x^2y^3$ e $v(x, y) = \pi xy$.

**7.** Sejam $f(x, y) = x + 3x^2y^2$, $x(t) = t^2$ e $y(t) = t^3$. Determine
(a) $f(x(t), y(t))$ (b) $f(x(0), y(0))$
(c) $f(x(2), y(2))$

**8.** Sejam $g(x, y) = ye^{-3x}$, $x(t) = \ln(t^2 + 1)$ e $y(t) = \sqrt{t}$. Determine $g(x(t), y(t))$.

**9-10** Suponha que a concentração $C$ em mg/l de um medicamento na corrente sanguínea de um paciente seja modelada pela função $C(x, t) = 0{,}2x(e^{-0{,}2t} - e^{-t})$, em que $x$ é a dosagem do medicamento em mg e $t$ é o número de horas desde o início da medicação. ■

**9.** (a) Dê uma estimativa do valor de $C(25, 3)$ com duas casas decimais. Inclua unidades apropriadas e interprete sua resposta em um contexto físico.
(b) Se a dosagem for de 100 mg, dê uma fórmula para a concentração como uma função do tempo.
(c) Dê uma fórmula que descreva a concentração depois de uma hora em termos da dosagem $x$.

**10.** (a) Suponha que o medicamento atinja um nível satisfatório na corrente sanguínea depois de uma meia hora. Dê uma estimativa de quanto tempo a mais o medicamento se mantém eficaz.
(b) Suponha que a dosagem seja de 100 mg. Dê uma estimativa da concentração máxima na corrente sanguínea.

**11-14** Nestes exercícios, use a Tabela 13.1.1 para obter uma estimativa da quantidade solicitada. ■

**11.** O índice de sensação térmica quando
(a) a temperatura for 25°F e a velocidade do vento, 7 milhas por hora.
(b) a temperatura for 28°F e a velocidade do vento, 5 milhas por hora.

**12.** O índice de sensação térmica quando
(a) a temperatura for 35°F e a velocidade do vento, 14 milhas por hora.
(b) a temperatura for 32°F e a velocidade do vento, 15 milhas por hora.

**13.** A temperatura quando
(a) o índice de sensação térmica for de 16°F e a velocidade do vento, 25 milhas por hora.
(b) o índice de sensação térmica for de 6°F e a velocidade do vento, 25 milhas por hora.

**14.** A velocidade do vento quando
(a) o índice de sensação térmica for de 7°F e a temperatura 25°F.
(b) o índice de sensação térmica for de 15°F e a temperatura 30°F.

**15.** Um método para determinar a umidade relativa do ar consiste em molhar o bulbo (a parte que contém o mercúrio) de um termômetro, agitá-lo pelo ar e, então, comparar a leitura do termômetro com a verdadeira temperatura do ar. Se a umidade for inferior a 100%, então a temperatura obtida no termômetro será inferior à temperatura do ar. Essa diferença de temperatura é conhecida como a *depressão do bulbo molhado*. A tabela a seguir dá a umidade relativa do ar como uma função da temperatura do ar e da depressão do bulbo molhado. Use a tabela para completar as partes (a) a (c).
(a) Qual é a umidade relativa do ar se a temperatura do ar for de 20°C e a depressão do bulbo molhado for 16°C?
(b) Estime a umidade relativa se a temperatura do ar for de 25°C e a depressão do bulbo molhado for 3,5°C.
(c) Estime a umidade relativa se a temperatura do ar for de 22°C e a depressão do bulbo molhado for 5°C.

| DEPRESSÃO DO BULBO MOLHADO (°C) \ TEMPERATURA DO AR (°C) | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 71 | 74 | 77 | 79 |
| 4 | 62 | 66 | 70 | 73 |
| 5 | 53 | 59 | 63 | 67 |

**Tabela Ex-15**

**16.** Utilize a tabela do Exercício 15 para completar as partes (a) a (c).
(a) Qual é a depressão do bulbo molhado se a temperatura do ar for de 30°C e a umidade relativa for 73%?
(b) Estime a umidade relativa se a temperatura do ar for de 15°C e a depressão do bulbo molhado for 4,25°C.
(c) Estime a umidade relativa se a temperatura do ar for de 26°C e a depressão do bulbo molhado for 3°C.

**17-20** Estes exercícios envolvem funções de três variáveis. ■

**17.** Seja $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3$. Determine
(a) $f(2, 1, 2)$ (b) $f(-3, 2, 1)$
(c) $f(0, 0, 0)$ (d) $f(a, a, a)$
(e) $f(t, t^2, -t)$ (f) $f(a + b, a - b, b)$

**18.** Seja $f(x, y, z) = zxy + x$. Determine
(a) $f(x + y, x - y, x^2)$ (b) $f(xy, y/x, xz)$

**19.** Determine $F(f(x), g(y), h(z))$ se $F(x, y, z) = ye^{xyz}$, $f(x) = x^2$, $g(y) = y + 1$ e $h(z) = z^2$.

**20.** Determine $g(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ se $g(x, y, z) = z \operatorname{sen} xy$, $u(x, y, z) = x^2z^3$, $v(x, y, z) = \pi xyz$ e $w(x, y, z) = xy/z$.

**21-22** Estes exercícios dizem respeito a funções de quatro ou mais variáveis. ■

**21.** (a) Seja $f(x, y, z, t) = x^2y^3\sqrt{z+t}$. Determine $f(\sqrt{5}, 2, \pi, 3\pi)$.

(b) Seja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} kx_k$. Determine $f(1, 1,..., 1)$.

**22.** (a) Seja $f(u, v, \lambda, \phi) = e^{u+v}\cos\lambda \operatorname{tg}\phi$. Determine $f(-2, 2, 0, \pi/4)$.

(b) Seja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Determine $f(1, 2,..., n)$.

**23-26** Esboce o domínio de $f$. Utilize linhas sólidas para as porções da fronteira que estão incluídas no domínio e linhas tracejadas para as porções que não estão incluídas. ■

**23.** $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ **24.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

**25.** $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y^2}$ **26.** $f(x, y) = \ln xy$

**27-28** Descreva o domínio de $f$ em palavras. ■

**27.** (a) $f(x, y) = xe^{-\sqrt{y+2}}$

(b) $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$

(c) $f(x, y, z) = e^{xyz}$

**28.** (a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{y^2 + 3}$ (b) $f(x, y) = \ln(y - 2x)$

(c) $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x + y + z}$

**29-32 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**29.** Se o domínio de $f(x, y)$ for o plano $xy$, então o domínio de $f(\operatorname{arc\,sen} t, \sqrt{t})$ será o intervalo $[0, 1]$.

**30.** Se $f(x, y) = y/x$, então uma curva de nível de $f(x, y) = m$ será a reta $y = mx$.

**31.** O domínio natural de $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ é o disco de raio 1 centrado na origem do plano $xy$.

**32.** Cada superfície de nível de $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ é um plano.

**33-42** Esboce o gráfico de $f$. ■

**33.** $f(x, y) = 3$ **34.** $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

**35.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ **36.** $f(x, y) = x^2 + y^2$

**37.** $f(x, y) = x^2 - y^2$ **38.** $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

**39.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ **40.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

**41.** $f(x, y) = y + 1$ **42.** $f(x, y) = x^2$

**43-44** Em cada parte, selecione o termo que melhor descreve as curvas de nível da função $f$. Escolha dentre os termos: retas, círculos, elipses não circulares, parábolas ou hipérboles. ■

**43.** (a) $f(x, y) = 5x^2 - 5y^2$ (b) $f(x, y) = y - 4x^2$
(c) $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ (d) $f(x, y) = 3x^2$

**44.** (a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ (b) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2$
(c) $f(x, y) = x^2 - 2x - y^2$ (d) $f(x, y) = 2y^2 - x$

**45-46** Em cada parte, use a Figura 13.1.7. ■

**45.** Suponha que tomemos um empréstimo de 6.000 reais a uma taxa de juros de 11%.
(a) Dê uma estimativa do pagamento mensal.
(b) Mantendo esse pagamento mensal, dê uma estimativa da quantidade que poderíamos tomar emprestada se o juro caísse para 9%.

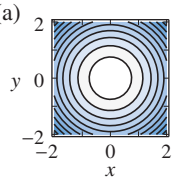
**46.** Suponha que tomemos um empréstimo de 3.000 reais a uma taxa de juros de 4%.
(a) Dê uma estimativa do pagamento mensal.
(b) Mantendo esse pagamento mensal, dê uma estimativa da quantidade que poderíamos tomar emprestada se o juro aumentasse para 7%.

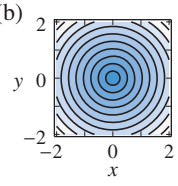
## ENFOCANDO CONCEITOS

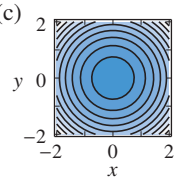
**47.** Em cada parte, associe o mapa de contornos com uma das funções

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2,$$
$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

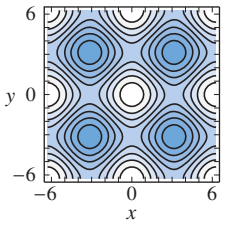
por inspeção e explique seu raciocínio. Quanto maior o valor de $z$, mais clara fica a cor no mapa de contornos. Os contornos correspondem a valores igualmente espaçados de $z$.

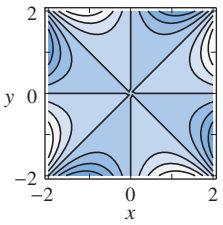
(a) 

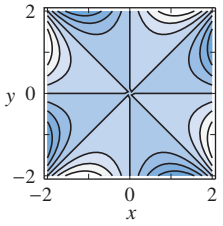

(b) 

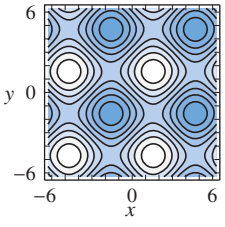

(c) 


**48.** Em cada parte, associe o mapa de contornos com uma das superfícies na figura a seguir por inspeção e explique seu raciocínio. Quanto maior o valor de $z$, mais clara fica a cor no mapa de contornos.

(a) 


(b) 


(c) 


(d) 

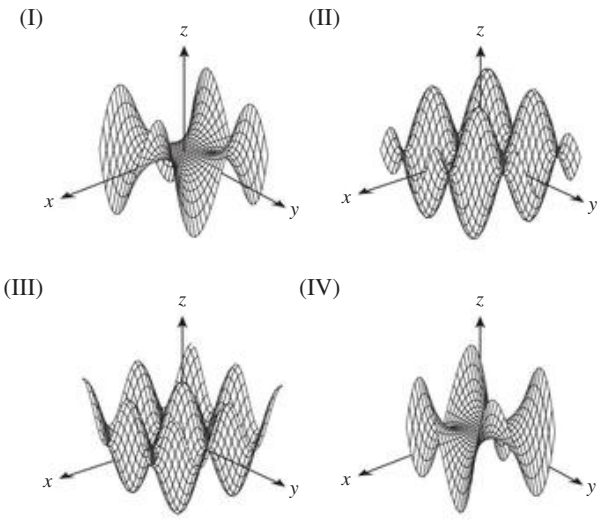



**Figura Ex-48**

**49.** Em cada parte, as questões se referem ao mapa de contorno na figura a seguir.

(a) O ponto $A$ ou $B$ é o ponto mais alto? Explique seu raciocínio.

(b) O ponto $A$ ou $B$ está na inclinação mais íngreme? Explique seu raciocínio.

(c) Iniciando em $A$ e movendo-se de tal modo que $y$ permanece constante e $x$ cresce, a elevação começará a crescer ou decrescer?

(d) Iniciando em $B$ e movendo-se de tal modo que $y$ permanece constante e $x$ cresce, a elevação começará a crescer ou decrescer?

(e) Iniciando em $A$ e movendo-se de tal modo que $x$ permanece constante e $y$ decresce, a elevação começará a crescer ou decrescer?

(f) Iniciando em $B$ e movendo-se de tal modo que $x$ permanece constante e $y$ decresce, a elevação começará a crescer ou decrescer?

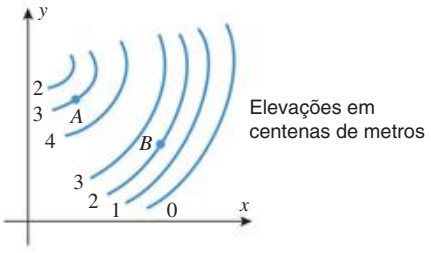



**Figura Ex-49**

**50.** Uma curva conectando pontos de pressão atmosférica iguais sobre um mapa metereológico é denominada ***linha isobárica*** ou de ***isóbare***. Em um mapa metereológico típico, as linhas isobáricas referem-se à pressão ao nível do mar e são dadas em unidades de ***milibares*** (mb). Matematicamente, as linhas isobáricas são curvas de nível da função pressão $p(x, y)$ definida nos pontos geográficos $(x, y)$, representados no mapa. Linhas isobáricas muito próximas correspondem a inclinações íngremes no gráfico da função pressão e estão geralmente associadas a fortes ventos – quanto maior a inclinação, maior será a velocidade do vento.

(a) Em referência ao mapa metereológico abaixo, a velocidade do vento é maior em Medicine Hart ou em Chicago? Explique seu raciocínio.

(b) Estime a taxa de variação média da pressão atmosférica em mb/milha de Medicine Hart a Chicago, dado que a distância entre as duas cidades é de aproximadamente 1.400 milhas.

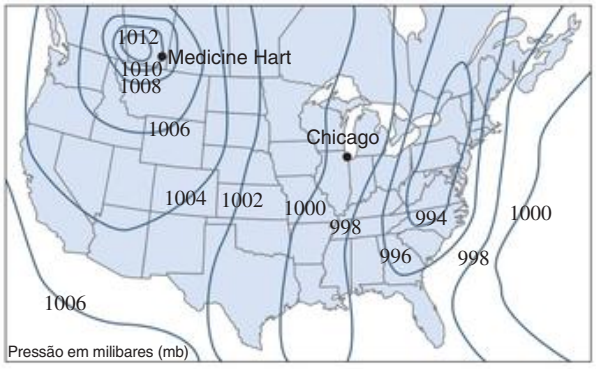



**Figura Ex-50**

**51–56** Esboce a curva de nível $z = k$ com os valores especificados de $k$. ■

**51.** $z = x^2 + y^2;\ k = 0, 1, 2, 3, 4$

**52.** $z = y/x;\ k = -2, -1, 0, 1, 2$

**53.** $z = x^2 + y;\ k = -2, -1, 0, 1, 2$

**54.** $z = x^2 + 9y^2;\ k = 0, 1, 2, 3, 4$

**55.** $z = x^2 - y^2;\ k = -2, -1, 0, 1, 2$

**56.** $z = y \operatorname{cossec} x;\ k = -2, -1, 0, 1, 2$

**57–60** Esboce a superfície de nível $f(x, y, z) = k$. ■

**57.** $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2;\ k = 16$

**58.** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2;\ k = 0$

**59.** $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2 + 4;\ k = 7$

**60.** $f(x, y, z) = 4x - 2y + z;\ k = 1$

**61–64** Descreva a superfície de nível em palavras. ■

**61.** $f(x, y, z) = (x - 2)^2 + y^2 + z^2$

**62.** $f(x, y, z) = 3x - y + 2z$ **63.** $f(x, y, z) = x^2 + z^2$

**64.** $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

**65.** Seja $f(x, y) = x^2 - 2x^3 + 3xy$. Determine uma equação da curva de nível que passa pelo ponto

(a) $(-1, 1)$ (b) $(0, 0)$ (c) $(2, -1)$

**66.** Seja $f(x, y) = ye^x$. Determine uma equação da curva de nível que passa pelo ponto

(a) $(\ln 2, 1)$ (b) $(0, 3)$ (c) $(1, -2)$

**67.** Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Determine uma equação da superfície de nível que passa pelo ponto

(a) $(1, -2, 0)$ (b) $(1, 0, 3)$ (c) $(0, 0, 0)$

**68.** Seja $f(x, y, z) = x\,y\,z + 3$. Determine uma equação da superfície de nível que passa pelo ponto
(a) $(1, 0, 2)$ (b) $(-2, 4, 1)$ (c) $(0, 0, 0)$

**69.** Se $T(x, y)$ for a temperatura em um ponto $(x, y)$ sobre uma placa delgada de metal no plano $xy$, então as curvas de nível de $T$ são denominadas ***curvas isotérmicas***. Todos os pontos sobre tal curva têm a mesma temperatura. Suponha que uma placa ocupe o primeiro quadrante e $T(x, y) = xy$.
(a) Esboce as curvas isotérmicas nas quais $T = 1$, $T = 2$ e $T = 3$.
(b) Uma formiga, inicialmente em $(1, 4)$, anda sobre a placa de modo que a temperatura ao longo de sua trajetória permanece constante. Qual é a trajetória tomada pela formiga e qual é a temperatura ao longo de sua trajetória?

**70.** Se $V(x, y)$ for a voltagem ou potencial em um ponto $(x, y)$ do plano $xy$, então as curvas de nível de $V$ são denominadas ***curvas equipotenciais***. Ao longo de tal curva, a voltagem permanece constante. Dado que

$$V(x, y) = \frac{8}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}}$$

esboce as curvas equipotenciais nas quais $V = 2{,}0$; $V = 1{,}0$ e $V = 0{,}5$.

**71.** Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$.
(a) Use um recurso gráfico para gerar a curva de nível que passa pelo ponto $(2, -1)$.
(b) Gere a curva de nível de altura 1.

**72.** Seja $f(x, y) = 2\sqrt{xy}$.
(a) Use um recurso gráfico para gerar a curva de nível que passa pelo ponto $(2, 2)$.
(b) Gere a curva de nível de altura 8.

**C 73.** Seja $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$.
(a) Use um CAS para gerar o gráfico de $f$ com $-2 \le x \le 2$ e $-2 \le y \le 2$.
(b) Gere um mapa de contornos para a superfície e confirme visualmente que está consistente com a superfície obtida na parte (a).
(c) Leia o manual apropriado e explore o efeito de gerar o gráfico de $f$ de vários pontos de vista.

**C 74.** Seja $f(x, y) = \frac{1}{10}e^x \operatorname{sen} y$.
(a) Use um CAS para gerar o gráfico de $f$ com $0 \le x \le 4$ e $0 \le y \le 2\pi$.
(b) Gere o mapa de contornos para a superfície e confirme visualmente que está consistente com a superfície obtida na parte (a).
(c) Leia o manual apropriado e explore o efeito de gerar o gráfico de $f$ de vários pontos de vista.

**75.** Em cada parte, descreva em palavras como o gráfico de $g$ está relacionado com o gráfico de $f$.
(a) $g(x, y) = f(x - 1, y)$ (b) $g(x, y) = 1 + f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y + 1)$

**76.** (a) Esboce o gráfico de $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.
(b) Descreva em palavras como o gráfico da função $g(x, y) = e^{-a(x^2+y^2)}$ está relacionado como o gráfico de $f$ para valores positivos de $a$.

**77.** **Texto** Encontre algumas aplicações práticas de funções de duas e três variáveis e discuta como considerações físicas afetam o domínio dessas funções.

**78.** **Texto** Descreva duas maneiras diferentes pelas quais podemos representar geometricamente uma função $f(x, y)$. Discuta algumas vantagens e desvantagens de cada representação.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.1

**1.** todos os pontos $(x, y)$ do primeiro ou terceiro quadrantes; todos os pontos $(x, y)$ do primeiro quadrante **2.** (a) $\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{4}$ (c) 0 (d) $1/(2y + 2)$ **3.** (a) $k > 0$ (b) as retas $x + y = \ln k$ **4.** (a) $0 < k \le 1$ (b) esferas de raio $\sqrt{(1 - k)/k}$ se $0 < k < 1$, o único ponto $(0, 0, 0)$ se $k = 1$.

## 13.2 LIMITES E CONTINUIDADE

*Nesta seção, introduziremos as noções de limite e continuidade para funções de duas ou mais variáveis. Não entraremos em grandes detalhes – nosso objetivo é desenvolver precisamente os conceitos básicos e obter resultados necessários nas seções posteriores. Um estudo mais extensivo desses tópicos é comumente dado em Cálculo avançado.*

### LIMITES AO LONGO DE CURVAS

Para uma função de uma variável, há dois limites laterais em um ponto $x_0$, a saber,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

refletindo o fato de que há apenas dois sentidos pelos quais $x$ pode aproximar $x_0$, pela direita ou pela esquerda. Para funções de duas ou três variáveis, a situação é mais complicada, pois

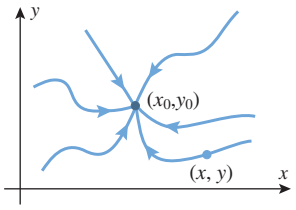



**Figura 13.2.1**

há uma infinidade de curvas diferentes ao longo das quais um ponto pode aproximar outro (Figura 13.2.1). Nosso primeiro objetivo nesta seção é definir o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y)$ tende a $(x_0, y_0)$ ao longo de uma curva $C$ (e, analogamente, para funções de três variáveis).

Se $C$ for uma curva paramétrica lisa no espaço bi ou tridimensional que está representada pelas equações

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad \text{ou} \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

e se $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ e $z_0 = z(t_0)$, então os limites

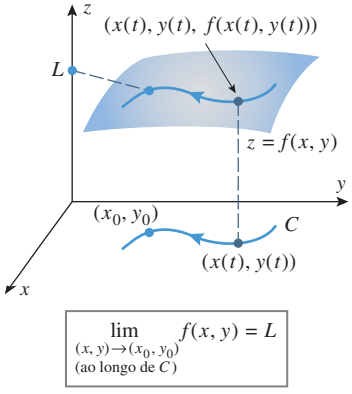
$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)\\ \text{(ao longo de } C)}} f(x, y) \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{(x,\,y,\,z)\to(x_0,\,y_0,\,z_0)\\ \text{(ao longo de } C)}} f(x, y, z)$$

são definidos por

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)\\ \text{(ao longo de } C)}} f(x, y) = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t)) \tag{1}$$

$$\lim_{\substack{(x,\,y,\,z)\to(x_0,\,y_0,\,z_0)\\ \text{(ao longo de } C)}} f(x, y, z) = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t), z(t)) \tag{2}$$

Em palavras, as Fórmulas (1) e (2) afirmam que um limite de uma função $f$ ao longo de uma curva paramétrica pode ser obtido substituindo as equações paramétricas da curva na fórmula da função e, então, calculando o limite no ponto apropriado da função a uma variável que resulta.




$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)\\ \text{(ao longo de } C)}} f(x, y) = L$$

**Figura 13.2.2**

Nessas fórmulas, o limite da função de $t$ deve ser tratado como um limite lateral se $(x_0, y_0)$ ou $(x_0, y_0, z_0)$ forem extremidades de $C$.

Uma interpretação geométrica do limite ao longo de uma curva para uma função de duas variáveis está mostrada na Figura 13.2.2. À medida que o ponto $(x(t), y(t))$ move-se ao longo da curva $C$ no plano $xy$ em direção a $(x_0, y_0)$, o ponto $(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ move-se diretamente acima ao longo do gráfico de $z = f(x, y)$ com $f(x(t), y(t))$ tendendo ao valor limite $L$. Na figura, seguimos uma prática comum de omitir o zero na coordenada $z$ para os pontos no plano $xy$.

**▶ Exemplo 1** A Figura 13.2.3*a* mostra um gráfico gerado por um computador da função

$$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

O gráfico revela que a superfície tem um cume acima da reta $y = -x$, o que é de se esperar, uma vez que $f(x, y)$ tem um valor constante de $\frac{1}{2}$ com $y = -x$, exceto em $(0, 0)$, onde $f$ não está definida (verifique). Além disso, o gráfico sugere que o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de uma reta que passa pela origem varia com a direção da reta. Determine esse limite ao longo

(a) do eixo $x$ (b) do eixo $y$ (c) da reta $y = x$

(d) da reta $y = -x$ (e) da parábola $y = x^2$

***Solução (a)*** O eixo $x$ tem equações paramétricas $x = t$, $y = 0$, com $(0, 0)$ correspondendo a $t = 0$, logo

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\ \text{(ao longo de } y=0)}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f(t, 0) = \lim_{t\to 0} \left(-\frac{0}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

o que é consistente com a Figura 13.2.3*b*.

***Solução (b)*** O eixo $y$ tem equações paramétricas $x = 0$, $y = t$, com $(0, 0)$ correspondendo a $t = 0$, logo

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\ \text{(ao longo de } x=0)}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f(0, t) = \lim_{t\to 0} \left(-\frac{0}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

o que é consistente com a Figura 13.2.3*b*.

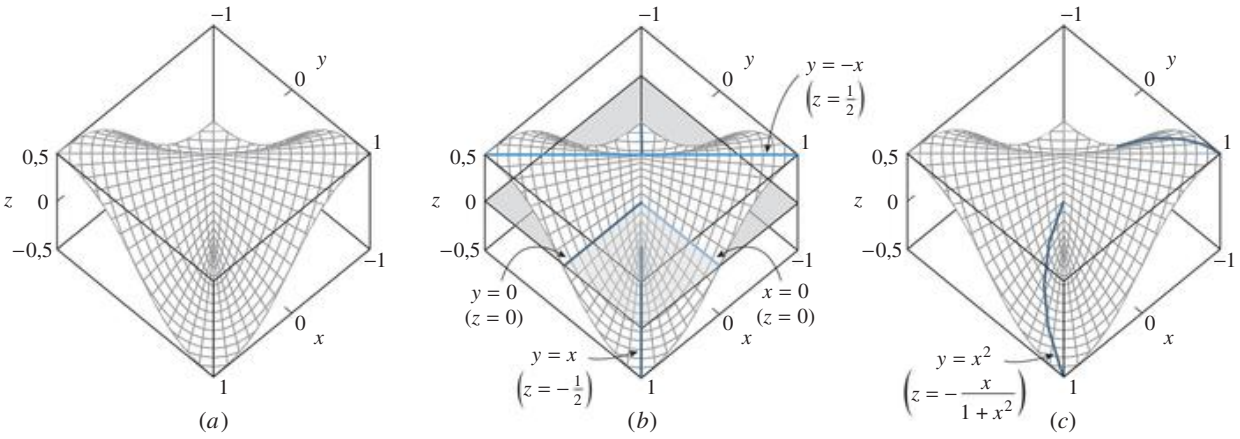



**Figura 13.2.3**

***Solução (c)*** A reta $y = x$ tem equações paramétricas $x = t$, $y = t$, com (0, 0) correspondendo a $t = 0$, logo

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\(\text{ao longo de } y=x)}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f(t, t) = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{t^2}{2t^2}\right) = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

o que é consistente com a Figura 13.2.3*b*.

***Solução (d)*** A reta $y = -x$ tem equações paramétricas $x = t$, $y = -t$, com (0, 0) correspondendo a $t = 0$, logo

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\(\text{ao longo de } y=-x)}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f(t, -t) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

o que é consistente com a Figura 13.2.3*b*.

Para manter a uniformidade, escolhemos o mesmo parâmetro $t$ em cada parte do Exemplo 1. Também poderíamos ter escolhido $x$ ou $y$ como o parâmetro, de acordo com o contexto. Por exemplo, a parte (b) poderia ter sido calculada usando

$$\lim_{y\to 0} f(0, y)$$

e a parte (e) poderia ter sido calculada usando

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2)$$

***Solução (e)*** A parábola $y = x^2$ tem equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$, com (0, 0) correspondendo a $t = 0$, logo

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,\,0)\\(\text{ao longo de } y=x^2)}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f(t, t^2) = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{t^3}{t^2 + t^4}\right) = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{t}{1 + t^2}\right) = 0$$

o que é consistente com a Figura 13.2.3*c*, que mostra a curva paramétrica

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = -\frac{t}{1 + t^2}$$

sobreposta na superfície. ◀

## CONJUNTOS ABERTOS E FECHADOS

Embora os limites ao longo de curvas sejam úteis em muitas ocasiões, eles nem sempre contam toda a história sobre o comportamento limite de uma função em um ponto; o que se precisa é de um conceito de limite que dê conta do comportamento da função em *toda uma vizinhança* de um ponto, e não só ao longo de curvas lisas que passem pelo ponto. Para alcançar isso, começamos introduzindo alguma terminologia.

Seja $C$ um círculo no espaço bidimensional centrado em $(x_0, y_0)$ e de raio positivo $\delta$. O conjunto de todos os pontos englobados pelo círculo, mas que não estejam na circunferência, é denominado ***disco aberto*** de raio $\delta$ centrado em $(x_0, y_0)$, já o conjunto de todos os pontos da circunferência junto aos englobados pelo círculo é o ***disco fechado*** de raio $\delta$ centrado em $(x_0, y_0)$ (Figura 13.2.4). Analogamente, seja $S$ uma esfera no espaço tridimensional centrada

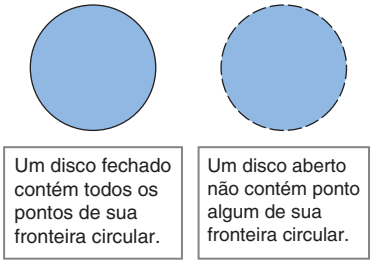



**Figura 13.2.4**

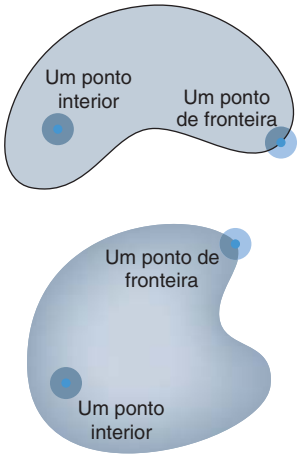



**Figura 13.2.5**

em $(x_0, y_0, z_0)$ e de raio positivo $\delta$; o conjunto de todos os pontos englobados pela esfera, mas que não estejam na esfera, é denominado ***bola aberta*** de raio $\delta$ centrada em $(x_0, y_0, z_0)$, e o conjunto de todos os pontos da esfera junto aos englobados pela esfera é a ***bola fechada*** de raio $\delta$ centrada em $(x_0, y_0, z_0)$. Os discos e as bolas são os análogos bi e tridimensionais dos intervalos de uma reta.

As noções de "aberto" e "fechado" podem ser estendidas a conjuntos mais gerais do espaço bi e tridimensional. Se $D$ for um conjunto de pontos do espaço bidimensional, então diremos que um ponto $(x_0, y_0)$ é um ***ponto interior*** de $D$ se existir *algum* disco aberto centrado em $(x_0, y_0)$ que contenha unicamente pontos de $D$; dizemos que $(x_0, y_0)$ é um ***ponto de fronteira*** de $D$ se *qualquer* disco aberto centrado em $(x_0, y_0)$ contiver pontos tanto de $D$ quanto não de $D$. A mesma terminologia se aplica a conjuntos no espaço tridimensional, mas nesse caso utilizamos bolas em vez de discos (Figura 13.2.5).

Dizemos que o conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto $D$ do espaço bi ou tridimensional constitui o ***interior*** de $D$, e o conjunto de todos os pontos de fronteira constitui a ***fronteira*** de $D$. Além disso, da mesma maneira como fizemos com discos e bolas, dizemos que $D$ é ***fechado*** se contiver todos os seus pontos de fronteira e que $D$ é ***aberto*** se não contiver ponto algum de sua fronteira. O conjunto de todos os pontos do espaço bidimensional e de todos os pontos do espaço tridimensional não têm pontos de fronteira (por quê?); portanto, convencionamos que esses conjuntos são tanto abertos quanto fechados.

## LIMITES GERAIS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

A afirmação

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

tem o objetivo de transmitir a ideia de que, restringindo o ponto $(x, y)$ a estar suficientemente próximo (mas distinto) do ponto $(x_0, y_0)$, podemos forçar o valor de $f(x, y)$ a ficar tão próximo de $L$ quanto queiramos. Essa ideia é formalmente expressa na definição seguinte e é ilustrada na Figura 13.2.6.

**13.2.1 DEFINIÇÃO** Seja $f$ uma função de duas variáveis e suponha que $f$ esteja definida em todos os pontos de algum disco aberto centrado em $(x_0, y_0)$, exceto, possivelmente, em $(x_0, y_0)$. Escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \tag{3}$$

se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, pudermos encontrar um número $\delta > 0$ tal que $f(x, y)$ satisfaça

$$|f(x, y) - L| < \epsilon$$

sempre que a distância entre $(x, y)$ e $(x_0, y_0)$ satisfizer

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Quando for conveniente, podemos escrever (3) também como

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = L$$

ou como

$f(x, y)\to L$ quando $(x, y)\to(x_0, y_0)$

Outra ilustração da Definição 13.2.1 é mostrada no diagrama "de flecha" da Figura 13.2.7. Como a Figura 13.2.6, essa figura pretende transmitir a ideia de que os valores de $f(x, y)$ podem ser forçados a cair a menos de $\epsilon$ unidades de $L$ no eixo $z$ pela exigência de que $(x, y)$ esteja a menos de $\delta$ unidades de $(x_0, y_0)$ no plano $xy$. Utilizamos um ponto branco em $(x_0, y_0)$ para sugerir que a condição com épsilon não precisa valer nesse ponto.

Notamos sem prova que as propriedades padrão de limites são válidas para limites ao longo de curvas e para limites gerais de funções de duas variáveis, portanto os cálculos envolvidos em tais limites podem ser efetuados da maneira usual.

Na Figura 13.2.6, a condição

$$|f(x, y) - L| < \epsilon$$

está satisfeita em cada ponto $(x, y)$ dentro da região circular. Contudo, o fato de que essa condição também está satisfeita no centro da região circular não é relevante para o limite.

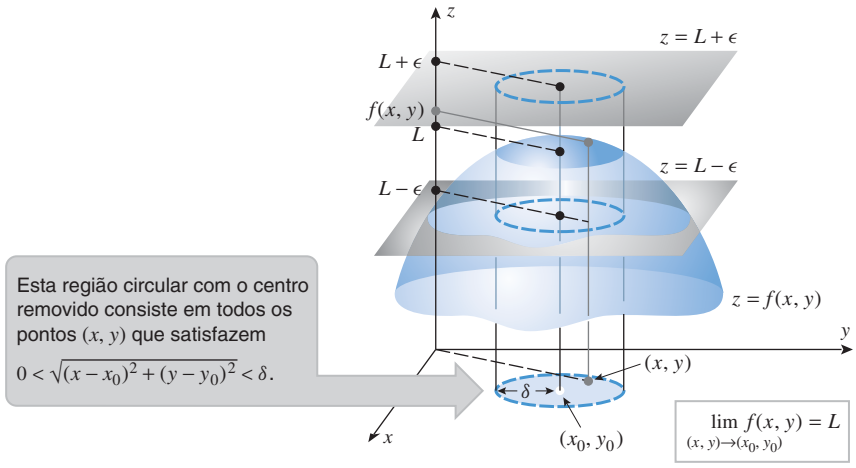



**Figura 13.2.6**

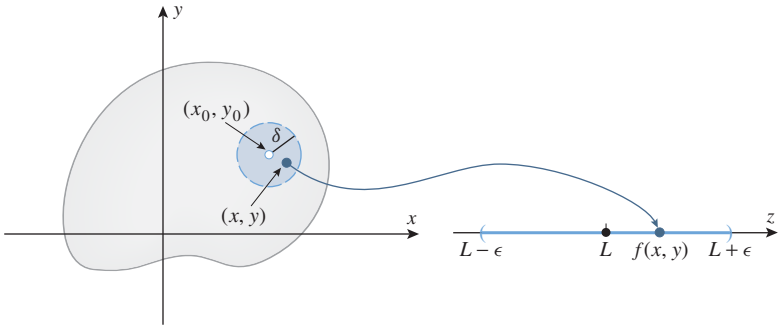



**Figura 13.2.7**

### ► Exemplo 2

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,4)} [5x^3y^2 - 9] &= \lim_{(x,y)\to(1,4)} [5x^3y^2] - \lim_{(x,y)\to(1,4)} 9 \\ &= 5\left[\lim_{(x,y)\to(1,4)} x\right]^3\left[\lim_{(x,y)\to(1,4)} y\right]^2 - 9 \\ &= 5(1)^3(4)^2 - 9 = 71 \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

## RELAÇÕES ENTRE LIMITES GERAIS E LIMITES AO LONGO DE CURVAS LISAS

Enunciado informalmente, se $f(x, y)$ tiver limite $L$ quando $(x, y)$ tender a $(x_0, y_0)$, então o valor de $f(x, y)$ fica cada vez mais próximo de $L$ à medida que a distância entre $(x, y)$ e $(x_0, y_0)$ tender a zero. Como essa afirmação não impõe restrição alguma sobre a direção pela qual $(x, y)$ se aproxima de $(x_0, y_0)$, é plausível que a função $f(x, y)$ também tenha o limite $L$ quando $(x, y)$ tender a $(x_0, y_0)$ ao longo de *qualquer* curva lisa. Isso decorre do seguinte teorema, que enunciamos sem demonstração.

**ADVERTÊNCIA**

De um modo geral, não podemos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

mostrando que esse limite vale ao longo de alguma curva específica, nem mesmo se valer para uma família específica de curvas. O problema é que poderia haver alguma outra curva ao longo da qual o limite não exista ou tenha um valor diferente de $L$ (ver Exercício 34, por exemplo).

**13.2.2 TEOREMA**

(*a*) *Se* $f(x, y) \to L$ *quando* $(x, y) \to (x_0, y_0)$, então $f(x, y) \to L$ *quando* $(x, y) \to (x_0, y_0)$ *ao longo de qualquer curva lisa.*

(*b*) *Se o limite de* $f(x, y)$ *deixar de existir quando* $(x, y) \to (x_0, y_0)$ *ao longo de alguma curva lisa, ou se* $f(x, y)$ *tiver limites diferentes quando* $(x, y) \to (x_0, y_0)$ *ao longo de duas curvas lisas diferentes, então o limite de* $f(x, y)$ *não existe quando* $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

**► Exemplo 3** O limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{xy}{x^2+y^2}$$

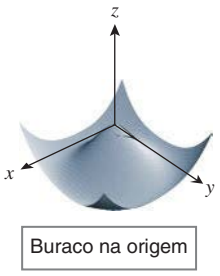
não existe, pois no Exemplo 1 encontramos duas curvas lisas diferentes ao longo das quais esse limite tem dois valores diferentes. Especificamente,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{(ao longo de } x=0)}} -\frac{xy}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{(ao longo de } y=x)}} -\frac{xy}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}$$ ◄

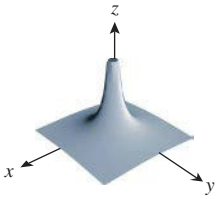
## ■ CONTINUIDADE

Informalmente enunciado, uma função de uma variável é contínua se o seu gráfico for uma curva não quebrada, sem saltos ou buracos. Para estender esta ideia para funções de duas variáveis, imagine que o gráfico de $z = f(x, y)$ esteja moldado a partir de uma fina camada de argila que tenha sido escavada ou apertada com força, criando cumes e vales. Consideraremos $f$ como sendo contínua se a superfície de argila não tiver ruptura nem buracos. As funções cujos gráficos estão na Figura 13.2.8 deixam de ser contínuas devido ao seu comportamento em (0, 0).

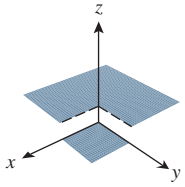
A definição precisa da continuidade em um ponto para funções de duas variáveis é análoga àquela para funções de uma variável – será necessário que o limite da função e o valor da função sejam o mesmo naquele ponto.



Buraco na origem



Infinito na origem



Salto vertical na origem

**Figura 13.2.8**

**13.2.3 DEFINIÇÃO** Dizemos que uma função $f(x, y)$ é ***contínua em*** $(x_0, y_0)$ se $f(x_0, y_0)$ estiver definido e se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Além disso, se $f$ for contínua em cada ponto de um conjunto aberto $D$, então dizemos que $f$ ***é contínua em*** $D$; e se $f$ for contínua em todo ponto do plano $xy$, então dizemos que $f$ é ***contínua em toda parte***.

O teorema seguinte, que enunciamos sem demonstração, ilustra algumas das maneiras em que funções contínuas podem ser combinadas para produzir novas funções contínuas.

**13.2.4 TEOREMA**

(*a*) *Se* $g(x)$ *for contínua em* $x_0$ *e* $h(y)$ *for contínua em* $y_0$, *então* $f(x, y) = g(x)h(y)$ *será contínua em* $(x_0, y_0)$.

(*b*) *Se* $h(x, y)$ *for contínua em* $(x_0, y_0)$ *e* $g(u)$ *for contínua em* $u = h(x_0, y_0)$, *então a composição* $f(x, y) = g(h(x, y))$ *será contínua em* $(x_0, y_0)$.

(*c*) *Se* $f(x, y)$ *for contínua em* $(x_0, y_0)$ *e* $x(t)$ *e* $y(t)$ *forem contínuas em* $t_0$, *com* $x(t_0) = x_0$ *e* $y(t_0) = y_0$, *então a composição* $f(x(t), y(t))$ *será contínua em* $t_0$.

**► Exemplo 4** Use o Teorema 13.2.4 para mostrar que as funções $f(x, y) = 3x^2y^5$ e $f(x, y) = \text{sen}(3x^2y^5)$ são contínuas em toda parte.

***Solução*** Os polinômios $g(x) = 3x^2$ e $h(y) = y^5$ são contínuos em cada ponto da reta real; portanto, pela parte (*a*) do Teorema 13.2.4, a função $f(x, y) = 3x^2y^5$ é contínua em cada ponto $(x, y)$ do plano $xy$. Como $3x^2y^5$ é contínua em cada ponto do plano $xy$ e sen $u$ é contínua em cada ponto $u$ da reta real, segue da parte (*b*) do Teorema 13.2.4 que a composição $f(x, y) = \text{sen}\,(3x^2y^5)$ é contínua em toda parte. ◄

O Teorema 13.2.4 é um de uma classe inteira de teoremas sobre continuidade de funções de duas ou mais variáveis. O conteúdo desses teoremas pode ser resumido informalmente com três princípios básicos:

***Reconhecendo Funções Contínuas***

- A composição de funções contínuas é contínua.
- A soma, a diferença ou o produto de funções contínuas são contínuos.
- O quociente de funções contínuas é contínuo, exceto onde o denominador for zero.

Usando esses princípios e o Teorema 13.2.4, o leitor deve ser capaz de confirmar que as seguintes funções são todas contínuas em toda parte.

$$xe^{xy} + y^{2/3}, \quad \cosh(xy^3) - |xy|, \quad \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

**► Exemplo 5** Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

***Solução*** Como $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ é contínua em $(-1, 2)$ (por quê?), segue da definição de continuidade para funções de duas variáveis que

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{(-1)(2)}{(-1)^2 + (2)^2} = -\frac{2}{5} \quad \blacktriangleleft$$

**► Exemplo 6** Como a função

$$f(x, y) = \frac{x^3y^2}{1 - xy}$$

é um quociente de funções contínuas, é contínuo exceto onde $1 - xy = 0$. Assim, $f(x, y)$ é contínua em toda parte exceto na hipérbole $xy = 1$. ◄

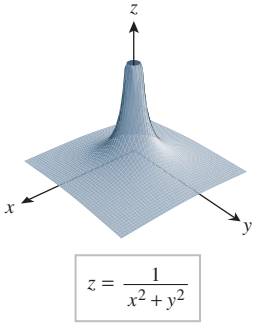



**Figura 13.2.9**

## LIMITES EM DESCONTINUIDADES

Às vezes, é fácil reconhecer quando um limite não existe. Por exemplo, é evidente que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$$

o que implica que os valores da função tendem a $+\infty$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de qualquer curva lisa (Figura 13.2.9). Contudo, não é evidente se o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$$

existe, pois está na forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. Embora a regra de L'Hôpital não possa ser aplicada diretamente, o seguinte exemplo ilustra um método para encontrar esse limite convertendo-o para coordenadas polares.

**► Exemplo 7** Determine $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$.

***Solução*** Sejam $(r, \theta)$ as coordenadas polares do ponto $(x, y)$ com $r \geq 0$. Então, temos

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Além disso, uma vez que $r \geq 0$, temos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, de modo que $r \to 0^+$ se, e somente se, $(x, y) \to (0, 0)$. Assim, podemos reescrever o limite dado como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2) = \lim_{r\to 0^+} r^2 \ln r^2$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{2\ln r}{1/r^2}$$

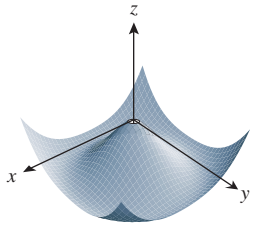
Isso converte o limite para uma forma indeterminada do tipo $\infty/\infty$.

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{2/r}{-2/r^3}$$

Regra de L'Hopital.

$$= \lim_{r\to 0^+} (-r^2) = 0 \quad \blacktriangleleft$$

**OBSERVAÇÃO** O gráfico de $f(x, y) = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$ no Exemplo 7 é uma superfície com um buraco, ou furo, na origem (Figura 13.2.10). Podemos remover essa descontinuidade *definindo* $f(0, 0)$ como sendo igual a 0. (Ver Exercícios 39 e 40, que também tratam da noção de descontinuidade "removível".)

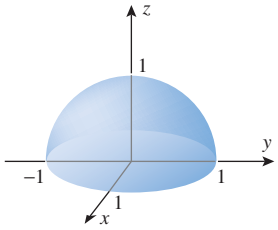



$z = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

**Figura 13.2.10**

## CONTINUIDADE EM PONTOS DE FRONTEIRA

Em nosso estudo de continuidade de funções de uma variável, definimos primeiramente a continuidade em um ponto, depois a continuidade em intervalos abertos e, então, usando limites laterais, estendemos a noção de continuidade para incluir os pontos nas extremidades do intervalo. Analogamente, para funções de duas variáveis, podemos estender a noção de continuidade de $f(x, y)$ para a fronteira de seu domínio, modificando apropriadamente a Definição 13.2.1, de tal modo que $(x, y)$ seja forçado a aproximar $(x_0, y_0)$ somente por pontos que estejam completamente no domínio de $f$. Omitiremos os detalhes.




$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

**Figura 13.2.11**

**► Exemplo 8** O gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ é o hemisfério superior mostrado na Figura 13.2.11, e o domínio natural de $f$ é o disco unitário fechado

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

O gráfico de $f$ não apresenta cortes nem buracos, de modo que passa no nosso "teste intuitivo" de continuidade. Nesse caso, a continuidade em um ponto $(x_0, y_0)$ da fronteira reflete o fato de que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2} = 0$$

quando $(x, y)$ fica restrito a pontos do disco unitário fechado $x^2 + y^2 \leq 1$. Segue que $f$ é contínua em seu domínio. ◄

## EXTENSÕES PARA TRÊS VARIÁVEIS

Todos os resultados nesta seção podem ser estendidos para funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, a distância entre os pontos $(x, y, z)$ e $(x_0, y_0, z_0)$ no espaço tridimensional é

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

logo, a extensão natural da Definição 13.2.1 para o espaço tridimensional é:

**13.2.5 DEFINIÇÃO** Seja $f$ uma função de três variáveis e suponha que $f$ esteja definida em todos os pontos dentro de uma bola centrada em $(x_0, y_0, z_0)$, exceto, possivelmente, em $(x_0, y_0, z_0)$. Escrevemos

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L \tag{4}$$

se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, pudermos encontrar um número $\delta > 0$ tal que $f(x, y, z)$ satisfaça

$$|f(x, y, z) - L| < \epsilon$$

sempre que a distância entre $(x, y, z)$ e $(x_0, y_0, z_0)$ satisfizer

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

Da mesma forma que ocorre com as funções de uma ou duas variáveis, definimos uma função $f(x, y, z)$ de três variáveis como sendo contínua em um ponto $(x_0, y_0, z_0)$ se o limite da função e o valor da função forem o mesmo neste ponto, isto é,

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

Embora os detalhes sejam omitidos, as propriedades de limites e de continuidade que foram discutidas para funções de duas variáveis, inclusive a noção de continuidade em pontos de fronteira, podem ser transportadas para funções de três variáveis.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.2 (Ver página 927 para respostas.)

**1.** Seja

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Determine o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y)$ tende a $(0, 0)$ ao longo da curva $C$.

(a) $C : x = 0$ (b) $C : y = 0$

(c) $C : y = x$ (d) $C : y = x^2$

**2.** (a) $\lim_{(x,y)\to(3,2)} x \cos \pi y =$ _____

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{xy^2} =$ _____

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) =$ _____

**3.** Uma função $f(x, y)$ é contínua em $(x_0, y_0)$ desde que $f(x_0, y_0)$ exista e que $f(x, y)$ tenha um limite igual a _____ quando $(x, y)$ tende a _____.

**4.** Determine todos os valores da constante $a$ tais que a função $f(x, y) = \sqrt{x^2 - ay^2 + 1}$ seja contínua em toda parte.

## EXERCÍCIOS 13.2

**1-6** Use as leis do limite e as propriedades da continuidade para calcular o limite. ■

**1.** $\lim_{(x,y)\to(1,3)} (4xy^2 - x)$

**2.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x - y}{\operatorname{sen} y - 1}$

**3.** $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy^3}{x + y}$

**4.** $\lim_{(x,y)\to(1,-3)} e^{2x-y^2}$

**5.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1 + x^2y^3)$

**6.** $\lim_{(x,y)\to(4,-2)} x\sqrt[3]{y^3 + 2x}$

**7-8** Mostre que o limite não existe considerando os limites quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo dos eixos coordenados. ■

**7.** (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{x^2 + 2y^2}$ (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + y}{2x^2 + y^2}$

**8.** (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{x^2 + y^2}$ (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos xy}{x^2 + y^2}$

**9-12** Calcule o limite fazendo a substituição $z = x^2 + y^2$ e observando que $z \to 0^+$ se, e somente se, $(x, y) \to (0, 0)$. ■

**9.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

**10.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

**11.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-1/(x^2+y^2)}$

**12.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-1/\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

**13-22** Determine se o limite existe. Se existir, determine seu valor. ■

**13.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

**14.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 16y^4}{x^2 + 4y^2}$

**15.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}$

**16.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

**17.** $\lim_{(x,y,z)\to(2,-1,2)} \frac{xz^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

**18.** $\lim_{(x,y,z)\to(2,0,-1)} \ln(2x + y - z)$

**19.** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

**20.** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2}$

**21.** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

**22.** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right]$

**23-26** Calcule o limite, se existir, convertendo para coordenadas polares, como no Exemplo 7. ■

**23.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2)$

**24.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \ln(x^2 + y^2)$

**25.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

**26.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$

**27-28** Calcule o limite, se existir, convertendo para coordenadas esféricas, $(\rho, \theta, \phi)$ e observe que $\rho \to 0^+$ se, e só se, $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$. ■

**27.** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

**28.** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}}$

**29-32** Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**29.** Se $D$ for um conjunto aberto do plano ou do espaço, então cada ponto de $D$ será um ponto interior de $D$.

**30.** Se $f(x, y)\to L$ quando $(x, y)$ tender a $(0, 0)$ ao longo do eixo $x$ e se $f(x, y)\to L$ quando $(x, y)$ tender a $(0, 0)$ ao longo do eixo $y$, então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L$.

**31.** Se $f$ e $g$ forem funções de duas variáveis tais que $f + g$ e $fg$ sejam ambas contínuas, então ambas as funções, $f$ e $g$, serão contínuas.

**32.** Se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L \neq 0$, então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{f(x^2+y^2)} = 0$$

## ENFOCANDO CONCEITOS

**33.** A figura a seguir mostra uma parte do gráfico de

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

(a) Baseado no gráfico da figura, $f(x, y)$ tem limite quando $(x, y) \to (0, 0)$? Explique seu raciocínio.

(b) Mostre que $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de qualquer reta $y = mx$. Isso implica que $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0,0)$? Explique.

(c) Mostre que $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \to (0,0)$ ao longo da parábola $y = x^2$ e confirme visualmente que isso é consistente com o gráfico de $f(x, y)$.

(d) Baseado nas partes (b) e (c), $f(x, y)$ tem um limite quando $(x, y) \to (0, 0)$? Isso é consistente com a resposta da parte (a)?

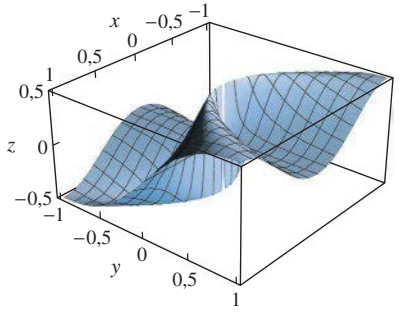



**Figura Ex-33**

**34.** (a) Mostre que o valor de

$$\frac{x^3 y}{2x^6+y^2}$$

tende a 0 quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de qualquer reta $y = mx$ ou ao longo de qualquer parábola $y = kx^2$.

(b) Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{2x^6+y^2}$$

não existe, tomando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo da curva $y = x^3$.

**35.** (a) Mostre que o valor de

$$\frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$$

tende a 0 quando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ ao longo de qualquer reta $x = at$, $y = bt$, $z = ct$.

(b) Mostre que o limite

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$$

não existe tomando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ ao longo da curva $x = t^2$, $y = t$, $z = t$.

**36.** Determine $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{x^2+1}{x^2+(y-1)^2}\right]$.

**37.** Determine $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{x^2-1}{x^2+(y-1)^2}\right]$.

**38.** Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Mostre que $f$ é contínua em $(0, 0)$.

**39-40** Dizemos que uma função $f(x, y)$ tem uma ***descontinuidade removível*** em $(x_0, y_0)$ se existir $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ mas $f$ não for contínua em $(x_0, y_0)$, ou por não estar definida em $(x_0, y_0)$ ou por que $f(x_0, y_0)$ difere do valor do limite. Determine se $f(x, y)$ tem uma descontinuidade removível em $(0, 0)$. ■

**39.** $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

**40.** $f(x, y) = \begin{cases} x^2+7y^2, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ -4, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

**41-48** Esboce a maior região na qual a função $f$ é contínua. ■

**41.** $f(x, y) = y \ln(1 + x)$

**42.** $f(x, y) = \sqrt{x-y}$

**43.** $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$

**44.** $f(x, y) = \ln(2x - y + 1)$

**45.** $f(x, y) = \dfrac{y}{11x^2+3}$

**46.** $f(x, y) = e^{1-xy}$

**47.** $f(x, y) = \operatorname{arc\,sen}(x\,y)$

**48.** $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(x - y)$

**49-52** Descreva a maior região na qual a função $f$ é contínua. ■

**49.** $f(x, y, z) = 3x^2 e^{yz} \cos(xyz)$

**50.** $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$

**51.** $f(x, y, z) = \dfrac{y+1}{x^2+z^2-1}$

**52.** $f(x, y, z) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2+3z^2}$

**53.** **Texto** Descreva o procedimento que poderíamos usar para determinar se existe ou não o limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$

**54.** **Texto** Com suas próprias palavras, dê a interpretação geométrica da definição $\epsilon$ e $\delta$ de

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

dada na Definição 13.2.1.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.2

**1.** (a) $-1$ (b) 1 (c) 0 (d) 1 **2.** (a) 3 (b) 1 (c) 0 **3.** $f(x_0, y_0)$; $(x_0, y_0)$ **4.** $a \leq 0$

# 13.3 DERIVADAS PARCIAIS

*Nesta seção, desenvolveremos as ferramentas matemáticas para estudar taxas de variação que envolvam duas ou mais variáveis independentes.*

### DERIVADAS PARCIAIS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Se $z = f(x, y)$, então é possível indagar como os valores de $z$ variam se $x$ for mantido fixado e a $y$ for permitido variar ou se $y$ for mantido fixado e a $x$ for permitido variar. Por exemplo, a lei dos gases ideais da Física afirma que, sob condições apropriadas, a pressão exercida por um gás é uma função do volume do gás e sua temperatura. Assim, um físico estudando gases poderia estar interessado na taxa de variação da pressão se o volume for mantido fixado e à temperatura for permitido variar ou se a temperatura for mantida fixada e ao volume for permitido variar. Passamos a definir uma derivada que descreva tais taxas de variação.

Suponha que $(x_0, y_0)$ seja um ponto do domínio de uma função $f(x, y)$. Se fixarmos $y = y_0$, então $f(x, y_0)$ é uma função apenas da variável $x$. O valor da derivada

$$\frac{d}{dx}[f(x, y_0)]$$

em $x_0$ dá, portanto, uma medida da taxa de variação instantânea de $f$ em relação a $x$ no ponto $(x_0, y_0)$. Analogamente, o valor da derivada

$$\frac{d}{dy}[f(x_0, y)]$$

em $y_0$ dá uma medida da taxa de variação instantânea de $f$ em relação a $y$ no ponto $(x_0, y_0)$. Essas derivadas são tão importantes no estudo do Cálculo Diferencial de funções a várias variáveis que têm seu próprio nome e notação.

**13.3.1** **DEFINIÇÃO** Se $z = f(x, y)$ e $(x_0, y_0)$ é um ponto no domínio de $f$, então a ***derivada parcial de f em relação a x*** em $(x_0, y_0)$ [também chamada de ***derivada parcial de z em relação a x*** em $(x_0, y_0)$] é a derivada em $x_0$ da função que resulta quando $y = y_0$ for mantido fixo e a $x$ for permitido variar. Essa derivada parcial é denotada por $f_x(x_0, y_0)$ e é dada por

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}[f(x, y_0)]\bigg|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

Analogamente, a ***derivada parcial de f em relação a y*** em $(x_0, y_0)$ [também chamada de ***derivada parcial de z em relação a y*** em $(x_0, y_0)$] é a derivada em $y_0$ da função que resulta quando $x = x_0$ for mantido fixo e a $y$ for permitido variar. Essa derivada parcial é denotada por $f_y(x_0, y_0)$ e é dada por

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}[f(x_0, y)]\bigg|_{y=y_0} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{2}$$

Os limites em (1) e (2) mostram a relação entre as derivadas parciais e as derivadas de funções de uma variável. Na prática, nosso método usual de calcular derivadas parciais é manter uma variável fixa e, então, derivar a função resultante usando as regras de derivação de funções de uma variável.

**▶ Exemplo 1** Encontre $f_x(1, 3)$ e $f_y(1, 3)$ para a função $f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$.

***Solução*** Como

$$f_x(x, 3) = \frac{d}{dx}[f(x, 3)] = \frac{d}{dx}[18x^3 + 4x + 6] = 54x^2 + 4$$

temos $f_x(1, 3) = 54 + 4 = 58$. Também, como

$$f_y(1, y) = \frac{d}{dy}[f(1, y)] = \frac{d}{dy}[2y^2 + 2y + 4] = 4y + 2$$

temos $f_y(1, 3) = 4(3) + 2 = 14$. ◀

## AS FUNÇÕES DERIVADAS PARCIAIS

As Fórmulas (1) e (2) definem as derivadas parciais de uma função em um ponto $(x_0, y_0)$ específico. Contudo, muitas vezes será desejável omitir os subscritos e pensar nas derivadas parciais como funções das variáveis $x$ e $y$. Essas funções são

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

O exemplo seguinte apresenta uma maneira alternativa de fazer as contas do Exemplo 1.

**▶ Exemplo 2** Encontre $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ se $f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$ e use essas derivadas parciais para calcular $f_x(1, 3)$ e $f_y(1, 3)$.

***Solução*** Mantendo $y$ fixo e derivando em relação a $x$, obtemos

$$f_x(x, y) = \frac{d}{dx}[2x^3y^2 + 2y + 4x] = 6x^2y^2 + 4$$

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Os sistemas algébricos computacionais têm comandos especiais para calcular derivadas parciais. Se o leitor dispuser de um CAS, use-o para encontrar as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ do Exemplo 2.

e mantendo $x$ fixo e derivando em relação a $y$, obtemos

$$f_y(x, y) = \frac{d}{dy}[2x^3y^2 + 2y + 4x] = 4x^3y + 2$$

Assim,

$$f_x(1, 3) = 6(1^2)(3^2) + 4 = 58 \quad \text{e} \quad f_y(1, 3) = 4(1^3)3 + 2 = 14$$

o que está de acordo com os resultados no Exemplo 1. ◀

## NOTAÇÃO DE DERIVADA PARCIAL

O símbolo $\partial$ é chamado de sinal da derivada parcial e é derivado do alfabeto cirílico.

Se $z = f(x, y)$, então as derivadas parciais $f_x$ e $f_y$ são também denotadas pelos símbolos

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Algumas notações típicas para as derivadas parciais de $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0)$ são

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0, y=y_0}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

**► Exemplo 3** Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se $z = x^4 \operatorname{sen}(xy^3)$.

***Solução***

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^4 \operatorname{sen}(xy^3)] = x^4 \frac{\partial}{\partial x}[\operatorname{sen}(xy^3)] + \operatorname{sen}(xy^3) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^4)$$
$$= x^4 \cos(xy^3) \cdot y^3 + \operatorname{sen}(xy^3) \cdot 4x^3 = x^4 y^3 \cos(xy^3) + 4x^3 \operatorname{sen}(xy^3)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^4 \operatorname{sen}(xy^3)] = x^4 \frac{\partial}{\partial y}[\operatorname{sen}(xy^3)] + \operatorname{sen}(xy^3) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^4)$$
$$= x^4 \cos(xy^3) \cdot 3xy^2 + \operatorname{sen}(xy^3) \cdot 0 = 3x^5 y^2 \cos(xy^3) \quad \blacktriangleleft$$

## DERIVADAS PARCIAIS VISTAS COMO TAXAS DE VARIAÇÃO E INCLINAÇÕES

Lembre-se de que, se $y = f(x)$, então o valor de $f'(x_0)$ pode ser interpretado ou como a taxa de variação de $y$ em relação a $x$ no ponto $x_0$ ou a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $x_0$. As derivadas parciais têm interpretações análogas. Para ver isso, suponha que $C_1$ seja a interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $y = y_0$ e que $C_2$ seja sua interseção com o plano $x = x_0$ (Figura 13.3.1). Assim, $f_x(x, y_0)$ pode ser interpretada como a taxa de variação de $z$ em relação a $x$ ao longo da curva $C_1$ e $f_y(x_0, y)$ pode ser interpretada como a taxa de variação de $z$ em relação a $y$ ao longo da curva $C_2$. Em particular, $f_x(x_0, y_0)$ é a taxa de variação de $z$ em relação a $x$ ao longo da curva $C_1$ no ponto $(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ é a taxa de variação de $z$ em relação a $y$ ao longo da curva $C_2$ no ponto $(x_0, y_0)$.

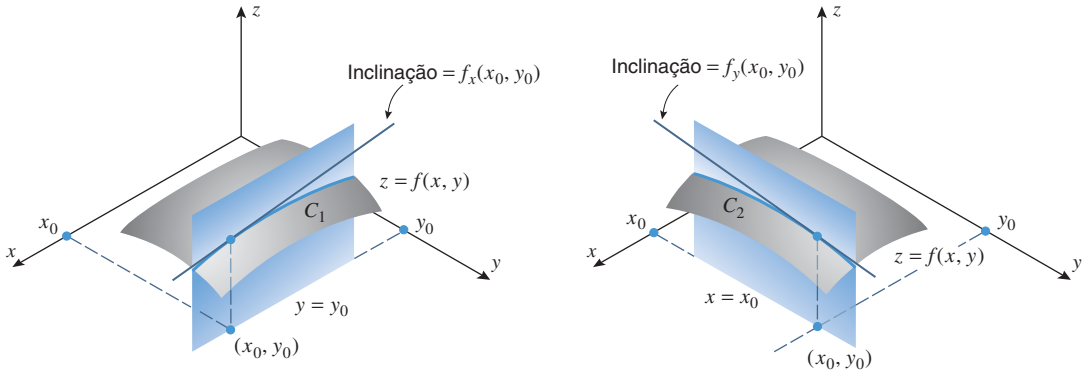



**Figura 13.3.1**

Em problemas concretos, devemos acompanhar a interpretação de $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ pelas unidades correspondentes. Veja o Exemplo 4.

**► Exemplo 4** Lembre que o índice de sensação térmica é dado pela fórmula

$$W = 35{,}74 + 0{,}6215T + (0{,}4275T - 35{,}75)v^{0{,}16}$$

Calcule a derivada parcial de $W$ em relação a $v$ no ponto $(T, v) = (25, 10)$ e interprete essa derivada parcial como uma taxa de variação.

***Solução*** Mantendo $T$ fixo e derivando em relação a $v$, obtemos

$$\frac{\partial W}{\partial v}(T, v) = 0 + 0 + (0{,}4275T - 35{,}75)(0{,}16)v^{0{,}16-1} = (0{,}4275T - 35{,}75)(0{,}16)v^{-0{,}84}$$

Confirme a conclusão do Exemplo 4 calculando

$$\frac{W(25, 10 + \Delta v) - W(25, 10)}{\Delta v}$$

com valores de $\Delta v$ perto de 0.

Como $W$ é dado em graus Fahrenheit e $v$, em milhas por hora, as unidades de uma taxa de variação de $W$ em relação a $v$ são °F/(milhas/hora) (que também podemos escrever como °F·h/milhas). Substituindo $T = 25$ e $v = 10$, temos

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) = (-4{,}01)10^{-0{,}84} \approx -0{,}58 \ \frac{^\circ\text{F}}{\text{milhas/h}}$$

como a taxa de variação instantânea de $W$ em relação a $v$ no ponto $(T, v) = (25, 10)$. Concluímos que se a temperatura do ar permanecer constante em 25°F e a velocidade do vento mudar um pouco a partir de uma velocidade inicial de 10 milhas por hora, então a razão da variação do índice de sensação térmica pela variação da velocidade do vento deveria ser de aproximadamente −0,58°F/(milhas/hora). ◄

Geometricamente, $f_x(x_0, y_0)$ pode ser vista como a inclinação da reta tangente à curva $C_1$ no ponto $(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ pode ser vista como a inclinação da reta tangente à curva $C_2$ no ponto $(x_0, y_0)$ (Figura 13.3.1). Diremos que $f_x(x_0, y_0)$ é a ***inclinação da superfície na direção x*** em $(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$, a ***inclinação da superfície na direção y*** em $(x_0, y_0)$.

► **Exemplo 5** Seja $f(x, y) = x^2y + 5y^3$.

(a) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção $x$ no ponto $(1, -2)$.

(b) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção $y$ no ponto $(1, -2)$.

***Solução (a)*** Derivando $f$ em relação a $x$ com $y$ fixo, obtemos

$$f_x(x, y) = 2xy$$

Assim, a inclinação na direção $x$ é $f_x(1, -2) = -4$, isto é, $z$ está decrescendo a uma taxa de 4 unidades a cada unidade de crescimento de $x$.

***Solução (b)*** Derivando $f$ em relação a $y$ com $x$ fixo, obtemos

$$f_y(x, y) = x^2 + 15y^2$$

Assim, a inclinação na direção $y$ é $f_y(1, -2) = 61$, isto é, $z$ está crescendo a uma taxa de 61 unidades a cada unidade de crescimento de $y$. ◄

## OBTENDO DERIVADAS PARCIAIS APROXIMADAS DE TABELAS

Para funções dadas por meio de tabelas, podemos estimar as derivadas parciais usando entradas adjacentes da tabela.

**Tabela 13.3.1**

| VELOCIDADE DO VENTO $v$ (milhas/h) \ TEMPERATURA $T$ (°F) | 20 | 25 | 30 | 35 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 13 | 19 | 25 | 31 |
| 10 | 9 | 15 | 21 | 27 |
| 15 | 6 | 13 | 19 | 25 |
| 20 | 4 | 11 | 17 | 24 |

► **Exemplo 6** Use os valores da função índice de sensação térmica $W(T, v)$ dados na Tabela 13.3.1 para estimar a derivada parcial de $W$ em relação a $v$ no ponto $(T, v) = (25, 10)$. Compare essa estimativa ao valor da derivada parcial obtida no Exemplo 4.

***Solução*** Como

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - W(25, 10)}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{W(25, 10 + \Delta v) - 15}{\Delta v}$$

podemos aproximar a derivada parcial por

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) \approx \frac{W(25, 10 + \Delta v) - 15}{\Delta v}$$

Com $\Delta v = 5$, essa aproximação é

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) \approx \frac{W(25, 10 + 5) - 15}{5} = \frac{W(25, 15) - 15}{5} = \frac{13 - 15}{5} = -\frac{2}{5} \ \frac{^\circ\text{F}}{\text{mi/h}}$$

e com $\Delta v = -5$, é

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) \approx \frac{W(25, 10-5) - 15}{-5} = \frac{W(25, 5) - 15}{-5} = \frac{19 - 15}{-5} = -\frac{4}{5}\ \frac{^\circ\text{F}}{\text{mi/h}}$$

Consideremos a média dessas duas aproximações, $-\frac{3}{5} = -0{,}6^\circ\text{F}/(\text{milhas/hora})$, como nossa estimativa de $(\partial W/\partial v)(25, 10)$. Isso está próximo do valor

$$\frac{\partial W}{\partial v}(25, 10) = (-4{,}01)10^{-0{,}84} \approx -0{,}58\ \frac{^\circ\text{F}}{\text{mi/h}}$$

encontrado do Exemplo 4. ◄

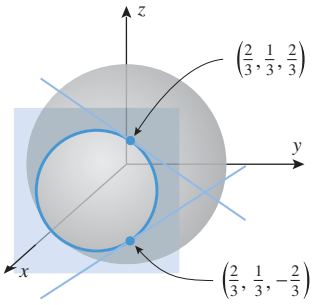



**Figura 13.3.2**

## ■ DERIVAÇÃO PARCIAL IMPLÍCITA

► **Exemplo 7** Determine a inclinação da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ na direção $y$ nos pontos $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ (Figura 13.3.2).

***Solução*** O ponto $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ situa-se no hemisfério superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, e o ponto $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ situa-se no hemisfério inferior $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Poderíamos encontrar as inclinações derivando cada expressão para $z$ separadamente em relação a $y$ e, então, calcular as derivadas em $x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{1}{3}$. Contudo, é mais eficiente derivar a equação dada

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

implicitamente em relação a $y$, uma vez que isso nos dará ambas as inclinações com uma diferenciação. Para efetuar a derivação implícita, vemos $z$ como uma função de $x$ e $y$ e derivamos ambos os lados em relação a $y$, mantendo $x$ fixo. Os cálculos são:

$$\frac{\partial}{\partial y}[x^2 + y^2 + z^2] = \frac{\partial}{\partial y}[1]$$

$$0 + 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

Substituindo as coordenadas $y$ e $z$ dos pontos $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ nessa expressão, vemos que a inclinação no ponto $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é $-\frac{1}{2}$ e a inclinação no ponto $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ é $\frac{1}{2}$. ◄

Verifique o resultado obtido no Exemplo 7 derivando as funções

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

e

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

diretamente.

► **Exemplo 8** Suponha que $D = \sqrt{x^2 + y^2}$ seja o comprimento da diagonal de um retângulo cujos lados têm comprimentos $x$ e $y$ que podem variar. Determine uma fórmula para a taxa de variação de $D$ em relação a $x$ se $x$ varia com $y$ considerado constante e use essa fórmula para determinar a taxa de variação de $D$ em relação a $x$ no ponto em que $x = 3$ e $y = 4$.

***Solução*** Derivando ambos os lados da equação $D^2 = x^2 + y^2$ em relação a $x$, obtemos

$$2D\frac{\partial D}{\partial x} = 2x \quad \text{e, assim,} \quad D\frac{\partial D}{\partial x} = x$$

Como $D = 5$ quando $x = 3$ e $y = 4$, segue que

$$5\left.\frac{\partial D}{\partial x}\right|_{x=3, y=4} = 3 \quad \text{ou} \quad \left.\frac{\partial D}{\partial x}\right|_{x=3, y=4} = \frac{3}{5}$$

Assim, $D$ está crescendo a uma taxa de $\frac{3}{5}$ unidades por aumento de unidade de $x$ no ponto $(3, 4)$. ◄

## DERIVADAS PARCIAIS E CONTINUIDADE

Contrastando com o caso de funções de uma única variável, a existência de derivadas parciais de funções de várias variáveis não garante a continuidade da função. Esse fato é exibido no exemplo seguinte.

**► Exemplo 9** Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \tag{3}$$

(a) Mostre que $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ existem em todos os pontos $(x, y)$.

(b) Explique por que $f$ não é contínua em $(0, 0)$.

***Solução (a)*** A Figura 13.3.3 mostra o gráfico de $f$. Note que $f$ é parecida com a função considerada no Exemplo 1 da Seção 13.2, exceto que agora associamos a $f$ o valor 0 em $(0, 0)$. Exceto nesse ponto, as derivadas parciais de $f$ são

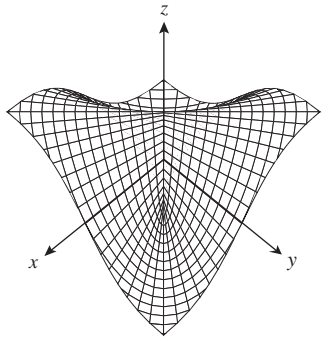



**Figura 13.3.3**

$$f_x(x, y) = -\frac{(x^2 + y^2)y - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y - y^3}{(x^2 + y^2)^2} \tag{4}$$

$$f_y(x, y) = -\frac{(x^2 + y^2)x - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{xy^2 - x^3}{(x^2 + y^2)^2} \tag{5}$$

Não é evidente da Fórmula (3) se $f$ tem derivadas parciais em $(0, 0)$ e, caso afirmativo, quais os valores dessas derivadas. Para responder a essa questão, teremos de usar as definições das derivadas parciais (Definição 13.3.1). Aplicando as Fórmulas (1) e (2) a (3), obtemos

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

Isso mostra que $f$ tem derivadas parciais em $(0, 0)$ e os valores de ambas as derivadas parciais são 0 nesse ponto.

***Solução (b)*** Vimos no Exemplo 3 da Seção 13.2 que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

não existe. Assim, $f$ não é contínua em $(0, 0)$. ◄

Na próxima seção, abordaremos a relação entre a continuidade de uma função e as propriedades de suas derivadas parciais.

## DERIVADAS PARCIAIS DE FUNÇÕES COM MAIS DE DUAS VARIÁVEIS

Para uma função $f(x, y, z)$ de três variáveis, há três ***derivadas parciais***:

$$f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)$$

A derivada parcial $f_x$ é calculada mantendo $y$ e $z$ constantes e derivando em relação a $x$. Para $f_y$ as variáveis $x$ e $z$ mantêm-se constantes, e para $f_z$ as variáveis $x$ e $y$ são mantidas constantes. Se uma variável dependente

$$w = f(x, y, z)$$

for usada, então as três derivadas parciais de $f$ podem ser denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

**► Exemplo 10** Se $f(x, y, z) = x^3y^2z^4 + 2xy + z$, então

$$f_x(x, y, z) = 3x^2y^2z^4 + 2y$$
$$f_y(x, y, z) = 2x^3yz^4 + 2x$$
$$f_z(x, y, z) = 4x^3y^2z^3 + 1$$
$$f_z(-1, 1, 2) = 4(-1)^3(1)^2(2)^3 + 1 = -31 \quad \blacktriangleleft$$

**► Exemplo 11** Se $f(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \cos\phi \operatorname{sen}\theta$, então

$$f_\rho(\rho, \theta, \phi) = 2\rho \cos\phi \operatorname{sen}\theta$$
$$f_\theta(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \cos\phi \cos\theta$$
$$f_\phi(\rho, \theta, \phi) = -\rho^2 \operatorname{sin}\phi \operatorname{sen}\theta \quad \blacktriangleleft$$

Em geral, se $f(v_1, v_2, v_3,..., v_n)$ for uma função de $n$ variáveis, haverá $n$ derivadas parciais de $f$, cada uma das quais sendo obtida fixando $n - 1$ variáveis e derivando a função em relação à variável que não foi fixada. Se $w = f(v_1, v_2,..., v_n)$, então essas derivadas parciais são denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial v_1}, \frac{\partial w}{\partial v_2}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial v_n}$$

onde $\partial w/\partial v_i$ é obtida fixando todas as variáveis exceto $v_i$ e derivando em relação a $v_i$.

## ■ DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

Suponha que $f$ seja uma função de duas variáveis $x$ e $y$. Como as derivadas parciais $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ também são funções de $x$ e $y$, essas funções podem, elas mesmas, ter derivadas parciais. Isso origina quatro possíveis derivadas parciais ***de segunda ordem*** de $f$, que são definidas por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}$$

Derivando duas vezes em relação a $x$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}$$

Derivando duas vezes em relação a $y$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}$$

Derivando primeiramente em relação a $x$ e, então, em relação a $y$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$$

Derivando primeiramente em relação a $y$ e, então, em relação a $x$.

Os dois últimos casos são denominados ***derivadas parciais de segunda ordem mistas***. Além disso, as derivadas $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ são chamadas frequentemente de ***derivadas parciais de primeira ordem***, quando for necessário distingui-las das derivadas parciais de ordem superior. Convenções análogas se aplicam a derivadas parciais de segunda ordem de uma função de três variáveis.

**ADVERTÊNCIA** Observe que as duas notações para as parciais de segunda ordem mistas têm convenção oposta quanto à ordem de diferenciação. Na notação "$\partial$", as derivadas são feitas da direita para a esquerda e, na notação "subscrito", elas são tomadas da esquerda para a direita. Contudo, a convenção faz sentido se inserirmos os parênteses:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Da direita para a esquerda. Derivando dentro dos parênteses primeiro.

$$f_{xy} = (f_x)_y$$

Da esquerda para a direita. Derivando dentro dos parênteses primeiro.

▶ **Exemplo 12** Determine as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x, y) = x^2y^3 + x^4y$.

***Solução*** Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 4x^3y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + x^4$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3 + 4x^3y) = 2y^3 + 12x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + x^4) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + x^4) = 6xy^2 + 4x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 + 4x^3y) = 6xy^2 + 4x^3 \quad \blacktriangleleft$$

As derivadas parciais de terceira ordem, de quarta ordem e de ordens superiores podem ser obtidas derivando sucessivamente. Algumas possibilidades são

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = f_{xxx} \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right) = f_{yyyy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = f_{xyy} \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\right) = f_{xxyy}$$

▶ **Exemplo 13** Seja $f(x, y) = y^2e^x + y$. Determine $f_{xyy}$.

***Solução***

$$f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2e^x) = \frac{\partial}{\partial y}(2ye^x) = 2e^x \quad \blacktriangleleft$$

Se $f$ for uma função de três variáveis, então o análogo do Teorema 13.3.2 vale para cada par de derivadas parciais de segunda ordem mistas se trocarmos "disco aberto" por "bola aberta". Quantas derivadas parciais de segunda ordem possuem uma função $f(x, y, z)$?

## ■ IGUALDADE DAS PARCIAIS MISTAS

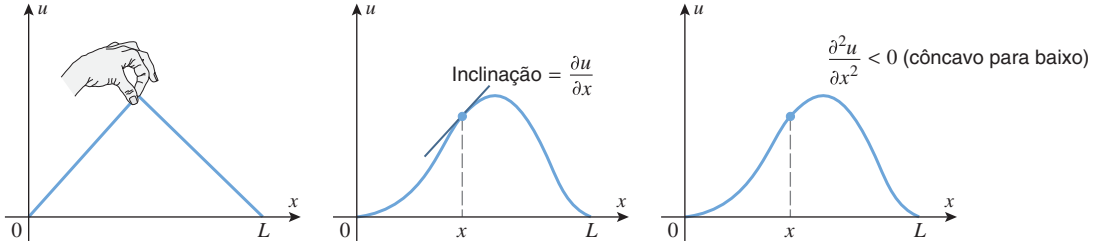
Poderíamos esperar que uma função $f(x, y)$ tivesse quatro derivadas parciais de segunda ordem distintas: $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}$ e $f_{yy}$. Contudo, observe que as derivadas parciais de segunda ordem mistas no Exemplo 12 são iguais. O teorema a seguir (demonstrado em cursos avançados) explica o motivo dessa igualdade.

**13.3.2 TEOREMA** *Seja $f$ uma função de duas variáveis. Se $f_{xy}$ e $f_{yx}$ forem contínuas em algum disco aberto, então $f_{xy} = f_{yx}$ nesse disco.*

Segue desse teorema que se $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ forem contínuas em toda parte, então $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ com quaisquer valores de $x$ e $y$. Como os polinômios são contínuos em toda parte, isso explica por que as parciais de segunda ordem mistas do Exemplo 12 são iguais.

## A EQUAÇÃO DA ONDA

Considere uma corda de comprimento $L$ fortemente esticada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$ sobre um eixo $x$ e suponha que coloquemos a corda em movimento vibratório por um puxão no instante $t = 0$ (Figura 13.3.4*a*). O deslocamento de um ponto sobre a corda depende de sua coordenada $x$ e do tempo decorrido $t$ e, portanto, é descrito por uma função $u(x, t)$ de duas variáveis. Com um valor fixado $t$, a função $u(x, t)$ depende somente de $x$, e o gráfico de $u$ *versus* $x$ descreve a forma da corda – pense nele como uma foto instantânea da corda no instante $t$ (Figura 13.3.4*b*). Segue que em um tempo fixado $t$, a derivada parcial $\partial u/\partial x$ representa a inclinação da corda no ponto $x$, e o sinal da derivada parcial de segunda ordem $\partial^2 u/\partial x^2$ nos diz se a corda é côncava para cima ou para baixo no ponto $x$ (Figura 13.3.4*c*).




(*a*) (*b*) (*c*)

**Figura 13.3.4**

© vndrpttn/iStockphoto

*A vibração de uma corda dedilhada é governada pela equação da onda.*

Fixado um valor de $x$, a função $u(x, t)$ depende apenas de $t$, e o gráfico de $u$ *versus* $t$ é a curva posição *versus* tempo do ponto sobre a corda com a coordenada $x$. Assim, dado um valor fixado $x$, a derivada parcial $\partial u/\partial t$ é a velocidade do ponto com a coordenada $x$ e $\partial^2 u/\partial t^2$ é a aceleração daquele ponto.

Pode ser provado que, sob condições apropriadas, a função $u(x, t)$ satisfaz uma equação da forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

onde $c$ é uma constante positiva que depende das características físicas da corda. Essa equação, que é denominada ***equação da onda unidimensional***, envolve as derivadas parciais da função desconhecida $u(x, t)$ e, portanto, é classificada como uma ***equação diferencial parcial***. Técnicas para resolver equações diferenciais parciais são estudadas em cursos avançados e não serão discutidas neste texto.

**► Exemplo 14** Mostre que a função $u(x, t) = \operatorname{sen}(x - ct)$ é uma solução da Equação (6).

***Solução*** Temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x - ct), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\operatorname{sen}(x - ct)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\cos(x - ct), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \operatorname{sen}(x - ct)$$

Assim, $u(x, t)$ satisfaz (6). ◄

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.3 (Ver página 940 para respostas.)

1. Seja $f(x, y) = x \operatorname{sen} xy$. Então $f_x(x, y) =$ _____ e $f_y(x, y) =$ _____.
2. A inclinação da superfície $z = xy^2$ na direção $x$ no ponto $(2, 3)$ é _____ e a inclinação dessa superfície na direção $y$ no ponto $(2, 3)$ é _____.
3. O volume $V$ de um cone circular reto de raio $r$ e altura $h$ é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
   (a) Encontre uma fórmula para a taxa de variação instantânea de $V$ em relação a $r$ se $r$ variar e $h$ permanecer constante.
   (b) Encontre uma fórmula para a taxa de variação instantânea de $V$ em relação a $h$ se $h$ variar e $r$ permanecer constante.
4. Encontre todas as derivadas parciais de segunda ordem da função $f(x, y) = x^2y^3$.

## EXERCÍCIOS 13.3 Recurso Gráfico

1. Seja $f(x, y) = 3x^3y^2$. Determine
   (a) $f_x(x, y)$ (b) $f_y(x, y)$ (c) $f_x(1, y)$
   (d) $f_x(x, 1)$ (e) $f_y(1, y)$ (f) $f_y(x, 1)$
   (g) $f_x(1, 2)$ (h) $f_y(1, 2)$
2. Seja $z = e^{2x} \operatorname{sen} y$. Determine
   (a) $\partial z/\partial x$ (b) $\partial z/\partial y$ (c) $\partial z/\partial x\,|_{(0, y)}$
   (d) $\partial z/\partial x\,|_{(x, 0)}$ (e) $\partial z/\partial y\,|_{(0, y)}$ (f) $\partial z/\partial y\,|_{(x, 0)}$
   (g) $\partial z/\partial x\,|_{(\ln 2, 0)}$ (h) $\partial z/\partial y\,|_{(\ln 2, 0)}$

**3-10** Calcule as derivadas parciais indicadas. ■

3. $z = 9x^2y - 3x^5y$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$
4. $f(x, y) = 10x^2y^4 - 6xy^2 + 10x^2$; $f_x(x, y), f_y(x, y)$
5. $z = (x^2 + 5x - 2y)^8$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$
6. $f(x, y) = \dfrac{1}{xy^2 - x^2y}$; $f_x(x, y), f_y(x, y)$
7. $\dfrac{\partial}{\partial p}(e^{-7p/q}), \dfrac{\partial}{\partial q}(e^{-7p/q})$
8. $\dfrac{\partial}{\partial x}(xe^{\sqrt{15xy}}), \dfrac{\partial}{\partial y}(xe^{\sqrt{15xy}})$
9. $z = \operatorname{sen}(5x^3y + 7xy^2)$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$
10. $f(x, y) = \cos(2xy^2 - 3x^2y^2)$; $f_x(x, y), f_y(x, y)$
11. Seja $f(x, y) = \sqrt{3x + 2y}$.
    (a) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção $x$ no ponto $(4, 2)$.
    (b) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção $y$ no ponto $(4, 2)$.
12. Seja $f(x, y) = xe^{-y} + 5y$.
    (a) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção $x$ no ponto $(3, 0)$.
    (b) Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção $y$ no ponto $(3, 0)$.
13. Seja $z = \operatorname{sen}(y^2 - 4x)$.
    (a) Determine a taxa de variação de $z$ em relação a $x$ no ponto $(2, 1)$ com $y$ fixo.
    (b) Determine a taxa de variação de $z$ em relação a $y$ no ponto $(2, 1)$ com $x$ fixo.
14. Seja $z = (x + y)^{-1}$.
    (a) Determine a taxa de variação de $z$ em relação a $x$ no ponto $(-2, 4)$ com $y$ fixo.
    (b) Determine a taxa de variação de $z$ em relação a $y$ no ponto $(-2, 4)$ com $x$ fixo.

### ENFOCANDO CONCEITOS

15. Use a informação fornecida na figura a seguir para encontrar os valores das derivadas parciais de primeira ordem de $f$ no ponto $(1, 2)$.

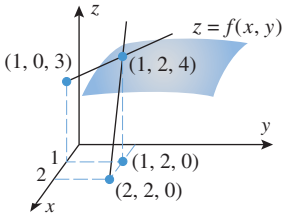



**Figura Ex-15**

16. A figura a seguir mostra o mapa de contornos de uma função não especificada $f(x, y)$. Faça uma conjectura sobre os sinais das derivadas parciais $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ e explique seu raciocínio.

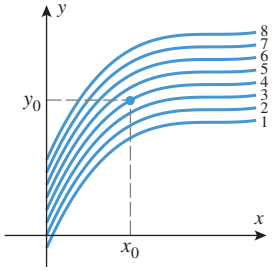



**Figura Ex-16**

17. Suponha que Nolan arremesse uma bola de beisebol para Ryan e que a bola deixe a mão de Nolan à mesma altura que é apanhada por Ryan. Se ignorarmos a resistência do ar, o alcance horizontal $r$ da bola de beisebol é uma função da velocidade $v$ da bola quando deixa a mão de Nolan e o ângulo $\theta$ com a horizontal em que é lançada. Use a tabela a seguir e o método do Exemplo 6 para obter uma estimativa
    (a) da derivada parcial de $r$ em relação a $v$ quando $v = 80$ pés/s e $\theta = 40°$;

(b) da derivada parcial de $r$ em relação a $\theta$ quando $v = 80$ pés/s e $\theta = 40°$.

| ÂNGULO $\theta$ (graus) \ VELOCIDADE $v$ (pés/s) | 75 | 80 | 85 | 90 |
|---|---|---|---|---|
| 35 | 165 | 188 | 212 | 238 |
| 40 | 173 | 197 | 222 | 249 |
| 45 | 176 | 200 | 226 | 253 |
| 50 | 173 | 197 | 222 | 249 |

**Tabela Ex-17**

**18.** Use a tabela do Exercício 17 e o método do Exemplo 6 para obter uma estimativa
(a) da derivada parcial de $r$ em relação a $v$ quando $v = 85$ pés/s e $\theta = 45°$;
(b) da derivada parcial de $r$ em relação a $\theta$ quando $v = 85$ pés/s e $\theta = 45°$.

**19.** A figura a seguir mostra os gráficos de uma função não especificada $f(x, y)$ e suas derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$. Determine qual gráfico é qual e explique seu raciocínio.

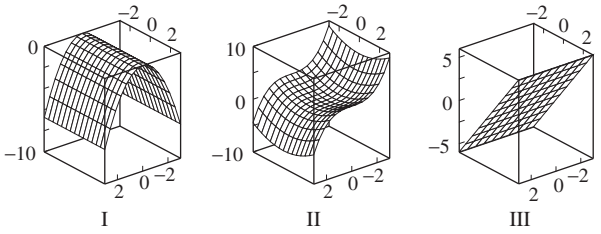



**Figura Ex-19**

**20.** O que pode ser dito sobre o sinal de $\partial z/\partial x$, $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial z/\partial y$ e $\partial^2 z/\partial y^2$ no ponto $P$ na figura abaixo? Explique seu raciocínio.

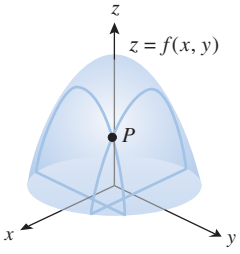



**Figura Ex-20**

**21-24 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

**21.** Se a reta $y = 2$ for uma curva de nível de $f(x, y)$ pelo ponto $(4, 2)$, então $f_x(4, 2) = 0$.

**22.** Se o plano $x = 3$ intersectar a superfície $z = f(x, y)$ em uma curva que passa pelo ponto $(3, 4, 16)$ e satisfaz $z = y^2$, então $f_y(3, 4) = 8$.

**23.** Se o gráfico de $z = f(x, y)$ for um plano no espaço, então $f_x$ e $f_y$ serão funções constantes.

**24.** Existe um polinômio $z = f(x, y)$ que satisfaz as equações $f_x(x, y) = 3x^2 + y^2 + 2y$ e $f_y(x, y) = 2xy + 2y$.

**25-30** Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

**25.** $z = 4e^{x^2 y^3}$

**26.** $z = \cos(x^5 y^4)$

**27.** $z = x^3 \ln(1 + xy^{-3/5})$

**28.** $z = e^{xy} \operatorname{sen} 4y^2$

**29.** $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

**30.** $z = \dfrac{x^2 y^3}{\sqrt{x + y}}$

**31-36** Determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

**31.** $f(x, y) = \sqrt{3x^5 y - 7x^3 y}$

**32.** $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

**33.** $f(x, y) = y^{-3/2} \operatorname{arc\,tg}(x/y)$

**34.** $f(x, y) = x^3 e^{-y} + y^3 \sec \sqrt{x}$

**35.** $f(x, y) = (y^2 \operatorname{tg} x)^{-4/3}$

**36.** $f(x, y) = \cosh(\sqrt{x}) \operatorname{senh}^2(xy^2)$

**37-40** Calcule as derivadas parciais indicadas.

**37.** $f(x, y) = 9 - x^2 - 7y^3$; $f_x(3, 1)$, $f_y(3, 1)$

**38.** $f(x, y) = x^2 y e^{xy}$; $\partial f/\partial x(1, 1)$, $\partial f/\partial y(1, 1)$

**39.** $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$; $\partial z/\partial x(1, 2)$, $\partial z/\partial y(1, 2)$

**40.** $w = x^2 \cos xy$; $\partial w/\partial x\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$, $\partial w/\partial y\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$

**41.** Seja $f(x, y, z) = x^2 y^4 z^3 + xy + z^2 + 1$. Determine
(a) $f_x(x, y, z)$ (b) $f_y(x, y, z)$ (c) $f_z(x, y, z)$
(d) $f_x(1, y, z)$ (e) $f_y(1, 2, z)$ (f) $f_z(1, 2, 3)$

**42.** Seja $w = x^2 y \cos z$. Determine
(a) $\partial w/\partial x\,(x, y, z)$ (b) $\partial w/\partial y\,(x, y, z)$
(c) $\partial w/\partial z\,(x, y, z)$ (d) $\partial w/\partial x\,(2, y, z)$
(e) $\partial w/\partial y\,(2, 1, z)$ (f) $\partial w/\partial z\,(2, 1, 0)$

**43-46** Detemine $f_x$, $f_y$ e $f_z$.

**43.** $f(x, y, z) = z \ln(x^2 y \cos z)$

**44.** $f(x, y, z) = y^{-3/2} \sec\left(\dfrac{xz}{y}\right)$

**45.** $f(x, y, z) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{xy^2 z^3}\right)$

**46.** $f(x, y, z) = \cosh(\sqrt{z}\,) \operatorname{senh}^2(x^2 yz)$

**47-50** Determine $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial w/\partial z$.

**47.** $w = ye^z \operatorname{sen} xz$

**48.** $w = \dfrac{x^2 - y^2}{y^2 + z^2}$

**49.** $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**50.** $w = y^3 e^{2x + 3z}$

**51.** Seja $f(x, y, z) = y^2 e^{xz}$. Determine
(a) $\partial f/\partial x\,|_{(1, 1, 1)}$ (b) $\partial f/\partial y\,|_{(1, 1, 1)}$ (c) $\partial f/\partial z\,|_{(1, 1, 1)}$

**52.** Seja $w = \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$. Determine
(a) $\partial w/\partial x\,|_{(2, 1, -1)}$ (b) $\partial w/\partial y\,|_{(2, 1, -1)}$
(c) $\partial w/\partial z\,|_{(2, 1, -1)}$

**53.** Seja $f(x, y) = e^x \cos y$. Use um recurso computacional para obter o gráfico das funções $f_x(0, y)$ e $f_y(x, \pi/2)$.

**54.** Seja $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$. Use um recurso computacional para obter o gráfico das funções $f_x(0, y)$ e $f_y(x, 0)$.

**55.** Um ponto move-se ao longo da interseção do paraboloide elíptico $z = x^2 + 3y^2$ e do plano $y = 1$. Qual é a taxa de variação de $z$ em relação a $x$ quando o ponto estiver em $(2, 1, 7)$?

**56.** Um ponto move-se ao longo da interseção do paraboloide elíptico $z = x^2 + 3y^2$ e do plano $x = 2$. Qual é a taxa de variação de $z$ em relação a $y$ quando o ponto estiver em $(2, 1, 7)$?

**57.** Um ponto move-se ao longo da interseção do plano $y = 3$ e a superfície $z = \sqrt{29 - x^2 - y^2}$. A que taxa $z$ está variando em relação a $x$ quando o ponto está em $(4, 3, 2)$?

**58.** Determine a inclinação da reta tangente em $(-1, 1, 5)$ da curva de interseção da superfície $z = x^2 + 4y^2$ e
(a) o plano $x = -1$ (b) o plano $y = 1$.

**59.** O volume $V$ de um cilindro circular reto é dado pela fórmula $V = \pi r^2 h$, onde $r$ é o raio e $h$ é a altura.
(a) Determine uma fórmula para a taxa de variação instantânea de $V$ em relação a $r$ se $r$ variar e $h$ permanecer constante.
(b) Determine uma fórmula para a taxa de variação instantânea de $V$ em relação a $h$ se $h$ variar e $r$ permanecer constante.
(c) Suponha que $h$ tenha um valor constante de 4 pol, mas que $r$ varie. Determine a taxa de variação de $V$ em relação a $r$ no ponto onde $r = 6$ pol.
(d) Suponha que $r$ tenha um valor constante de 8 pol, mas que $h$ varie. Determine a taxa de variação instantânea de $V$ em relação a $h$ no ponto onde $h = 10$ pol.

**60.** O volume $V$ de um cone circular reto é dado por

$$V = \frac{\pi}{24} d^2 \sqrt{4s^2 - d^2}$$

onde $s$ é a altura inclinada e $d$ é o diâmetro da base.
(a) Determine uma fórmula para a taxa de variação instantânea de $V$ em relação a $s$ se $d$ permanecer constante.
(b) Determine uma fórmula para a taxa de variação instantânea de $V$ em relação a $d$ se $s$ permanecer constante.
(c) Suponha que $d$ tenha um valor constante de 16 cm, mas $s$ varie. Determine a taxa de variação de $V$ em relação a $s$ quando $s = 10$ cm.
(d) Suponha que $s$ tenha um valor constante de 10 cm, mas $d$ varie. Determine a taxa de variação de $V$ em relação a $d$ quando $d = 16$ cm.

**61.** De acordo com a lei dos gases ideais, a pressão, a temperatura e o volume de um gás estão relacionados por $P = kT/V$, onde $k$ é uma constante de proporcionalidade. Suponha que $V$ seja medido em polegadas cúbicas (pol$^3$), $T$ seja medido em kelvins (K) e que para um certo gás a constante de proporcionalidade seja $k = 10$ pol $\cdot$ lb/K.
(a) Determine a taxa de variação instantânea da pressão em relação à temperatura se a temperatura for 80 K e o volume permanecer constante em 50 pol$^3$.
(b) Determine a taxa de variação instantânea do volume em relação à pressão se a pressão for 16 lb/pol$^2$ e a temperatura permanecer constante em 80 K.

**62.** A temperatura em um ponto $(x, y)$ sobre uma placa de metal no plano $xy$ é $T(x, y) = x^3 + 2y^2 + x$ graus. Suponha que a distância seja medida em centímetros e determine a taxa na qual a temperatura varia com a distância se iniciarmos no ponto $(1, 2)$ e movermos
(a) para a direita e paralelamente ao eixo $x$
(b) para cima e paralelamente ao eixo $y$.

**63.** O comprimento, a largura e a altura de uma caixa retangular são $l = 5$, $w = 2$ e $h = 3$, respectivamente.
(a) Encontre a taxa de variação instantânea do volume da caixa em relação ao comprimento se $w$ e $h$ permanecerem constantes.
(b) Encontre a taxa de variação instantânea do volume da caixa em relação à largura se $l$ e $h$ permanecerem constantes.
(c) Encontre a taxa de variação instantânea do volume da caixa em relação à altura se $l$ e $w$ permanecerem constantes.

**64.** A área de um triângulo é dada por $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$, onde $a$ e $b$ são os comprimentos de dois dos lados e $\theta$ o ângulo entre eles. Suponha que $a = 5$, $b = 10$ e $\theta = \pi/3$.
(a) Encontre a taxa segundo a qual $A$ varia em relação a $a$ se $b$ e $\theta$ forem mantidos constantes.
(b) Encontre a taxa segundo a qual $A$ varia em relação a $\theta$ se $a$ e $b$ forem mantidos constantes.
(c) Encontre a taxa segundo a qual $b$ varia em relação a $a$ se $A$ e $\theta$ forem mantidos constantes.

**65.** O volume de um cone circular reto de raio $r$ e altura $h$ é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Mostre que se a altura permanecer constante enquanto o raio varia, então o volume satisfaz

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2V}{r}$$

**66.** Determine as equações paramétricas para a reta tangente em $(1, 3, 3)$ para a curva de interseção da superfície $z = x^2 y$ e
(a) o plano $x = 1$ (b) o plano $y = 3$.

**67.** (a) Derivando implicitamente, determine a inclinação do hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ na direção $x$ nos pontos $(3, 4, 2\sqrt{6})$ e $(3, 4, -2\sqrt{6})$.
(b) Verifique os resultados da parte (a) resolvendo para $z$ e derivando as funções resultantes diretamente.

**68.** (a) Derivando implicitamente, determine a inclinação do hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ na direção $y$ nos pontos $(3, 4, 2\sqrt{6})$ e $(3, 4, -2\sqrt{6})$.
(b) Verifique os resultados da parte (a) resolvendo para $z$ e derivando as funções resultantes diretamente.

**69-72** Calcule $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ usando diferenciação implícita. Deixe suas respostas em termos de $x$, $y$ e $z$. ■

**69.** $(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} = 1$ **70.** $\ln(2x^2 + y - z^3) = x$

**71.** $x^2 + z \operatorname{sen} xyz = 0$ **72.** $e^{xy} \operatorname{senh} z - z^2 x + 1 = 0$

**73-76** Determine $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial w/\partial z$ usando diferenciação implícita. Deixe suas respostas em termos de $x$, $y$, $z$ e $w$. ■

**73.** $(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^{3/2} = 4$

**74.** $\ln(2x^2 + y - z^3 + 3w) = z$

**75.** $w^2 + w \operatorname{sen} xyz = 1$

**76.** $e^{xy} \operatorname{senh} w - z^2 w + 1 = 0$

**77-80** Determine $f_x$ e $f_y$. ■

**77.** $f(x, y) = \displaystyle\int_y^x e^{t^2}\, dt$ **78.** $f(x, y) = \displaystyle\int_1^{xy} e^{t^2}\, dt$

**79.** $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{x^2 y^3} \operatorname{sen} t^3\, dt$ **80.** $f(x, y) = \displaystyle\int_{x+y}^{x-y} \operatorname{sen} t^3\, dt$

**81.** Seja $z = \sqrt{x} \cos y$. Determine
(a) $\partial^2 z/\partial x^2$ (b) $\partial^2 z/\partial y^2$
(c) $\partial^2 z/\partial x \partial y$ (d) $\partial^2 z/\partial y \partial x$

**82.** Seja $f(x, y) = 4x^2 - 2y + 7x^4y^5$. Determine
(a) $f_{xx}$ (b) $f_{yy}$ (c) $f_{xy}$ (d) $f_{yx}$

**83.** Seja $f(x, y) = \operatorname{sen}(3x^2 + 6y^2)$. Determine
(a) $f_{xx}$ (b) $f_{yy}$ (c) $f_{xy}$ (d) $f_{yx}$

**84.** Seja $f(x, y) = xe^{2y}$. Determine
(a) $f_{xx}$ (b) $f_{yy}$ (c) $f_{xy}$ (d) $f_{yx}$

**85-92** Confirme que as derivadas parciais de segunda ordem mistas de $f$ são iguais. ■

**85.** $f(x, y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7y^5 - 3$

**86.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ **87.** $f(x, y) = e^x \cos y$

**88.** $f(x, y) = e^{x - y^2}$ **89.** $f(x, y) = \ln(4x - 5y)$

**90.** $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

**91.** $f(x, y) = (x - y)/(x + y)$

**92.** $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$

**93.** Expresse as seguintes derivadas em notação "$\partial$".
(a) $f_{xxx}$ (b) $f_{xyy}$ (c) $f_{yyxx}$ (d) $f_{xyyy}$

**94.** Expresse as derivadas em notação "subscrito".
(a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ (b) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ (c) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$ (d) $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$

**95.** Dado $f(x, y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$, determine
(a) $f_{xxy}$ (b) $f_{yxy}$ (c) $f_{yyy}$

**96.** Dado $z = (2x - y)^5$, determine
(a) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$ (b) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ (c) $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$.

**97.** Dado $f(x, y) = y^3 e^{-5x}$, determine
(a) $f_{xyy}(0, 1)$ (b) $f_{xxx}(0, 1)$ (c) $f_{yyxx}(0, 1)$

**98.** Dado $w = e^y \cos x$, determine
(a) $\left.\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}\right|_{(\pi/4, 0)}$ (b) $\left.\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right|_{(\pi/4, 0)}$

**99.** Seja $f(x, y, z) = x^3y^5z^7 + xy^2 + y^3z$. Determine
(a) $f_{xy}$ (b) $f_{yz}$ (c) $f_{xz}$ (d) $f_{zz}$
(e) $f_{zyy}$ (f) $f_{xxy}$ (g) $f_{zyx}$ (h) $f_{xxyz}$

**100.** Seja $w = (4x - 3y + 2z)^5$. Determine
(a) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$ (b) $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$ (c) $\dfrac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial y \partial x}$.

**101.** Mostre que a função satisfaz a ***equação de Laplace***

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(a) $z = x^2 - y^2 + 2xy$
(b) $z = e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x$
(c) $z = \ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arc\,tg}(y/x)$

**102.** Mostre que a função satisfaz a ***equação do calor***

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (c > 0, \text{ constante})$$

(a) $z = e^{-t} \operatorname{sen}(x/c)$ (b) $z = e^{-t} \cos(x/c)$

**103.** Mostre que a função $u(x, t) = \operatorname{sen} c\omega t \operatorname{sen} \omega x$ satisfaz a equação da onda [Equação (6)] com quaisquer valores reais de $\omega$.

**104.** Em cada parte, mostre que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem as ***equações de Cauchy-Riemann***.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(a) $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$
(b) $u = e^x \cos y$, $v = e^x \operatorname{sen} y$
(c) $u = \ln(x^2 + y^2)$, $v = 2 \operatorname{arc\,tg}(y/x)$

**105.** Mostre que se $u(x, y)$ e $v(x, y)$, cada uma tem parciais de segunda ordem mistas iguais, e se $u$ e $v$ satisfizerem as equações de Cauchy-Riemann (Exercício 104), então $u$, $v$ e $u + v$ satisfazem as equações de Laplace (Exercício 101).

**106.** Quando dois resistores de resistências $R_1$ ohms e $R_2$ ohms são conectados em paralelo, sua resistência combinada $R$ em ohms é $R = R_1R_2/(R_1 + R_2)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 R}{\partial R_1^2}\frac{\partial^2 R}{\partial R_2^2} = \frac{4R^2}{(R_1 + R_2)^4}$$

**107-110** Encontre as derivadas parciais indicadas. ■

**107.** $f(v, w, x, y) = 4v^2w^3x^4y^5$;
$\partial f/\partial v$, $\partial f/\partial w$, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$

**108.** $w = r \cos st + e^u \operatorname{sen} ur$;
$\partial w/\partial r$, $\partial w/\partial s$, $\partial w/\partial t$, $\partial w/\partial u$

**109.** $f(v_1, v_2, v_3, v_4) = \dfrac{v_1^2 - v_2^2}{v_3^2 + v_4^2}$;
$\partial f/\partial v_1$, $\partial f/\partial v_2$, $\partial f/\partial v_3$, $\partial f/\partial v_4$

**110.** $V = xe^{2x-y} + we^{zw} + yw$;
$\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial y$, $\partial V/\partial z$, $\partial V/\partial w$

**111.** Seja $u(w, x, y, z) = xe^{yw} \operatorname{sen}^2 z$. Encontre
(a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, 0, 1, \pi)$ (b) $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0, 0, 1, \pi)$
(c) $\dfrac{\partial u}{\partial w}(0, 0, 1, \pi)$ (d) $\dfrac{\partial u}{\partial z}(0, 0, 1, \pi)$
(e) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial w \partial z}$ (f) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial w \partial z \partial y^2}$.

**112.** Seja $f(v, w, x, y) = 2v^{1/2}w^4x^{1/2}y^{2/3}$. Encontre $f_v(1, -2, 4, 8)$, $f_w(1, -2, 4, 8)$, $f_x(1, -2, 4, 8)$ e $f_y(1, -2, 4, 8)$.

**113-114** Determine $\partial w/\partial x_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. ■

**113.** $w = \cos(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n)$

**114.** $w = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$

**115-116** Descreva o maior conjunto aberto no qual o Teorema 13.3.2 possa ser usado para provar que $f_{xy}$ e $f_{yx}$ são iguais naquele conjunto. Então, confirme que $f_{xy} = f_{yx}$ naquele conjunto por cálculo direto. ■

**115.** (a) $f(x, y) = 4x^3y + 3x^2y$ (b) $f(x, y) = x^3/y$

**116.** (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
(b) $f(x, y) = \text{sen}\,(x^2 + y^3)$

**117.** Seja $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$. Use a Definição 13.3.1 para determinar $f_x(2, -1)$ e $f_y(2, -1)$. Então, verifique sua resposta calculando a derivada de maneira usual.

**118.** Seja $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$. Mostre que

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3(x^2 + y^2)^{1/3}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

***Fonte:*** Este problema, devido a Don Cohen, apareceu em *Mathematics and Computer Education*, vol 25, Nº 2, 1991 p. 179.

**119.** Seja $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$.
(a) Mostre que $f_y(0, 0) = 1$.
(b) Em que pontos, se houver, $f_y(x, y)$ deixa de existir?

**120.** **Texto** Explique como o gráfico da equação $z = f(x, y)$ pode ser usado para determinar os sinais de $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ sem fazer contas.

**121.** **Texto** Explique como os gráficos de algumas curvas de nível apropriadas de $f(x, y)$ podem ser usados para determinar os sinais de $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ sem fazer contas.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.3

**1.** $\text{sen}\,xy + xy\cos xy$; $x^2\cos xy$ **2.** 9; 12 **3.** (a) $\frac{2}{3}\pi rh$ (b) $\frac{1}{3}\pi r^2$
**4.** $f_{xx}(x, y) = 2y^3, f_{yy}(x, y) = 6x^2y, f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6xy^2$

## 13.4 DIFERENCIABILIDADE, DIFERENCIAIS E LINEARIDADE LOCAL

*Nesta seção, estenderemos a noção de diferenciabilidade para funções de duas ou três variáveis. Nossa definição de diferenciabilidade será baseada na ideia de que uma função é diferenciável em um ponto se, na proximidade desse ponto, puder ser bem aproximada por uma função linear. Ao longo da seção, expandiremos o conceito de diferencial para funções de mais do que uma variável e definiremos a aproximação linear local de uma função.*

### ■ DIFERENCIABILIDADE

Lembre que dizemos que uma função $f$ de uma variável é derivável ou diferenciável em $x_0$ se tiver uma derivada em $x_0$, ou seja, se existir o limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

Como uma consequência de (1), uma função diferenciável possui algumas propriedades importantes:

- O gráfico de $y = f(x)$ tem uma reta tangente não vertical no ponto $(x_0, f(x_0))$;
- $f$ pode ser bem aproximada por uma função linear perto de $x_0$ (Seção 3.5, no Volume 1);
- $f$ é contínua em $x_0$.

Nesta seção, nosso objetivo principal é estender a noção de diferenciabilidade para funções de duas ou três variáveis, de tal modo que valham propriedades análogas a essas. Por exemplo, se uma função $f(x, y)$ de duas variáveis for diferenciável em um ponto $(x_0, y_0)$, vamos querer que

- a superfície $z = f(x, y)$ tenha um plano tangente não vertical no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (Figura 13.4.1);
- os valores de $f$ possam ser bem aproximados pelos valores de uma função linear na proximidade de $(x_0, y_0)$;
- $f$ seja contínua em $(x_0, y_0)$.

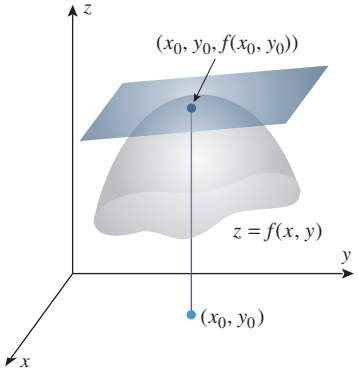



**Figura 13.4.1**

Seria razoável conjecturar que uma função $f$ de duas ou três variáveis deveria ser chamada de diferenciável em um ponto em que existissem todas as derivadas parciais de primeira ordem da função. Infelizmente, essa condição não é suficientemente forte para garantir que as propriedades arroladas valham. Por exemplo, vimos no Exemplo 9 da Seção 13.3 que a mera existência de derivadas parciais de primeira ordem de uma função não é suficiente para garantir a continuidade da função. Para determinar o que mais deveria ser incluído na nossa definição, é útil reexaminar uma das consequências da diferenciabilidade de uma função $f(x)$ a *uma variável*. Suponha que $f(x)$ seja diferenciável em $x = x_0$ e denotemos por

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

a variação de $f$ que corresponde à variação $\Delta x$ em $x$ de $x_0$ até $x_0 + \Delta x$. Vimos na Seção 3.5 (no Volume 1) que

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

desde que $\Delta x$ esteja próximo de zero. De fato, com $\Delta x$ próximo de 0, o erro $\Delta f - f'(x_0)\Delta x$ nessa expressão terá magnitude muito menor do que $\Delta x$, pois

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Como a magnitude de $\Delta x$ é simplesmente a distância entre os pontos $x_0$ e $x_0 + \Delta x$, podemos ver que, quando esses dois pontos estiverem próximos, a magnitude do erro na aproximação será muito menor do que a distância entre os dois pontos (Figura 13.4.2). O "ingrediente adicional" que falta na nossa definição de diferenciabilidade de funções a várias variáveis é a extensão dessa ideia a funções de duas ou três variáveis.

Para uma função $f(x, y)$, o símbolo $\Delta f$, chamado de ***incremento*** de $f$, denota a variação do valor de $f(x, y)$ que resulta quando $(x, y)$ varia de algum ponto inicial $(x_0, y_0)$ para uma alguma posição nova $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$; assim,

$$\Delta f = f(x_0 + x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{2}$$

(ver Figura 13.4.3). [Se for usada uma variável dependente $z = f(x, y)$, podemos escrever $\Delta z$ em vez de $\Delta f$.] Vamos supor que $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existam e façamos (analogamente ao caso de uma variável) a aproximação

Mostre que se $f(x, y)$ for uma função linear, então (3) torna-se uma igualdade.

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \tag{3}$$

Com $\Delta x$ e $\Delta y$ próximos de 0, queremos que o erro

$$\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

dessa aproximação seja muito menor do que a distância $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ entre $(x_0, y_0)$ e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Isso pode ser garantido pela exigência de que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

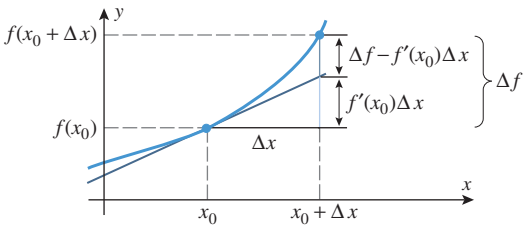



**Figura 13.4.2**

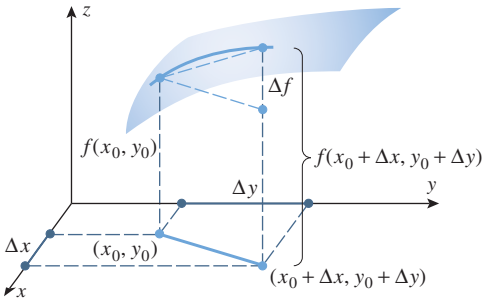



**Figura 13.4.3**

Usando essas ideias, podemos dar, agora, nossa definição de diferenciabilidade para funções de duas variáveis.

**13.4.1 DEFINIÇÃO** Dizemos que uma função $f$ de duas variáveis é ***diferenciável*** em $(x_0, y_0)$ se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existirem e

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \tag{4}$$

Assim como no caso de uma variável, a verificação da diferenciabilidade a partir da definição envolve o cálculo de um limite.

**▶ Exemplo 1** Use a Definição 13.4.1 para provar que $f(x, y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em $(0, 0)$.

***Solução*** O incremento é

$$\Delta f = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Como $f_x(x, y) = 2x$ e $f_y(x, y) = 2y$, temos $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, e (4) significa

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0$$

Portanto, $f$ é diferenciável em $(0, 0)$. ◀

Deduziremos, agora, uma importante consequência do limite (4). Defina uma função

$$\epsilon = \epsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \quad \text{se } (\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$$

e defina $\epsilon(0, 0)$ como sendo 0. A Equação (4), então, implica que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Além disso, segue imediatamente da definição de $\epsilon$ que

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{5}$$

Em outras palavras, se $f$ for diferenciável em $(x_0, y_0)$, então $\Delta f$ pode ser expresso como em (5), onde $\epsilon \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to 0$ e onde $\epsilon = 0$ se $(\Delta x, \Delta y) = (0,0)$.

Para funções de três variáveis, temos a definição análoga de diferenciabilidade em termos do incremento

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

**13.4.2 DEFINIÇÃO** Dizemos que uma função $f$ de três variáveis é ***diferenciável*** em $(x_0, y_0, z_0)$ se existirem $f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f_y(x_0, y_0, z_0)$ e $f_z(x_0, y_0, z_0)$ e

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y - f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} = 0 \tag{6}$$

De maneira análoga ao caso bidimensional, podemos expressar o limite (6) em termos de uma função $\epsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ que se anula em $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (0, 0, 0)$ e é contínua nesse ponto. Deixamos os detalhes a cargo do leitor, como exercício.

Se uma função $f$ de duas variáveis for diferenciável em cada ponto de uma região $R$ do plano $xy$, dizemos que $f$ é ***diferenciável em R***; se $f$ for diferenciável em cada ponto do plano $xy$, dizemos que $f$ é ***diferenciável em toda parte***. A terminologia para funções de três variáveis é análoga.

## DIFERENCIABILIDADE E CONTINUIDADE

Lembre que queremos que funções sejam contínuas em cada ponto de diferenciabilidade. O próximo resultado mostra que isso ocorre.

**13.4.3 TEOREMA** *Se uma função for diferenciável em um ponto, então ela será contínua nesse ponto.*

**DEMONSTRAÇÃO** Apresentamos a demonstração para $f(x, y)$, uma função de duas variáveis, por revelar as ideias essenciais. Suponha que $f$ seja diferenciável em $(x_0, y_0)$. Para provar que $f$ é contínua em $(x_0, y_0)$, devemos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

que, escrevendo $x = x_0 + \Delta x$ e $y = y_0 + \Delta y$, é equivalente a

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

Pela Equação (2), isso é equivalente a

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f = 0$$

A recíproca do Teorema 13.4.3 é falsa. Explique, por exemplo, por que

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

é contínua em $(0, 0)$, mas não é diferenciável em $(0, 0)$.

Contudo, pela Equação (5),

$$\begin{aligned}\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Big[ f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \\ &\qquad + \epsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Big] \\ &= 0 + 0 + 0 \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Pode ser difícil verificar se uma função é diferenciável em um ponto diretamente a partir da definição. O próximo teorema, cuja demonstração costuma ser estudada em disciplinas mais avançadas, fornece uma condição simples para a diferenciabilidade de uma função em um ponto.

**13.4.4 TEOREMA** *Se todas as derivadas parciais de primeira ordem de $f$ existirem e forem contínuas em um ponto, então $f$ será diferenciável nesse ponto.*

Por exemplo, considere a função

$$f(x, y, z) = x + yz$$

Como $f_x(x, y, z) = 1$, $f_y(x, y, z) = z$ e $f_z(x, y, z) = y$ estão definidas e são contínuas em toda parte, concluímos, pelo Teorema 13.4.4, que $f$ é diferenciável em toda parte.

## DIFERENCIAIS

Como no caso de uma variável, a aproximação

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)y$$

de uma função de duas variáveis e a aproximação

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z \tag{7}$$

de uma função de três variáveis têm uma formulação conveniente na linguagem de diferenciais. Se $z = f(x, y)$ for diferenciável em um ponto $(x_0, y_0)$, denotaremos por

$$dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy \tag{8}$$

uma nova função de variável dependente $dz$ e variáveis independentes $dx$ e $dy$. Dizemos que essa função, que também é denotada por $df$, é a ***diferencial total de z*** em $(x_0, y_0)$ ou, então, a ***diferencial total de f*** em $(x_0, y_0)$. Analogamente, para uma função $w = f(x, y, z)$ de três variáveis, temos a ***diferencial total de w*** em $(x_0, y_0, z_0)$,

$$dw = f_x(x_0, y_0, z_0)\,dx + f_y(x_0, y_0, z_0)\,dy + f_z(x_0, y_0, z_0)\,dz \tag{9}$$

também denominada ***diferencial total de f*** em $(x_0, y_0, z_0)$. É usual omitir os subscritos 0 e escrever as Equações (8) e (9) como

$$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy \tag{10}$$

e

$$dw = f_x(x, y, z)\,dx + f_y(x, y, z)\,dy + f_z(x, y, z)\,dz \tag{11}$$

No caso de duas variáveis, a aproximação

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

pode ser escrita na forma

$$\Delta f \approx df \tag{12}$$

com $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$. Equivalentemente, podemos escrever a aproximação (12) como

$$\Delta z \approx dz \tag{13}$$

Em outras palavras, podemos estimar a variação $\Delta z$ de $z$ pelo valor da diferencial $dz$, em que $dx$ é a variação em $x$ e $dy$ é a variação em $y$. Além disso, segue de (4) que se $\Delta x$ e $\Delta y$ estiverem perto de 0, então a magnitude do erro da aproximação (13) será muito menor do que a distância $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ entre $(x_0, y_0)$ e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

**▶ Exemplo 2** Use (13) para aproximar a variação em $z = xy^2$ do seu valor em (0,5; 1,0) para seu valor em (0,503; 1,004). Compare a magnitude do erro dessa aproximação com a distância entre os pontos (0,5; 1,0) e (0,503; 1,004).

***Solução*** Com $z = xy^2$ temos $dz = y^2\,dx + 2xy\,dy$. Calculando essa diferencial em $(x, y) = (0{,}5; 1{,}0)$, com $dx = \Delta x = 0{,}503 - 0{,}5 = 0{,}003$ e $dy = \Delta y = 1{,}004 - 1{,}0 = 0{,}004$, obtemos

$$dz = 1{,}0^2(0{,}003) + 2(0{,}5)(1{,}0)(0{,}004) = 0{,}007$$

Como $z = 0{,}5$ em $(x, y) = (0{,}5; 1{,}0)$ e $z = 0{,}507032048$ em $(x, y) = (0{,}503; 1{,}004)$, temos

$$\Delta z = 0{,}507032048 - 0{,}5 = 0{,}007032048$$

e o erro da aproximação de $\Delta z$ por $dz$ tem magnitude

$$|dz - z| = |0{,}007 - 0{,}007032048| = 0{,}000032048$$

Como a distância entre (0,5; 1,0) e (0,503; 1,004) = (0,5 + $\Delta x$, 1,0 + $\Delta y$) é

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(0{,}003)^2 + (0{,}004)^2} = \sqrt{0{,}000025} = 0{,}005$$

temos

$$\frac{|dz - \Delta z|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{0{,}000032048}{0{,}005} = 0{,}0064096 < \frac{1}{150}$$

Assim, a magnitude do erro da nossa aproximação é menor do que $\frac{1}{150}$ da distância entre os dois pontos. ◀

A análise precedente pode ser estendida a funções de três ou mais variáveis com uma mudança de notação apropriada.

**▶ Exemplo 3** O comprimento, a largura e a altura de uma caixa retangular são medidos com um erro de no máximo 5%. Use uma diferencial total para estimar o erro percentual máximo que resulta se essas quantidades forem usadas para calcular a diagonal da caixa.

***Solução*** A diagonal $D$ de uma caixa com comprimento $x$, largura $y$ e altura $z$ é dada por

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Sejam $x_0$, $y_0$, $z_0$ e $D_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ os valores reais do comprimento, largura, altura e diagonal da caixa. A diferencial total $dD$ de $D$ em $(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$dD = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}\,dx + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}\,dy + \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}\,dz$$

Se $x$, $y$, $z$ e $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ forem os valores medidos e calculados do comprimento, largura, altura e diagonal da caixa, respectivamente, então

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta z = z - z_0$$

e

$$\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| \le 0{,}05, \quad \left|\frac{\Delta y}{y_0}\right| \le 0{,}05, \quad \left|\frac{\Delta z}{z_0}\right| \le 0{,}05$$

Estamos procurando uma estimativa para o tamanho máximo de $\Delta D/D_0$. Com a ajuda da Equação (11), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta D}{D_0} \approx \frac{dD}{D_0} &= \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}[x_0\Delta x + y_0\Delta y + z_0\Delta z] \\ &= \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\left[x_0^2\frac{\Delta x}{x_0} + y_0^2\frac{\Delta y}{y_0} + z_0^2\frac{\Delta z}{z_0}\right]\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\left|\frac{dD}{D_0}\right| &= \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\left|x_0^2\frac{\Delta x}{x_0} + y_0^2\frac{\Delta y}{y_0} + z_0^2\frac{\Delta z}{z_0}\right| \\ &\le \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\left(x_0^2\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| + y_0^2\left|\frac{\Delta y}{y_0}\right| + z_0^2\left|\frac{\Delta z}{z_0}\right|\right) \\ &\le \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\left(x_0^2(0{,}05) + y_0^2(0{,}05) + z_0^2(0{,}05)\right) = 0{,}05\end{aligned}$$

estimamos que o erro percentual máximo em $D$ é de 5%. ◀

## APROXIMAÇÃO LINEAR LOCAL

Mostremos, agora, que se uma função for diferenciável em um ponto, então ela pode ser bem aproximada por uma função linear na vizinhança desse ponto. Por exemplo, suponha que $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(x_0, y_0)$. Então, a aproximação (3) pode ser escrita na forma

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Mostre que se $f(x, y)$ for uma função linear, então (14) torna-se uma igualdade.

Tomando $x = x_0 + \Delta x$ e $y = x_0 + \Delta y$, essa aproximação é dada por

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{14}$$

que fornece uma aproximação linear de $f(x, y)$. Como o erro dessa aproximação é igual ao erro da aproximação (3), concluímos que, com $(x, y)$ perto de $(x_0, y_0)$, o erro de (14) será muito menor do que a distância entre esses dois pontos. Quando $f$ é diferenciável em $(x_0, y_0)$, obtemos

Explique por que o erro da aproximação (14) é igual ao erro da aproximação (3).

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{15}$$

e dizemos que $L(x, y)$ é a ***aproximação linear local de f em*** $(x_0, x_0)$.

▶ **Exemplo 4** Seja $L(x, y)$ a aproximação linear local de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto $(3, 4)$. Compare o erro da aproximação de

$$f(3{,}04; 3{,}98) = \sqrt{(3{,}04)^2 + (3{,}98)^2}$$

por $L(3{,}04; 3{,}98)$ com a distância entre os pontos $(3, 4)$ e $(3{,}04; 3{,}98)$.

***Solução*** Temos

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

com $f_x(3, 4) = \frac{3}{5}$ e $f_y(3, 4) = \frac{4}{5}$. Portanto, a aproximação linear local de $f$ em $(3, 4)$ é dada por

$$L(x, y) = 5 + \tfrac{3}{5}(x - 3) + \tfrac{4}{5}(y - 4)$$

Consequentemente,

$$f(3{,}04; 3{,}98) \approx L(3{,}04; 3{,}98) = 5 + \tfrac{3}{5}(0{,}04) + \tfrac{4}{5}(-0{,}02) = 5{,}008$$

Como

$$f(3{,}04; 3{,}98) = \sqrt{(3{,}04)^2 + (3{,}98)^2} \approx 5{,}00819$$

o erro da aproximação está perto de $5{,}00819 - 5{,}008 = 0{,}00019$. Isso é bem menos do que $\frac{1}{200}$ da distância

$$\sqrt{(3{,}04 - 3)^2 + (3{,}98 - 4)^2} \approx 0{,}045$$

entre os pontos $(3, 4)$ e $(3{,}04; 3{,}98)$. ◀

Analogamente, para uma função $f(x, y, z)$ que é diferenciável em $(x_0, y_0, z_0)$, a aproximação linear local é

$$\begin{aligned} L(x, y, z) = {} & f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) \\ & + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \end{aligned} \tag{16}$$

As nossas definições nesta seção foram formuladas de tal modo que a continuidade e a linearidade local são consequências da diferenciabilidade. Na Seção 13.7, mostraremos que se uma função $f(x, y)$ for diferenciável em um ponto $(x_0, y_0)$, então o gráfico de $L(x, y)$ será um plano tangente não vertical ao gráfico de $f$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.4 (Ver página 949 para respostas.)

1. Suponha que $f(x, y)$ seja diferenciável em $(x_0, y_0)$ e seja $\Delta f$ a variação de $f$ de seu valor em $(x_0, y_0)$ para seu valor em $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.
   (a) $\Delta f =$ _____
   (b) O limite que garante que o erro da aproximação em (a) é muito pequeno quando $\Delta x$ e $\Delta y$ estão perto de 0 é _____.

2. Calcule a diferencial de cada função.
   (a) $z = xe^{y^2}$ (b) $w = x \operatorname{sen}(yz)$

3. Se $f$ for diferenciável em $(x_0, y_0)$, então a aproximação linear local de $f$ em $(x_0, y_0)$ é $L(x, y) =$ _____.

4. Suponha que $f(1, -2) = 4$ e que $f(x, y)$ seja diferenciável em $(1, -2)$ com $f_x(1, -2) = 2$ e $f_y(1, -2) = -3$. Estime o valor de $f(0{,}9; -1{,}950)$.

## EXERCÍCIOS 13.4

### ENFOCANDO CONCEITOS

1. Suponha que uma função $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(3, 4)$ com $f_x(3, 4) = 2$ e $f_y(3, 4) = -1$. Se $f(3, 4) = 5$, estime o valor de $f(3{,}01; 3{,}98)$.

2. Suponha que uma função $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(-1, 2)$ com $f_x(-1, 2) = 1$ e $f_y(-1, 2) = 3$. Se $f(-1, 2) = 2$, estime o valor de $f(-0{,}99; 2{,}02)$.

3. Suponha que uma função $f(x, y, z)$ seja diferenciável no ponto $(1, 2, 3)$ com $f_x(1, 2, 3) = 1$, $f_y(1, 2, 3) = 2$ e $f_z(1, 2, 3) = 3$. Se $f(1, 2, 3) = 4$, estime o valor de $f(1{,}01; 2{,}02; 3{,}03)$.

4. Suponha que uma função $f(x, y, z)$ seja diferenciável no ponto $(2, 1, -2)$ com $f_x(2, 1, -2) = -1$, $f_y(2, 1, -2) = 1$ e $f_z(2, 1, -2) = -2$. Se $f(2, 1, -2) = 0$, estime o valor de $f(1{,}98; 0{,}99; -1{,}97)$.

5. Use as Definições 13.4.1 e 13.4.2 para provar que uma função constante de duas ou três variáveis é diferenciável em toda parte.

6. Use as Definições 13.4.1 e 13.4.2 para provar que uma função linear de duas ou três variáveis é diferenciável em toda parte.

7. Use a Definição 13.4.2 para provar que
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$
é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

8. Use a Definição 13.4.2 para determinar todos valores de $r$ tais que $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^r$ seja diferenciável em $(0, 0, 0)$.

**9-20** Calcule a diferencial $dz$ ou $dw$ da função dada. ■

9. $z = 7x - 2y$ 10. $z = e^{xy}$ 11. $z = x^3y^2$
12. $z = 5x^2y^5 - 2x + 4y + 7$
13. $z = \operatorname{arc\,tg}(xy)$ 14. $z = e^{-3x}\cos 6y$
15. $w = 8x - 3y + 4z$ 16. $w = e^{xyz}$
17. $w = x^3y^2z$
18. $w = 4x^2y^3z^7 - 3xy + z + 5$
19. $w = \operatorname{arc\,tg}(xyz)$ 20. $w = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

**21-26** Use uma diferencial total para aproximar a variação do valor de $f$ de $P$ para $Q$. Compare sua estimativa com a variação real de $f$. ■

21. $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x$; $P(1, 2)$, $Q(1{,}01; 2{,}04)$
22. $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/2}$; $P(8, 9)$, $Q(7{,}78; 9{,}03)$
23. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{xy}$; $P(-1, -2)$, $Q(-1{,}02, -2{,}04)$
24. $f(x, y) = \ln\sqrt{1 + xy}$; $P(0, 2)$, $Q(-0{,}09, 1{,}98)$
25. $f(x, y, z) = 2xy^2z^3$; $P(1, -1, 2)$, $Q(0{,}99; -1{,}02; 2{,}02)$
26. $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x + y + z}$; $P(-1, -2, 4)$, $Q(-1{,}04, -1{,}98, 3{,}97)$

**27-30 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

27. Por definição, uma função $f(x, y)$ é diferenciável em $(x_0, y_0)$ se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ estiverem definidas.

28. Dado qualquer ponto $(x_0, y_0)$ do domínio de uma função $f(x, y)$, temos
$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \Delta f = 0$$
em que
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

29. Se $f_x$ e $f_y$ forem contínuas em $(x_0, y_0)$, então $f$ será contínua nesse ponto.

30. O gráfico de uma aproximação linear local de uma função $f(x, y)$ é um plano.

**31.** Um retângulo de comprimento inicial $x_0$ e largura inicial $y_0$ foi aumentado, resultando em um retângulo de comprimento $x_0 + \Delta x$ e largura $y_0 + \Delta y$ (ver figura a seguir). Qual porção da figura representa o aumento de área do retângulo? Qual porção da figura representa uma aproximação por uma diferencial total do aumento de área?

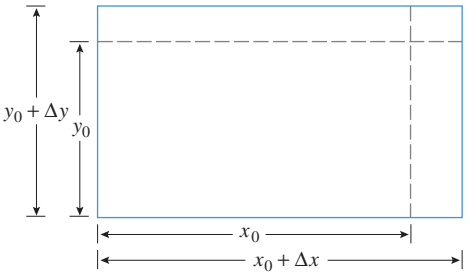



**Figura Ex-31**

**32.** O volume $V$ de um cone circular reto de raio $r$ e altura $h$ é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Suponha que a altura decresça de 20 cm para 19,95 cm, enquanto que o raio cresce de 4 cm para 4,05 cm. Use uma diferencial total para aproximar a variação no volume do cone.

**33-40** (a) Encontre a aproximação linear local $L$ da função $f$ especificada no ponto $P$ dado. (b) Compare o erro da aproximação de $f$ por $L$ no ponto $Q$ especificado com a distância entre $P$ e $Q$. ■

**33.** $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $P(4, 3)$, $Q(3{,}92; 3{,}01)$

**34.** $f(x, y) = x^{0,5}y^{0,3}$; $P(1, 1)$, $Q(1{,}05; 0{,}97)$

**35.** $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$; $P(0, 0)$, $Q(0{,}003; 0{,}004)$

**36.** $f(x, y) = \ln xy$; $P(1, 2)$, $Q(1{,}01; 2{,}02)$

**37.** $f(x, y, z) = xyz$; $P(1, 2, 3)$, $Q(1{,}001; 2{,}002; 3{,}003)$

**38.** $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{y + z}$; $P(-1, 1, 1)$, $Q(-0.99; 0.99; 1.01)$

**39.** $f(x, y, z) = xe^{yz}$; $P(1, -1, -1)$, $Q(0{,}99; -1{,}01; -0{,}99)$

**40.** $f(x, y, z) = \ln(x + yz)$; $P(2, 1, -1)$, $Q(2{,}02; 0{,}97; -1{,}01)$

**41.** Em cada parte, confirme que a fórmula enunciada é a aproximação linear local em (0, 0).

(a) $e^x \operatorname{sen} y \approx y$ (b) $\dfrac{2x + 1}{y + 1} \approx 1 + 2x - y$

**42.** Mostre que a aproximação linear local da função $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ em (1, 1) é

$$x^\alpha y^\beta \approx 1 + \alpha(x - 1) + \beta(y - 1)$$

**43.** Em cada parte, confirme que a fórmula enunciada é a aproximação linear local em (1, 1, 1).

(a) $xyz + 2 \approx x + y + z$ (b) $\dfrac{4x}{y + z} \approx 2x - y - z + 2$

**44.** Usando o Exercício 42, o que podemos conjecturar que seja a aproximação linear local de $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ em (1, 1, 1)? Verifique sua conjectura encontrando a aproximação linear local.

**45.** Suponha que uma função $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto (1, 1) com $f_x(1, 1) = 2$ e $f(1, 1) = 3$. Seja $L(x, y)$ a aproximação linear local de $f$ em (1, 1). Se $L(1{,}1; 0{,}9) = 3{,}15$, encontre o valor de $f_y(1, 1)$.

**46.** Suponha que uma função $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(0, -1)$ com $f_y(0, -1) = -2$ e $f(0, -1) = 3$. Seja $L(x, y)$ a aproximação linear local de $f$ em $(0, -1)$. Se $L(0{,}1; -1{,}1) = 3{,}3$, encontre o valor de $f_y(0, -1)$.

**47.** Suponha que uma função $f(x, y, z)$ seja diferenciável no ponto (3, 2, 1) e que $L(x, y, z) = x - y + 2z - 2$ seja a aproximação linear local de $f$ em (3, 2, 1). Encontre $f(3, 2, 1)$, $f_x(3, 2, 1)$, $f_y(3, 2, 1)$ e $f_z(3, 2, 1)$.

**48.** Suponha que uma função $f(x, y, z)$ seja diferenciável no ponto $(0, -1, -2)$ e que $L(x, y, z) = x + 2y + 3z + 4$ seja a aproximação linear local de $f$ em $(0, -1, -2)$. Encontre $f(0, -1, -2)$, $f_x(0, -1, -2)$, $f_y(0, -1, -2)$ e $f_z(0, -1, -2)$.

**49-52** São dadas uma função diferenciável $f$ junto a uma aproximação linear local $L$ de $f$ num ponto $P$. Use a informação dada para determinar o ponto $P$. ■

**49.** $f(x, y) = x^2 + y^2$; $L(x, y) = 2y - 2x - 2$

**50.** $f(x, y) = x^2y$; $L(x, y) = 4y - 4x + 8$

**51.** $f(x, y, z) = xy + z^2$; $L(x, y, z) = y + 2z - 1$

**52.** $f(x, y, z) = xyz$; $L(x, y, z) = x - y - z - 2$

**53.** O comprimento e a largura de um retângulo são medidos com erros de, no máximo, 3% e 5%, respectivamente. Use diferenciais para aproximar o erro percentual máximo na área calculada.

**54.** O raio e a altura de um cone circular reto são medidos com erros de, no máximo, 1% e 4%, respectivamente. Use diferenciais para aproximar o erro percentual máximo no volume calculado.

**55.** O comprimento e a largura de um retângulo são medidos com erros de, no máximo, $r$%, onde $r$ é pequeno. Use diferenciais para aproximar o erro percentual máximo no comprimento da diagonal calculada.

**56.** Os catetos de um triângulo retângulo foram medidos como tendo 3 cm e 4 cm, com um erro máximo de 0,05 cm em cada medida. Use diferenciais para aproximar o erro possível máximo no valor calculado (a) da hipotenusa e (b) da área do triângulo.

**57.** O período $T$ de um pêndulo simples com pequenas oscilações é calculado da fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, onde $L$ é o comprimento do pêndulo e $g$ é a aceleração devido à gravidade. Suponha que os valores de $L$ e $g$ tenham erros de, no máximo, 0,5% e 0,1%, respectivamente. Use diferenciais para aproximar o erro percentual máximo no valor calculado de $T$.

**58.** De acordo com a lei dos gases ideais, a pressão, a temperatura e o volume de um gás confinado estão relacionados por

$P = kT/V$, onde $k$ é uma constante. Use diferenciais para aproximar a variação percentual na pressão se a temperatura de um gás tiver crescido em 3% e o volume tiver crescido em 5%.

**59.** Suponha que $x$ e $y$ sejam quantidades medidas que tenham erros de, no máximo, $r\%$ e $s\%$, respectivamente. Para cada uma das seguintes fórmulas em $x$ e $y$, use diferenciais para aproximar o erro possível máximo no resultado calculado.
(a) $xy$ (b) $x/y$ (c) $x^2y^3$ (d) $x^3\sqrt{y}$

**60.** A resistência total $R$ de três resistências $R_1$, $R_2$ e $R_3$ conectadas em paralelo é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Suponha que $R_1$, $R_2$ e $R_3$ tenham sido medidas como 100 ohms, 200 ohms e 500 ohms, respectivamente, com um erro máximo de 10% em cada um. Use diferenciais para aproximar o erro percentual máximo no valor calculado de $R$.

**61.** A área de um triângulo deve ser calculada pela fórmula $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$, na qual $a$ e $b$ são os comprimentos de dois lados e $\theta$ é o ângulo entre eles. Suponha que $a$, $b$ e $\theta$ tenham sido medidos como 40 cm, 50 cm e 30°, respectivamente. Use diferenciais para aproximar o erro máximo no valor calculado de $A$ se os erros máximos em $a$, $b$ e $\theta$ são $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{1}{4}$ cm e 2°, respectivamente.

**62.** O comprimento, a largura e a altura de uma caixa retangular são medidos com erros de, no máximo, $r\%$ (onde $r$ é pequeno). Use diferenciais para aproximar o erro percentual máximo no valor calculado do volume.

**63.** Use o Teorema 13.4.4 para provar que $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$ é diferenciável em toda parte.

**64.** Use o Teorema 13.4.4 para provar que $f(x, y, z) = xy \operatorname{sen} z$ é diferenciável em toda parte.

**65.** Suponha que $f(x, y)$ seja uma função diferenciável no ponto $(x_0, y_0)$ e seja $z_0 = f(x_0, y_0)$. Prove que a função definida por $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ é diferenciável em $(x_0, y_0, z_0)$.

**62.** Suponha que $\Delta f$ satisfaça uma equação do tipo (5), em que $\epsilon(\Delta x, \Delta y)$ é contínua em $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$, com $\epsilon(0, 0) = 0$. Prove que $f$ é diferenciável em $(x_0, y_0)$.

**67.** **Texto** Discuta as semelhanças e as diferenças entre as definições de "diferenciabilidade" de uma função de uma variável e a de uma função de duas variáveis.

**68.** **Texto** Discuta a utilização de diferenciais na aproximação de variações e na estimativa de erros.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.4

**1.** (a) $f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$ (b) $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \dfrac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ **2.** (a) $dz = e^{y^2}dx + 2xye^{y^2}dy$
(b) $dw = \operatorname{sen}(yz)\,dx + xz\cos(yz)\,dy + xy\cos(yz)\,dz$ **3.** $f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ **4.** 3,65

# 13.5 REGRA DA CADEIA

*Nesta seção, deduziremos versões da regra da cadeia para funções de duas ou três variáveis. Essas novas versões nos permitirão gerar relações úteis entre derivadas e derivadas parciais de várias funções.*

### REGRA DA CADEIA PARA DERIVADAS

Se $y$ for uma função diferenciável de $x$ e $x$ for uma função diferenciável de $t$, então a regra da cadeia para funções de uma variável afirma que, na composição, $y$ resulta ser uma função diferenciável de $t$ com

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Agora, deduziremos uma versão da regra da cadeia para funções de duas variáveis.

Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função de $x$ e $y$ e que, por sua vez, $x$ e $y$ sejam funções de uma só variável $t$, digamos,

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

A composta $z = f(x(t), y(t))$, então, expressa $z$ como uma função só da variável $t$. Assim, podemos perguntar pela derivada $dz/dt$ e pela sua relação com as derivadas $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, $dx/dt$

e $dy/dt$. Se $\Delta x$, $\Delta y$ e $\Delta z$ denotarem as variações em $x$, $y$ e $z$, respectivamente, que correspondem a uma variação de $\Delta t$ em $t$, então

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Segue de (3) da Seção 13.4 que

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \tag{1}$$

onde as derivadas parciais são calculadas em $(x(t), y(t))$. Dividindo ambos os lados de (1) por $\Delta t$, obtemos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \approx \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{2}$$

Da mesma forma, podemos produzir o análogo de (2) para funções de três variáveis, como segue: suponha que $w = f(x, y, z)$ seja uma função de $x$, $y$ e $z$ e suponha que $x$, $y$ e $z$ sejam funções de uma variável $t$. Como antes, definimos $\Delta w$, $\Delta x$, $\Delta y$ e $\Delta z$ como as variações em $w$, $x$, $y$ e $z$ que correspondem a uma variação de $\Delta t$ em $t$. Por (7) da Seção 13.4, decorre

$$\Delta w \approx \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z \tag{3}$$

e, dividindo ambos os lados de (3) por $\Delta t$, obtemos

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} \approx \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t} \tag{4}$$

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$ em ambos os lados de (2) e (4) sugere o resultado seguinte. (Uma demonstração completa no caso de duas variáveis pode ser encontrada no Apêndice D.)

**13.5.1** TEOREMA (***Regra da Cadeia para Derivadas***) *Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem diferenciáveis em $t$, e se $z = f(x, y)$ for diferenciável no ponto $(x, y) = (x(t), y(t))$, então $z = f(x(t), y(t))$ será diferenciável em $t$ e*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{5}$$

*onde as derivadas comuns são calculadas em $t$ e as derivadas parciais são calculadas em $(x, y)$.*

*Se cada uma das funções $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ for diferenciável em $t$ e se $w = f(x, y, z)$ for diferenciável no ponto $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$, então a função $w = f(x(t), y(t), z(t))$ será diferenciável em $t$ e*

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{6}$$

*onde as derivadas comuns são calculadas em $t$ e as derivadas parciais são calculadas em $(x, y, z)$.*

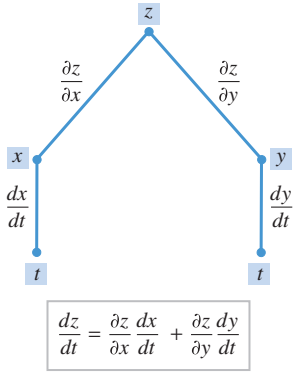



**Figura 13.5.1**

A Fórmula (5) pode ser representada esquematicamente por um "diagrama de árvore" que é construído como segue (Figura 13.5.1). Começando com $z$ no topo da árvore e moven-

do para baixo, unimos cada variável por retas (ou ramos) àquelas variáveis das quais elas dependem *diretamente*. Assim, $z$ é unido a $x$ e $y$ e essas são, por sua vez, unidas a $t$. Em seguida, rotulamos cada ramo com uma derivada cujo "numerador" contém a variável do extremo superior daquele ramo e cujo "denominador" contém a variável que está no extremo inferior do mesmo ramo. Isso completa a "árvore". Para encontrar a fórmula para $dz/dt$, siga os dois caminhos através da árvore que começam em $z$ e terminam em $t$. Cada um desses caminhos corresponde a um termo na Fórmula (5).

Crie um diagrama de árvore para a Fórmula (6).

**► Exemplo 1** Suponha que

$$z = x^2y, \quad x = t^2, \quad y = t^3$$

Use a regra da cadeia para encontrar $dz/dt$ e verifique o resultado expressando $z$ como uma função de $t$ e derivando diretamente.

***Solução*** Pela regra da cadeia [Fórmula (5)]

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2xy)(2t) + (x^2)(3t^2)\\ &= (2t^5)(2t) + (t^4)(3t^2) = 7t^6\end{aligned}$$

Alternativamente, podemos expressar $z$ diretamente como uma função de $t$,

$$z = x^2y = (t^2)^2(t^3) = t^7$$

e, então, derivar para obter $dz/dt = 7t^6$. Contudo, esse procedimento nem sempre será conveniente. ◄

**► Exemplo 2** Suponha que

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta, \quad z = \operatorname{tg}\theta$$

Use a regra da cadeia para encontrar $dw/d\theta$ se $\theta = \pi/4$.

***Solução*** Pela Fórmula (6) com $\theta$ no lugar de $t$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}\\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2x)(-\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2y)(\cos\theta)\\ &\quad + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2z)(\sec^2\theta)\end{aligned}$$

Com $\theta = \pi/4$, temos

$$x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

Confirme o resultado do Exemplo 2 expressando $z$ diretamente como função de $\theta$.

Substituindo $x = 1/\sqrt{2}$, $y = 1/\sqrt{2}$, $z = 1$, $\theta = \pi/4$ na fórmula de $dw/d\theta$, obtemos

$$\begin{aligned}\left.\frac{dw}{d\theta}\right|_{\theta=\pi/4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2)(2)\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

◄

**OBSERVAÇÃO** Há muitas variações nas notações da derivada, cada uma das quais dá à regra da cadeia uma forma diferente. Se $z = f(x, y)$, onde $x$ e $y$ são funções de $t$, então algumas possibilidades são

$$\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = f_x x'(t) + f_y y'(t)$$

## REGRAS DA CADEIA PARA DERIVADAS PARCIAIS

Na Fórmula (5), as variáveis $x$ e $y$ eram funções de uma única variável $t$. Agora, consideramos o caso em que $x$ e $y$ são funções de duas variáveis. Seja $z = f(x, y)$ e suponha que $x$ e $y$ sejam funções de $u$ e $v$, digamos,

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

A composição $z = f(x(u, v), y(u, v))$ expressa $z$ como uma função das duas variáveis $u$ e $v$. Assim, podemos perguntar pelas derivadas parciais $\partial z/\partial u$ e $\partial z/\partial v$, bem como pela relação entre essas derivadas e as derivadas $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, $\partial x/\partial u$, $\partial x/\partial v$, $\partial y/\partial u$ e $\partial y/\partial v$.

Analogamente, se $w = f(x, y, z)$ e $x$, $y$ e $z$ forem, cada uma, funções de $u$ e $v$, então a composição $w = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ expressa $w$ como uma função de $u$ e $v$. Assim, também podemos perguntar pelas derivadas $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$ e investigar a relação entre essas derivadas, as derivadas parciais $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial w/\partial z$ e as derivadas parciais de $x$, $y$ e $z$ em relação a $u$ e $v$.

**13.5.2 TEOREMA (*Regra da Cadeia para Derivadas Parciais*)** *Se $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ tiverem derivadas parciais de primeira ordem no ponto $(u, v)$, e se $z = f(x, y)$ for diferenciável no ponto $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$, então $z = f(x(u, v), y(u, v))$ terá derivadas parciais de primeira ordem no ponto $(u, v)$ dadas por*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{7–8}$$

*Se cada uma das funções $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ tiver derivadas parciais de primeira ordem no ponto $(u, v)$, e se a função $w = f(x, y, z)$ for diferenciável no ponto $(x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, então $w = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ terá derivadas parciais de primeira ordem no ponto $(u, v)$ dadas por*

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \tag{9–10}$$

**DEMONSTRAÇÃO** Demonstraremos a Fórmula (7); as demais podem ser deduzidas de maneira análoga. Se $v$ for mantido fixado, então $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ serão funções somente da variável $u$. Assim, voltamos ao caso do Teorema 13.5.1. Aplicando aquele teorema com $u$ no lugar de $t$ e usando $\partial$ em vez de $d$ para indicar que a variável $v$ está sendo mantida fixada, obteremos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \blacksquare$$

As Figuras 13.5.2 e 13.5.3 mostram diagramas de árvore das fórmulas no Teorema 13.5.2. Conforme ilustra a Figura 13.5.2, a fórmula de $\partial z/\partial u$ pode ser obtida traçando to-

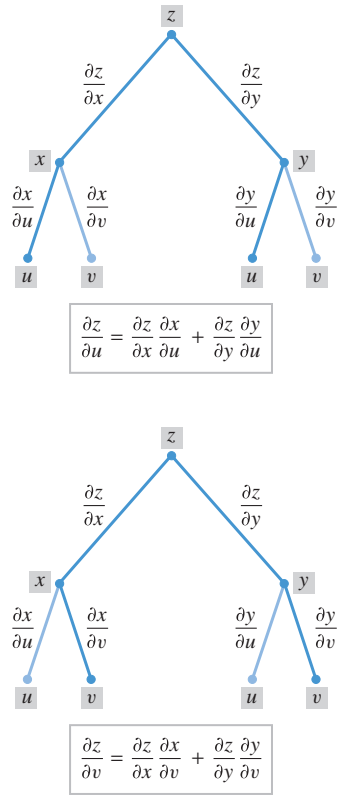



**Figura 13.5.2**

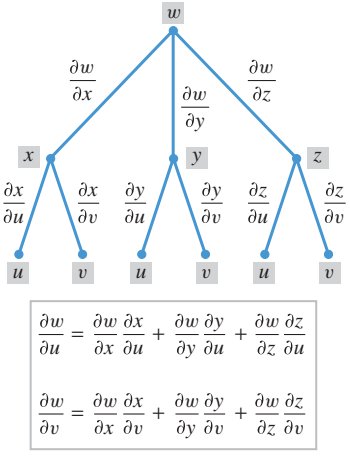



**Figura 13.5.3**

dos os caminhos através da árvore que começam em $z$ e terminam em $u$ e a fórmula de $\partial z/\partial v$ pode ser obtida traçando todos os caminhos através da árvore que começam em $z$ e terminam em $v$. A Figura 13.5.3 apresenta resultados análogos para $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$.

**► Exemplo 3** Dado que

$$z = e^{xy}, \quad x = 2u + v, \quad y = u/v$$

encontre $\partial z/\partial u$ e $\partial z/\partial v$ usando a regra da cadeia.

***Solução***

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (ye^{xy})(2) + (xe^{xy})\left(\frac{1}{v}\right) = \left[2y + \frac{x}{v}\right]e^{xy} \\ &= \left[\frac{2u}{v} + \frac{2u+v}{v}\right]e^{(2u+v)(u/v)} = \left[\frac{4u}{v} + 1\right]e^{(2u+v)(u/v)} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = (ye^{xy})(1) + (xe^{xy})\left(-\frac{u}{v^2}\right) \\ &= \left[y - x\left(\frac{u}{v^2}\right)\right]e^{xy} = \left[\frac{u}{v} - (2u+v)\left(\frac{u}{v^2}\right)\right]e^{(2u+v)(u/v)} \\ &= -\frac{2u^2}{v^2}e^{(2u+v)(u/v)} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

**► Exemplo 4** Suponha que

$$w = e^{xyz}, \quad x = 3u + v, \quad y = 3u - v, \quad z = u^2v$$

Use formas apropriadas da regra da cadeia para determinar $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$.

***Solução*** Do diagrama de árvore e das correspondentes fórmulas na Figura 13.5.3, obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial u} = yze^{xyz}(3) + xze^{xyz}(3) + xye^{xyz}(2uv) = e^{xyz}(3yz + 3xz + 2xyuv)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial v} = yze^{xyz}(1) + xze^{xyz}(-1) + xye^{xyz}(u^2) = e^{xyz}(yz - xz + xyu^2)$$

Se desejarmos, podemos expressar $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$ em termos de $u$ e $v$ apenas substituindo $x$, $y$ e $z$ por suas expressões em termos de $u$ e $v$. ◄

## OUTRAS VERSÕES DA REGRA DA CADEIA

A regra da cadeia pode ser estendida a funções $w = f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $n$ variáveis. Por exemplo, se cada $v_i$ for uma função de $t$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, a fórmula pertinente será

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial v_2}\frac{dv_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial v_n}\frac{dv_n}{dt} \tag{11}$$

Observe que (11) é uma extensão natural das Fórmulas (5) e (6) do Teorema 13.5.1.

Existe uma infinidade de variações da regra da cadeia, dependendo do número de variáveis e da escolha das variáveis independentes e dependentes. Um bom procedimento prático é utilizar diagramas de árvores para deduzir novas versões à medida que forem necessárias.

**▶ Exemplo 5** Suponha que $w = x^2 + y^2 - z^2$ e

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

Use formas apropriadas da regra da cadeia para determinar $\partial w/\partial \rho$ e $\partial w/\partial \theta$.

***Solução*** Do diagrama de árvore e das fórmulas correspondentes na Figura 13.5.4, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \rho} &= 2x \operatorname{sen} \phi \cos \theta + 2y \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta - 2z \cos \phi \\
&= 2\rho \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + 2\rho \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta - 2\rho \cos^2 \phi \\
&= 2\rho \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) - 2\rho \cos^2 \phi \\
&= 2\rho (\operatorname{sen}^2 \phi - \cos^2 \phi) \\
&= -2\rho \cos 2\phi \\
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= (2x)(-\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta) + (2y)\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\
&= -2\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

Esse resultado é explicado pelo fato de que $w$ não varia com $\theta$. Podemos ver isso diretamente expressando as variáveis $x$, $y$ e $z$ em termos de $\rho$, $\phi$ e $\theta$ na fórmula para $w$. (Verifique que $w = -\rho^2 \cos 2\phi$.) ◀

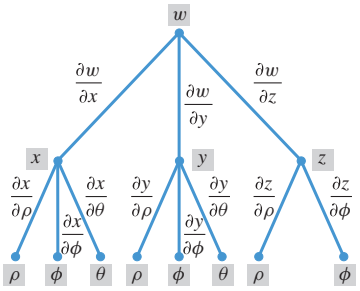



**Figura 13.5.4**

**▶ Exemplo 6** Suponha que

$$w = xy + yz, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad z = e^x$$

Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar $dw/dx$.

***Solução*** Do diagrama de árvore e das fórmulas correspondentes na Figura 13.5.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dx} &= y + (x + z) \cos x + ye^x \\
&= \operatorname{sen} x + (x + e^x) \cos x + e^x \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

Esse resultado pode ser obtido também expressando $w$ explicitamente em termos de $x$ como

$$w = x \operatorname{sen} x + e^x \operatorname{sen} x$$

e, então, derivando em relação a $x$; contudo, tal substituição direta nem sempre é possível. ◀

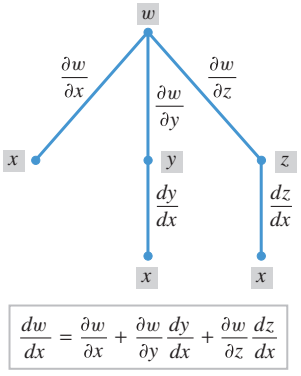



**Figura 13.5.5**

**ADVERTÊNCIA** O símbolo $\partial z$, ao contrário da diferencial $dz$, não tem significado próprio. Por exemplo, se fôssemos "cancelar" símbolos de derivadas parciais na fórmula da regra da cadeia

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

obteríamos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}$$

o que é falso no caso em que $\partial z/\partial u \neq 0$.

Um dos usos mais importantes da regra da cadeia para funções de uma única variável foi o cálculo das derivadas de composições de funções. Os Teoremas 13.5.1 e 13.5.2 são importantes não tanto para o cálculo de fórmulas, mas por permitirem expressar relações entre as várias derivadas. Como uma aplicação, vamos rever o tópico de derivação implícita.

## DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Considere o caso especial em que $z = f(x, y)$ é uma função de $x$ e $y$ e $y$ é uma função diferenciável de $x$. Então, a Equação (5) passa a ser

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{12}$$

Esse resultado pode ser usado para encontrar derivadas de funções que estão definidas implicitamente. Por exemplo, suponha que a equação

$$f(x, y) = c \tag{13}$$

defina $y$ implicitamente como uma função diferenciável de $x$ e que estejamos interessados em encontrar $dy/dx$. Derivando ambos os lados de (13) em relação a $x$ e aplicando (12), obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Assim, se $\partial f/\partial y \neq 0$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

Resumindo, temos o seguinte resultado.

Mostre que a função $y = x$ está definida implicitamente pela equação

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

mas que o Teorema 13.5.3 não pode ser aplicado para descobrir $dy/dx$.

**13.5.3 TEOREMA** *Se a equação $f(x, y) = c$ definir $y$ implicitamente como uma função diferenciável de $x$, e se $\partial f/\partial y \neq 0$, então*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \tag{14}$$

**► Exemplo 7** Dado que

$$x^3 + y^2x - 3 = 0$$

determine $dy/dx$ usando (14) e verifique o resultado usando derivação implícita.

***Solução*** Por (14) com $f(x, y) = x^3 + y^2x - 3$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{3x^2 + y^2}{2yx}$$

Alternativamente, derivando implicitamente a equação dada, obtemos

$$3x^2 + y^2 + x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - 0 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y^2}{2yx}$$

o que é consistente com o resultado obtido por (14). ◄

A regra da cadeia também pode ser usada com derivação parcial implícita. Considere o caso em que $w = f(x, y, z)$ é uma função de $x$, $y$ e $z$ e $z$ é uma função diferenciável de $x$ e $y$. Segue do Teorema 13.5.2 que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \tag{15}$$

Se a equação

$$f(x, y, z) = c \tag{16}$$

definir $z$ implicitamente como uma função diferenciável de $x$ e $y$, então, tomando as derivadas parciais de cada lado de (16) em relação a $x$ e aplicando (15), obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se $\partial f/\partial z \neq 0$, então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}$$

Um resultado análogo vale com $\partial z/\partial y$.

**13.5.4 TEOREMA** *Se a equação $f(x, y, z) = c$ definir $z$ implicitamente como uma função diferenciável de $x$ e $y$, e se $\partial f/\partial z \neq 0$, então*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}$$

**▶ Exemplo 8** Considere a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Encontre $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ no ponto $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Observe a semelhança entre as expressões de $\partial z/\partial y$ encontradas no Exemplo 8 e a encontrada no Exemplo 7 da Seção 13.3.

***Solução*** Pelo Teorema 13.5.4 com $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

No ponto $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, o cálculo dessas derivadas fornece $\partial z/\partial x = -1$ e $\partial z/\partial y = -\frac{1}{2}$. ◀

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.5 (Ver página 959 para respostas.)

1. Suponha que $z = xy^2$ e que $x$ e $y$ sejam funções diferenciáveis de $t$ com $x = 1$, $y = -1$, $dx/dt = -2$ e $dy/dt = 3$ quando $t = -1$. Então $dz/dt =$ _____ quando $t = -1$.
2. Suponha que $C$ seja o gráfico da equação $f(x, y) = 1$ e que essa equação defina $y$ implicitamente como uma função diferenciável de $x$. Se o ponto $(2, 1)$ pertence a $C$ com $f_x(2, 1) = 3$ e $f_y(2, 1) = -1$, então a reta tangente a $C$ no ponto $(2, 1)$ tem inclinação _____.
3. Um retângulo está crescendo de tal modo que, quando seu comprimento mede 5 cm e sua largura mede 2 cm, o comprimento está crescendo a uma taxa de 3 cm/s e a largura está crescendo a uma taxa de 4 cm/s. Nesse instante, a área do retângulo está crescendo a uma taxa de _____.
4. Suponha que $z = x/y$, onde $x$ e $y$ são funções diferenciáveis de $u$ e $v$ tais que $x = 3$, $y = 1$, $\partial x/\partial u = 4$, $\partial x/\partial v = -2$, $\partial y/\partial u = 1$ e $\partial y/\partial v = -1$ quando $u = 2$ e $v = 1$. Se $u = 2$ e $v = 1$, então $\partial z/\partial u =$ _____ e $\partial z/\partial v =$ _____.

## EXERCÍCIOS 13.5

**1-6** Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar $dz/dt$. ■

1. $z = 3x^2y^3;\ x = t^4, y = t^2$
2. $z = \ln(2x^2 + y);\ x = \sqrt{t}, y = t^{2/3}$
3. $z = 3\cos x - \operatorname{sen} xy;\ x = 1/t, y = 3t$
4. $z = \sqrt{1 + x - 2xy^4};\ x = \ln t, y = t$
5. $z = e^{1-xy};\ x = t^{1/3}, y = t^3$
6. $z = \cosh^2 x\,y;\ x = t/2, y = e^t$

**7-10** Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar $dw/dt$. ■

**7.** $w = 5x^2y^3z^4;\ x = t^2, y = t^3, z = t^5$

**8.** $w = \ln(3x^2 - 2y + 4z^3);\ x = t^{1/2}, y = t^{2/3}, z = t^{-2}$

**9.** $w = 5\cos xy - \operatorname{sen} xz;\ x = 1/t, y = t, z = t^3$

**10.** $w = \sqrt{1 + x - 2yz^4x};\ x = \ln t, y = t, z = 4t$

## ENFOCANDO CONCEITOS

**11.** Suponha que

$$w = x^3y^2z^4; \quad x = t^2, \quad y = t + 2, \quad z = 2t^4$$

Encontre a taxa de variação de $w$ em relação a $t$ em $t = 1$ usando a regra da cadeia e, então, confira sua resposta expressando $w$ como uma função de $t$ e derivando.

**12.** Suponha que

$$w = x \operatorname{sen} yz^2; \quad x = \cos t, \quad y = t^2, \quad z = e^t$$

Encontre a taxa de variação de $w$ em relação a $t$ em $t = 0$ usando a regra da cadeia e, então, confira sua resposta expressando $w$ como uma função de $t$ e derivando.

**13.** Suponha que $z = f(x, y)$ seja diferenciável no ponto $(4, 8)$ com $f_x(4, 8) = 3$ e $f_y(4, 8) = -1$. Se $x = t^2$ e $y = t^3$, encontre $dz/dt$ com $t = 2$.

**14.** Suponha que $w = f(x, y, z)$ seja diferenciável no ponto $(1, 0, 2)$ com $f_x(1, 0, 2) = 1, f_y(1, 0, 2) = 2$ e $f_z(1, 0, 2) = 3$. Se $x = t$, $y = \operatorname{sen}(\pi t)$ e $z = t^2 + 1$, encontre $dw/dt$ com $t = 1$.

**15.** Explique como a regra da derivada do produto de funções de uma só variável pode ser vista como uma decorrência da regra da cadeia aplicada a uma função particular de duas variáveis.

**16.** Um aluno tenta derivar a função $x^x$ usando a regra da derivada de potências, obtendo o resultado errado $x \cdot x^{x-1}$. Um outro aluno tenta derivar $x^x$ tratando-a como uma função exponencial, obtendo o resultado errado $(\ln x)x^x$. Use a regra da cadeia para explicar por que a derivada correta é a soma desses dois resultados errados.

**17-22** Use uma forma apropriada da regra da cadeia para determinar $\partial z/\partial u$ e $\partial z/\partial v$. ■

**17.** $z = 8x^2y - 2x + 3y;\ x = uv, y = u - v$

**18.** $z = x^2 - y \operatorname{tg} x;\ x = u/v, y = u^2v^2$

**19.** $z = x/y;\ x = 2\cos u, y = 3 \operatorname{sen} v$

**20.** $z = 3x - 2y;\ x = u + v \ln u, y = u^2 - v \ln v$

**21.** $z = e^{x^2y};\ x = \sqrt{uv}, y = 1/v$

**22.** $z = \cos x \operatorname{sen} y;\ x = u, y = u^2 + v^2$

**23-30** Use formas apropriadas da regra da cadeia para encontrar as derivadas. ■

**23.** Seja $T = x^2y - xy^3 + 2$; $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$. Encontre $\partial T/\partial r$ e $\partial T/\partial\theta$.

**24.** Sejam $R = e^{2s-t^2}$; $s = 3\phi$, $t = \phi^{1/2}$. Encontre $dR/d\phi$.

**25.** Sejam $t = u/v$; $u = x^2 - y^2$, $v = 4xy^3$. Encontre $\partial t/\partial x$ e $\partial t/\partial y$.

**26.** Sejam $w = rs/(r^2 + s^2)$; $r = uv$, $s = u - 2v$. Encontre $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$.

**27.** Seja $z = \ln(x^2 + 1)$, onde $x = r\cos\theta$. Encontre $\partial z/\partial r$ e $\partial z/\partial\theta$.

**28.** Seja $u = rs^2 \ln t$, $r = x^2$, $s = 4y + 1$, $t = xy^3$. Determine $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$.

**29.** Seja $w = 4x^2 + 4y^2 + z^2$, $x = \rho \operatorname{sen}\theta\cos\phi$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\phi$. Determine $\partial w/\partial\rho$, $\partial w/\partial\phi$ e $\partial w/\partial\theta$.

**30.** Seja $w = 3xy^2z^3$, $y = 3x^2 + 2$, $z = \sqrt{x - 1}$. Encontre $dw/dx$.

**31.** Use uma regra da cadeia para determinar o valor de $\left.\dfrac{dw}{ds}\right|_{s=1/4}$ se $w = r^2 - r \operatorname{tg}\theta$; $r = \sqrt{s}$, $\theta = \pi s$.

**32.** Use uma regra da cadeia para determinar o valor de

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=1,v=-2} \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{u=1,v=-2}$$

se $f(x, y) = x^2y^2 - x + 2y$; $x = \sqrt{u}$, $y = uv^3$.

**33.** Use uma regra da cadeia para determinar o valor de

$$\left.\frac{\partial z}{\partial r}\right|_{r=2,\theta=\pi/6} \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \theta}\right|_{r=2,\theta=\pi/6}$$

se $z = xye^{x/y}$; $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$.

**34.** Use uma regra da cadeia para determinar $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=3}$ se $z = x^2y$; $x = t^2$, $y = t + 7$.

**35.** Sejam $a$ e $b$ dois lados de um triângulo que formam um ângulo $\theta$. Suponha que $a$, $b$ e $\theta$ variem com o tempo de tal forma que a área do triângulo permaneça constante. Em um certo instante, temos $a = 5$ cm, $b = 4$ cm e $\theta = \pi/6$ radianos, e $a$ e $b$ aumentam a uma taxa de 3 cm/s. Dê uma estimativa da taxa de variação de $\theta$ nesse instante.

**36.** A voltagem $V$ (em volts) em um circuito é dada pela lei de Ohm: $V = IR$, em que $I$ é a corrente (em ampères) através do circuito e $R$ é a resistência (em ohms). Se dois circuitos com resistências $R_1$ e $R_2$ forem conectados em paralelo, então a resistência combinada $R$ será dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Suponha que a corrente seja de 3 ampères e esteja crescendo a uma taxa de $10^{-2}$ ampères por segundo, $R_1$ seja 2 ohms e esteja crescendo a uma taxa de 0,4 ohm/s e $R_2$ seja 5 ohms e esteja decrescendo a uma taxa de 0,7 ohm/s. Dê uma estimativa da taxa de variação da voltagem.

**37-40 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**37.** Os símbolos $\partial z$ e $\partial x$ são definidos de tal maneira que a derivada parcial $\partial z/\partial x$ possa ser interpretada como um quociente.

**38.** Se $z$ for uma função diferenciável de $x_1$, $x_2$ e $x_3$ e se $x_i$ for uma função diferenciável de $t$, com $i = 1, 2, 3$, então $z$ será uma função diferenciável de $t$ e

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$

**39.** Se $z$ for uma função diferenciável de $x$ e $y$ e se $x$ e $y$ forem funções duas vezes deriváveis de $t$, então $z$ será uma função duas vezes derivável de $t$ e

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

**40.** Se $f(x, y)$ for uma função diferenciável de $x$ e $y$ e se a reta $y = x$ for uma curva de nível de $f$, então $f_y(t, t) = -f_x(t, t)$ com quaisquer números reais $t$.

**41-44** Use o Teorema 13.5.3 para encontrar $dy/dx$ e verifique seu resultado usando diferenciação implícita. ■

**41.** $x^2y^3 + \cos y = 0$ **42.** $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 5$

**43.** $e^{xy} + ye^{y} = 1$ **44.** $x - \sqrt{xy} + 3y = 4$

**45-48** Encontre $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ por derivação implícita e confirme que o resultado obtido é consistente com os antecipados pelas fórmulas no Teorema 13.5.4. ■

**45.** $x^2 - 3yz^2 + xyz - 2 = 0$ **46.** $\ln(1 + z) + xy^2 + z = 1$

**47.** $ye^{x} - 5 \operatorname{sen} 3z = 3z$

**48.** $e^{xy} \cos yz - e^{yz} \operatorname{sen} xz + 2 = 0$

**49.** (a) Suponha que $z = f(u)$ e $u = g(x, y)$. Desenhe um diagrama de árvore e use-o para construir as regras da cadeia que expressam $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ em termos de $dz/du$, $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$.

(b) Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{dz}{du}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d^2z}{du^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{dz}{du}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{d^2z}{du^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{d^2z}{du^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

**50.** (a) Seja $z = f(x^2 - y^2)$. Use o resultado do Exercício 49 (a) para mostrar que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(b) Seja $z = f(xy)$. Use o resultado do Exercício 49 (a) para mostrar que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(c) Confirme o resultado da parte (a) no caso em que $z = \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$.

(d) Confirme o resultado da parte (b) no caso em que $z = e^{xy}$.

**51.** Seja $f$ uma função diferenciável de uma variável e seja $z = f(x + 2y)$. Mostre que

$$2\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

**52.** Seja $f$ uma função diferenciável de uma variável e seja $z = f(x^2 + y^2)$. Mostre que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

**53.** Seja $f$ uma função diferenciável de uma variável e seja $w = f(u)$, onde $u = x + 2y + 3z$. Mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 6\frac{dw}{du}$$

**54.** Seja $f$ uma função diferenciável de uma variável e seja $w = f(\rho)$, onde $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Mostre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{dw}{d\rho}\right)^2$$

**55.** Seja $z = f(x - y, y - x)$. Mostre que $\partial z/\partial x + \partial z/\partial y = 0$.

**56.** Seja $f$ uma função diferenciável de três variáveis e suponha que $w = f(x - y, y - z, z - x)$. Mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

**57.** Nas partes (a) a (e), suponha que a equação $z = f(x, y)$ seja expressa na forma polar $z = g(r, \theta)$ fazendo a substituição $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$.

(a) Considere $r$ e $\theta$ como funções de $x$ e $y$ e use derivação implícita para mostrar que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

(b) Considere $r$ e $\theta$ como funções de $x$ e $y$ e use derivação implícita para mostrar que

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

(c) Use os resultados das partes (a) e (b) para mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\cos\theta$$

(d) Use o resultado da parte (c) para mostrar que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(e) Use o resultado da parte (c) para mostrar que se $z = f(x, y)$ satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

então $z = g(r, \theta)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

e reciprocamente. Esta última equação é chamada de ***forma polar da equação de Laplace.***

**58.** Mostre que a função

$$z = \text{arc tg}\,\frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

satisfaz a equação de Laplace; então, faça a substituição $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e mostre que a função resultante de $r$ e $\theta$ satisfaz a forma polar da equação de Laplace, dada na parte (e) do Exercício 57.

**59.** (a) Mostre que se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (Exercício 104, Seção 13.3) e se $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, então

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Isso é chamado de ***forma polar das equações de Cauchy-Riemann***.

(b) Mostre que as funções

$$u = \ln(x^2 + y^2), \quad v = 2\,\text{arc tg}(y/x)$$

satisfazem as equações de Cauchy-Riemann; então, faça a substituição $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e mostre que as funções resultantes de $r$ e $\theta$ satisfazem a forma polar das equações de Cauchy-Riemann.

**60.** Lembre da Fórmula (6) da Seção 13.3 que, sob condições apropriadas, uma corda dedilhada satisfaz a equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde $c$ é uma constante positiva.

(a) Mostre que uma função da forma $u(x, t) = f(x + ct)$ satisfaz a equação da onda.

(b) Mostre que uma função da forma $u(x, \text{t}) = g(x - ct)$ satisfaz a equação da onda.

(c) Mostre que uma função da forma

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

satisfaz a equação da onda.

(d) Pode ser provado que toda solução da equação da onda pode ser expressa na forma enunciada na parte (c). Confirme que $u(x, t) = \text{sen}t\,\text{sen}x$ satisfaz a equação para $c = 1$ e, então, use identidades trigonométricas apropriadas para expressar essa função na forma $f(x + t) + g(x - t)$.

**61.** Seja $f$ uma função diferenciável de três variáveis e sejam $w = f(x, y, z)$, $x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta$, $y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta$ e $z = \rho\cos\phi$. Expresse $\partial w/\partial\rho$, $\partial w/\partial\phi$ e $\partial w/\partial\theta$ em termos de $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial w/\partial z$.

**62.** Seja $w = f(x, y, z)$ diferenciável, onde $z = g(x, y)$. Tomando $x$ e $y$ como variáveis independentes, expresse cada uma das seguintes em termos de $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$, $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

(a) $\partial w/\partial x$ (b) $\partial w/\partial y$

**63.** Seja $w = \ln(e^r + e^s + e^t + e^u)$. Mostre que

$$w_{rstu} = -6e^{r+s+t+u-4w}$$

[*Sugestão*: Tire vantagem da relação $e^w = e^r + e^s + e^t + e^u$.]

**64.** Suponha que $w$ seja uma função diferenciável de $x_1$, $x_2$ e $x_3$ e

$$x_1 = a_1y_1 + b_1y_2$$
$$x_2 = a_2y_1 + b_2y_2$$
$$x_3 = a_3y_1 + b_3y_2$$

onde os $a_i$ e $b_i$ são constantes. Expresse $\partial w/\partial y_1$ e $\partial w/\partial y_2$ em termos de $\partial w/\partial x_1$, $\partial w/\partial x_2$ e $\partial w/\partial x_3$.

**65.** (a) Seja $w$ uma função diferenciável diferenciável de $x_1$, $x_2$, $x_3$ e $x_4$ e seja cada $x_i$ uma função diferenciável de $t$. Encontre uma fórmula da regra da cadeia para $dw/dt$.

(b) Seja $w$ uma função diferenciável de $x_1$, $x_2$, $x_3$ e $x_4$ e seja cada $x_i$ uma função diferenciável de $v_1$, $v_2$ e $v_3$. Encontre as fórmulas da regra da cadeia para $\partial w/\partial v_1$, $\partial w/\partial v_2$ e $\partial w/\partial v_3$.

**66.** Seja $w = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^k$, onde $n \geq 2$. Determine os valores de $k$ com os quais vale

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2} = 0$$

**67.** Deduza a identidade

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

tomando $u = g(x)$ e $v = h(x)$ e, então, derivando a função

$$F(u, v) = \int_v^u f(t)\,dt$$

em relação a $x$.

**68.** Prove: Se $f$, $f_x$ e $f_y$ são contínuas em uma região circular contendo $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, então existirá um ponto $(x^*, y^*)$ no segmento que une $A$ e $B$ tal que

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f_x(x^*, y^*)(x_1 - x_0) + f_y(x^*, y^*)(y_1 - y_0)$$

Esse resultado é a versão bidimensional do Teorema do Valor Médio. [*Sugestão*: Expresse o segmento de reta que une $A$ e $B$ na forma paramétrica e use o Teorema do Valor Médio para funções de uma variável.]

**69.** Prove: Se $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$ em toda uma região circular, então $f(x, y)$ é constante naquela região. [*Sugestão*: Use o resultado do Exercício 68.]

**70.** **Texto** Use diferenciais para dar uma justificativa informal para a regra da cadeia de derivadas.

**71.** **Texto** Compare o uso da fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

com o processo da derivação implícita.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.5

**1.** $-8$ **2.** 3 **3.** 26 cm$^2$/s **4.** 1; 1

# 13.6 DERIVADAS DIRECIONAIS E GRADIENTES

*As derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ representam as taxas de variação de $f(x, y)$ nas direções paralelas aos eixos x e y. Nesta seção, investigaremos taxas de variação de $f(x, y)$ em outras direções.*

## DERIVADAS DIRECIONAIS

Nesta seção, estenderemos o conceito de derivada *parcial* à noção mais geral de derivada *direcional*. Vimos que as derivadas parciais de uma função dão as taxas de variação instantâneas dessa função nas direções paralelas aos eixos coordenados. As derivadas direcionais nos permitem calcular taxas de variação de uma função em relação a *qualquer* direção.

Suponha que queiramos calcular a taxa de variação instantânea de uma função $f(x, y)$ em relação à distância em um certo ponto $(x_0, y_0)$ em alguma direção. Como há uma infinidade de direções nas quais um ponto pode se mover no plano $(x_0, y_0)$, precisamos de algum método para descrever uma direção especificada começando em $(x_0, y_0)$. Uma maneira de fazer isso é usar um vetor unitário

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}$$

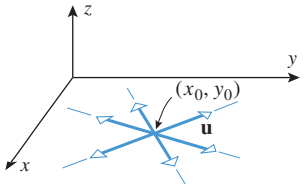



Figura 13.6.1

que tenha ponto inicial em $(x_0, y_0)$ e aponte na direção desejada (Figura 13.6.1). Esse vetor determina uma reta $l$ no plano $xy$ que pode ser expressa parametricamente como

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2 \tag{1}$$

Como $\mathbf{u}$ é um vetor unitário, $s$ é o parâmetro comprimento de arco que tem seu ponto de referência em $(x_0, y_0)$ e tem valores positivos na direção e sentido de $\mathbf{u}$. Se $s = 0$, o ponto $(x, y)$ está no ponto de referência $(x_0, y_0)$ e se move ao longo da reta $l$ na direção e sentido de $\mathbf{u}$ quando $s$ cresce. A variável $z = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$ é uma função do parâmetro $s$ na reta $l$. Então, o valor da derivada $dz/ds$ em $s = 0$ dá a taxa de variação instantânea de $f(x, y)$ em relação à distância de $(x_0, y_0)$ na direção e sentido de $\mathbf{u}$.

**13.6.1** DEFINIÇÃO Se $f(x, y)$ for uma função de $x$ e $y$ e se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}$ um vetor unitário, então a ***derivada direcional de f na direção e sentido de*** $\mathbf{u}$ em $(x_0, y_0)$ será denotada por $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ e definida por

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \frac{d}{ds}\left[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)\right]_{s=0} \tag{2}$$

desde que esse limite exista.

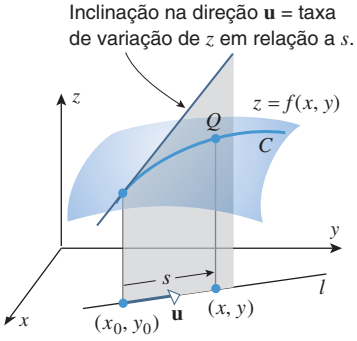



Figura 13.6.2

Geometricamente, $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ pode ser interpretada como a ***inclinação da superfície*** $z = f(x, y)$ ***na direção de*** $\mathbf{u}$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (Figura 13.6.2). Em geral, o valor de $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ dependerá tanto do ponto $(x_0, y_0)$ quanto da direção e do sentido do vetor $\mathbf{u}$. Assim, em um ponto fixado da superfície, a inclinação dessa superfície varia com a direção e o sentido (Figura 13.6.3). Analiticamente, a derivada direcional representa a ***taxa de variação instantânea de f (x, y) em relação à distância na direção e sentido de*** $\mathbf{u}$ no ponto $(x_0, y_0)$.

▶ **Exemplo 1** Seja $f(x, y) = x\,y$. Encontre e interprete $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$ com o vetor unitário

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

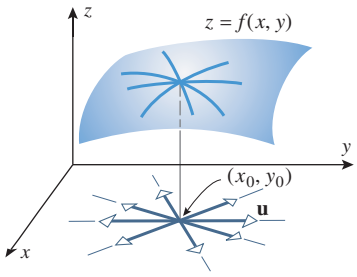



**Figura 13.6.3**

***Solução*** Segue da Equação (2) que

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \frac{d}{ds}\left[ f\left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}, 2 + \frac{s}{2}\right)\right]_{s=0}$$

Como

$$f\left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}, 2 + \frac{s}{2}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}s}{2}\right)\left(2 + \frac{s}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)s + 2$$

temos

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \frac{d}{ds}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)s + 2\right]_{s=0}$$
$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{1}{2} + \sqrt{3}\right]_{s=0} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

Como $\frac{1}{2} + \sqrt{3} \approx 2{,}23$, concluímos que se percorrermos uma pequena distância a partir do ponto $(1, 2)$ na direção e sentido de $\mathbf{u}$, a função $f(x, y) = xy$ cresce cerca de 2,23 vezes a distância percorrida. ◀

A definição de derivada direcional de uma função $f(x, y, z)$ de três variáveis é análoga à Definição 13.6.1.

**13.6.2 DEFINIÇÃO** Se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ for um vetor unitário, e se $f(x, y, z)$ for uma função de $x$, $y$ e $z$, então a ***derivada direcional de f na direção e sentido de*** $\mathbf{u}$ em $(x_0, y_0, z_0)$ será denotada por $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0)$ e definida por

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{ds}\left[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3)\right]_{s=0} \tag{3}$$

desde que esse limite exista.

Embora a Equação (3) não tenha uma interpretação geométrica conveniente, ainda podemos interpretar as derivadas direcionais de funções de três variáveis em termos de taxas de variação instantâneas em direções e sentidos especificados.

As derivadas direcionais de uma função que é diferenciável em um ponto existem em qualquer direção e sentido nesse ponto e podem ser calculadas diretamente em termos das derivadas parciais de primeira ordem da função.

**13.6.3 TEOREMA**

(*a*) *Se $f(x, y)$ for diferenciável em $(x_0, y_0)$, e se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ for um vetor unitário, então a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ existirá e será dada por*

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \tag{4}$$

(*b*) *Se $f(x, y, z)$ for diferenciável em $(x_0, y_0, z_0)$ e se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ for um vetor unitário, então a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0)$ existirá e será dada por*

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)u_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)u_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)u_3 \tag{5}$$

**DEMONSTRAÇÃO** Vamos dar a prova de $(a)$; a de $(b)$ é análoga e será omitida. A função $z = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)$ é a composição da função $z = f(x, y)$ com as funções

$$x = x(s) = x_0 + su_1 \quad \text{e} \quad y = y(s) = y_0 + su_2$$

Por isso, a regra da cadeia fornece imediatamente

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) &= \frac{d}{ds}\left[f(x_0 + su_1, y_0 + su_2)\right]_{s=0} \\ &= \left.\frac{dz}{ds}\right|_{s=0} = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \end{aligned}$$ ■

Podemos usar o Teorema 13.6.3 para confirmar o resultado do Exemplo 1. Para $f(x, y) = xy$ temos $f_x(1, 2) = 2$ e $f_y(1, 2) = 1$ (verifique). Com

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

a Equação (4) fornece

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

o que está de acordo com nossa solução no Exemplo 1.

Lembre que na Fórmula (13) da Seção 11.2 vimos que todo vetor unitário $\mathbf{u}$ do plano $xy$ pode ser expresso como

$$\mathbf{u} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j} \tag{6}$$

onde $\phi$ é o ângulo do eixo $x$ positivo para $\mathbf{u}$. Assim, a Fórmula (4) também pode se expressa como

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\phi + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\phi \tag{7}$$

**▶ Exemplo 2** Obtenha a derivada direcional de $f(x, y) = e^{xy}$ em $(-2, 0)$ na direção e no sentido do vetor unitário que faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo $x$ positivo.

***Solução*** As derivadas parciais de $f$ são

$$f_x(x, y) = ye^{xy}, \quad f_y(x, y) = xe^{xy}$$
$$f_x(-2, 0) = 0, \quad f_y(-2, 0) = -2$$

O vetor unitário $\mathbf{u}$ que faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo $x$ positivo é

$$\mathbf{u} = \cos(\pi/3)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\pi/3)\mathbf{j} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

Assim, por (7)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(-2, 0) &= f_x(-2, 0)\cos(\pi/3) + f_y(-2, 0)\operatorname{sen}(\pi/3) \\ &= 0(1/2) + (-2)(\sqrt{3}/2) = -\sqrt{3} \end{aligned}$$ ◀

Observe que, no Exemplo 3, utilizamos um ***vetor unitário*** para especificar a direção e o sentido da derivada direcional. Isso é exigido para que possamos aplicar a Fórmula (4) ou a Fórmula (5).

**▶ Exemplo 3** Obtenha a derivada direcional de $f(x, y, z) = x^2y - yz^3 + z$ no ponto $(1, -2, 0)$ na direção e no sentido do vetor $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

***Solução*** As derivadas direcionais de $f$ são

$$f_x(x, y, z) = 2xy, \quad f_y(x, y, z) = x^2 - z^3, \quad f_z(x, y, z) = -3yz^2 + 1$$
$$f_x(1, -2, 0) = -4, \quad f_y(1, -2, 0) = 1, \quad f_z(1, -2, 0) = 1$$

Como $\mathbf{a}$ não é um vetor unitário, normalizamos $\mathbf{a}$ e encontramos

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{9}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

Então, pela Fórmula (5), obtemos

$$D_{\mathbf{u}} f(1, -2, 0) = (-4)\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -3 \quad \blacktriangleleft$$

## O GRADIENTE

A Fórmula (4) pode ser dada em termos do produto escalar como

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) &= (f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \\ &= (f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Analogamente, a Fórmula (5) pode ser expressa por

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = (f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}$$

Em ambos os casos, a derivada direcional é dada em termos do produto escalar do vetor de direção $\mathbf{u}$ com um novo vetor construído a partir das derivadas parciais de $f$.

**13.6.4 DEFINIÇÃO**

(a) Se $f$ for uma função de $x$ e $y$, então o ***gradiente de f*** será definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \tag{8}$$

(b) Se $f$ for uma função de $x$, $y$ e $z$, então o ***gradiente de f*** será definido por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \tag{9}$$

Lembre que o símbolo $\nabla f$ não é o produto de $\nabla$ com $f$. Pense em $\nabla$ como um "operador" que age sobre funções $f$ para produzir o gradiente $\nabla f$.

O símbolo $\nabla$ é um delta invertido. (Esse símbolo costuma ser lido como "del", ou então "nabla", que vem a ser o nome de uma antiga harpa hebraica de dez cordas que tem esse formato.)

As Fórmulas (4) e (5), agora, podem ser escritas como

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} \tag{10}$$

e

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{u} \tag{11}$$

respectivamente. Por exemplo, usando a Fórmula (11), nossa solução do Exemplo 3 toma a forma

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, -2, 0) = \nabla f(1, -2, 0) \cdot \mathbf{u} &= (-4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \left(\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}\right) \\ &= (-4)\left(\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3} = -3 \end{aligned}$$

A Fórmula (10) pode ser interpretada como significando que a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0)$ na direção de $\mathbf{u}$ é o produto escalar do gradiente com $\mathbf{u}$ (Figura 13.6.4).

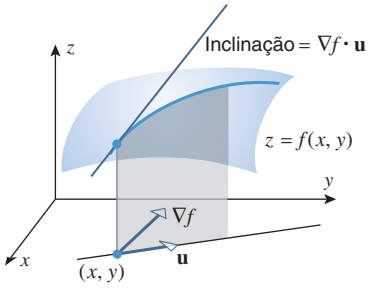



**Figura 13.6.4**

## PROPRIEDADES DO GRADIENTE

O gradiente não é meramente um dispositivo notacional para simplificar a fórmula da derivada direcional: veremos que o comprimento e a direção do gradiente $\nabla f$ fornecem informação importante sobre a função $f$ e a superfície $z = f(x, y)$. Por exemplo, suponha que $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$ e usemos a Fórmula (4) da Seção 12.3 para reescrever (10) como

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(x, y)\| \, \|\mathbf{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(x, y)\| \cos\theta \tag{12}$$

onde $\theta$ é o ângulo entre $\nabla f(x, y)$ e $\mathbf{u}$. Essa equação nos diz que o valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f$ no ponto $(x, y)$ é $\|\nabla f(x, y)\|$ e que esse máximo ocorre quando $\theta = 0$, isto é, quando $\mathbf{u}$ estiver na direção e no sentido de $\nabla f(x, y)$. Geometricamente, isso significa:

*Em $(x, y)$, a superfície $z = f(x, y)$ tem sua inclinação máxima na direção do gradiente, e a inclinação máxima é $\|\nabla f(x, y)\|$.*

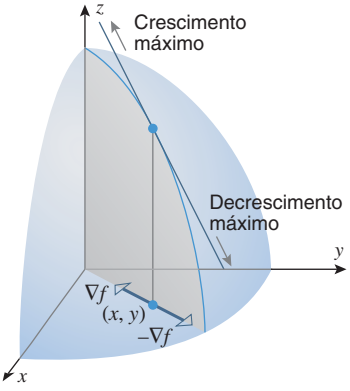



**Figura 13.6.5**

Ou seja, a função $f(x, y)$ cresce mais rapidamente na direção e no sentido do gradiente (Figura 13.6.5).

Analogamente, (12) nos diz que o valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ no ponto $(x, y)$ é $-\|\nabla f(x, y)\|$ e que esse valor ocorre quando $\theta = \pi$, isto é, quando $\mathbf{u}$ estiver no sentido oposto a $\nabla f(x, y)$. Geometricamente, isso significa:

*Em $(x, y)$, a superfície $z = f(x, y)$ tem sua inclinação mínima no sentido oposto ao do gradiente, e a inclinação mínima é $-\|\nabla f(x, y)\|$.*

Ou seja, a função $f(x, y)$ decresce mais rapidamente no sentido oposto ao do gradiente (Figura 13.6.5).

Finalmente, no caso em que $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, segue de (12) que $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = 0$ em todas as direções no ponto $(x, y)$. Isso ocorre tipicamente onde a superfície $z = f(x, y)$ tiver um "máximo relativo", um "mínimo relativo" ou um ponto de sela.

Uma análise parecida pode ser feita com funções de três variáveis. Consequentemente, temos o resultado a seguir.

**13.6.5 TEOREMA** *Seja $f$ uma função de duas ou três variáveis e denotemos por $P$ o ponto $P(x_0, y_0)$ ou $P(x_0, y_0, z_0)$, respectivamente. Suponha que $f$ seja diferenciável em $P$.*

(a) *Se $\nabla f = \mathbf{0}$ em $P$, então todas as derivadas direcionais de $f$ em $P$ serão nulas.*

(b) *Se $\nabla f \neq \mathbf{0}$ em $P$, então, dentre todas as possíveis derivadas direcionais de $f$ em $P$, a derivada em $P$ na direção e sentido de $\nabla f$ em $P$ terá o maior valor. O valor dessa derivada direcional máxima será $\|\nabla f\|$.*

(c) *Se $\nabla f \neq \mathbf{0}$ em $P$, então dentre todas as possíveis derivadas direcionais de $f$ em $P$, a derivada em $P$ no sentido oposto ao de $\nabla f$ em $P$ terá o menor valor. O valor dessa derivada direcional mínima será $-\|\nabla f\|$.*

**► Exemplo 4** Seja $f(x, y) = x^2 e^y$. Determine o valor máximo de uma derivada direcional em $(-2, 0)$ e o vetor unitário na direção e no sentido do qual o valor máximo ocorre.

***Solução*** Uma vez que

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j} = 2xe^y\,\mathbf{i} + x^2 e^y\,\mathbf{j}$$

o gradiente de $f$ em $(-2, 0)$ é

$$\nabla f(-2, 0) = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

Pelo Teorema 13.6.5, o valor máximo da derivada direcional é

$$\|\nabla f(-2, 0)\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Esse máximo ocorre na direção e no sentido de $\nabla f(-2, 0)$. O vetor unitário nessa direção e sentido é

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(-2, 0)}{\|\nabla f(-2, 0)\|} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \blacktriangleleft$$

Qual será o valor mínimo de uma derivada direcional de

$$f(x, y) = x^2 e^y$$

em $(-2, 0)$?

## GRADIENTES SÃO NORMAIS ÀS CURVAS DE NÍVEL

Vimos que o gradiente aponta na direção e no sentido em que a função cresce mais rapidamente. Vejamos, agora, como direção e sentido da taxa de crescimento máxima podem ser determinados a partir do mapa de contornos de uma função $f(x, y)$ de duas variáveis. Suponha que $(x_0, y_0)$ seja um ponto na curva de nível $f(x, y) = c$ de $f$ e suponha que essa curva possa ser dada por uma parametrização lisa como

$$x = x(s), \quad y = y(s) \tag{13}$$

onde $s$ é um parâmetro de comprimento de arco. Lembrando da Fórmula (6) da Seção 12.4, temos que o vetor tangente unitário a (13) é

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(s) = \left(\frac{dx}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy}{ds}\right)\mathbf{j}$$

Como $\mathbf{T}$ dá a direção ao longo da qual $f$ é praticamente constante, é de se esperar que a taxa de variação instantânea de $f$ em relação à distância na direção de $\mathbf{T}$ seja 0. Isto é, estamos esperando que

$$D_{\mathbf{T}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$$

Para mostrar que isso realmente ocorre, derivamos ambos os lados da equação $f(x, y) = c$ em relação a $s$. Supondo que $f$ seja diferenciável em $(x, y)$, podemos usar a regra da cadeia para obter

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) = 0$$

ou, alternativamente, como

$$\nabla f(x, y) \cdot \mathbf{T} = 0$$

Portanto, se $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$, então $\nabla f(x, y)$ deveria ser normal à curva de nível $f(x, y) = c$ em qualquer ponto $(x, y)$ dessa curva.

Em disciplinas mais avançadas, prova-se que se $f(x, y)$ tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas e se $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, então o gráfico de $f(x, y) = c$ na vizinhança de $(x_0, y_0)$ realmente é uma curva lisa por $(x_0, y_0)$. Além disso, também sabemos pelo Teorema 13.4.4 que $f$ será diferenciável em $(x_0, y_0)$. Portanto, temos o seguinte resultado.

Mostre que as curvas de nível de

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

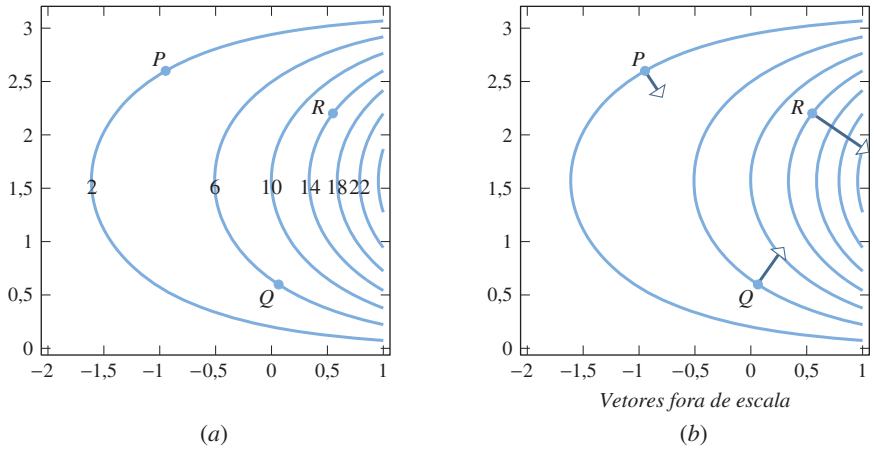
são círculos e verifique o Teorema 13.6.6 em $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

**13.6.6 TEOREMA** *Suponha que $z = f(x, y)$ tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um disco aberto centrado em $(x_0, y_0)$ e que $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Então, $\nabla f(x_0, y_0)$ será normal à curva de nível de $f$ por $(x_0, y_0)$.*

Quando examinamos um mapa de contornos, instintivamente consideramos a distância entre curvas de nível adjacentes como sendo medida em uma direção normal às curvas. Se os

contornos corresponderem a valores igualmente espaçados de $f$, então quanto mais próximas aparentarem estar as curvas de nível, mais rapidamente os valores de $f$ deverão variar nessa direção normal. Segue dos Teoremas 13.6.5 e 13.6.6 que essa taxa de variação de $f$ é dada por $\|\nabla f(x, y)\|$. Assim, quanto mais próximas aparentarem estar as curvas de nível, maior será a magnitude do gradiente de $f$.

► **Exemplo 5** Na Figura 13.6.6*a*, é dado um mapa de contornos de uma função $f$. Esboce as direções e os sentidos dos vetores gradientes de $f$ nos pontos $P$, $Q$ e $R$. Em quais desses três pontos o gradiente tem magnitude máxima? E mínima?




(*a*) (*b*)

**Figuras 13.6.6**

***Solução*** Segue dos Teoremas 13.6.5 e 13.6.6 que as direções e sentidos dos vetores gradientes serão conforme esboçado na Figura 13.6.6*b*. A partir da densidade das curvas de nível, podemos adivinhar que o gradiente de $f$ tem magnitude máxima em $R$ e mínima em $P$, com a magnitude em $Q$ estando entre essas duas. ◄

**OBSERVAÇÃO**

Se $(x_0, y_0)$ for um ponto da curva de nível $f(x, y) = c$, então a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ nesse ponto na direção e no sentido de $\mathbf{u}$ será

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

Se $\mathbf{u}$ for tangente à curva de nível em $(x_0, y_0)$, então $f(x, y)$ não estará crescendo nem decrescendo nessa direção, logo $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = 0$. Assim, $\nabla f(x_0, y_0)$, $-\nabla f(x_0, y_0)$ e o vetor tangente $\mathbf{u}$ indicam a direção da inclinação máxima, inclinação mínima e inclinação zero em um ponto $(x_0, y_0)$ da curva de nível (Figura 13.6.7). Bons esquiadores usam esses fatos intuitivamente para controlar suas velocidades ziguezagueando rampas abaixo – eles esquiam pela rampa, com seus esquis tangentes a curvas de nível para parar seu movimento de descida, e apontam seus esquis rampa abaixo e normais à curva de nível para obter a descida mais rápida.

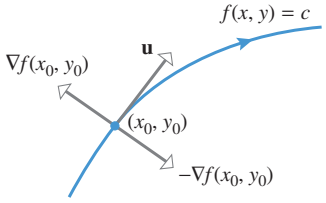



**Figura 13.6.7**

## ■ UMA APLICAÇÃO DE GRADIENTES

Há inúmeras aplicações nas quais o movimento de um objeto deve ser controlado de forma que se mova em direção a um fonte de calor. Por exemplo, em aplicações médicas, a operação de certos equipamentos para diagnósticos é projetada para localizar fontes de calor geradas por tumores ou infecções e, em aplicações militares, a trajetória de míssieis que procuram o calor é controlada para procurar e destruir aeronaves inimigas. O exemplo seguinte ilustra como os gradientes são usados para resolver tais problemas.

UPI Photo/Michael Ammons/Air Force/ Landov LLC

*Os mísseis "Stinger" e "Sidewinder" usam sensores infravermelhos para medir gradientes de temperatura.*

► **Exemplo 6** Uma partícula que procura o calor está localizada no ponto (2, 3) de uma placa lisa de metal, cuja temperatura em um ponto $(x, y)$ é

$$T(x, y) = 10 - 8x^2 - 2y^2$$

Determine uma equação para a trajetória da partícula se ela mover-se continuamente na direção do aumento máximo da temperatura.

***Solução*** Suponha que a trajetória esteja representada parametricamente pelas equações

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

onde a partícula está no ponto (2, 3) no instante $t = 0$. Como a partícula se move na direção do aumento máximo da temperatura, a direção do seu movimento no instante $t$ está na direção do gradiente de $T(x, y)$ e, portanto, seu vetor velocidade $\mathbf{v}(t)$ no instante $t$ aponta na direção do gradiente. Desse modo, existe um escalar $k$ que depende de $t$ tal que

$$\mathbf{v}(t) = k\nabla T\,(x, y)$$

de modo que temos

$$\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = k(-16x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j})$$

Equacionando os componentes, obtemos

$$\frac{dx}{dt} = -16kx, \quad \frac{dy}{dt} = -4ky$$

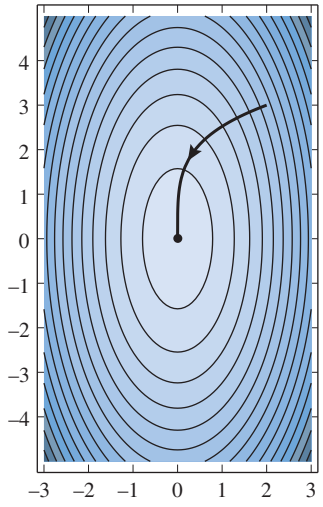


**Figura 13.6.8**

e dividindo para eliminar $k$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4ky}{-16kx} = \frac{y}{4x}$$

Assim, podemos obter a trajetória resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{4x} = 0, \quad y(2) = 3$$

A equação diferencial é de primeira ordem separável e, portanto, pode ser resolvida pelo método da separação das variáveis discutido na Seção 8.2. Deixamos a cargo do leitor mostrar que a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{3}{\sqrt[4]{2}}x^{1/4}$$

O gráfico da trajetória e o mapa de contornos da função temperatura são mostrados na Figura 13.6.8. ◀

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.6 (Ver página 971 para respostas.)

**1.** O gradiente de $f(x, y, z) = xy^2z^3$ no ponto (1, 1, 1) é _____.

**2.** Suponha que a função diferenciável $f(x, y)$ tenha a propriedade de que

$$f\left(2 + \frac{s\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{s}{2}\right) = 3se^s$$

A derivada direcional de $f$ na direção e no sentido de

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

em (2, 1) é _____.

**3.** Se o gradiente de $f(x, y)$ na origem for $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, então a derivada direcional de $f$ na direção e no sentido de $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ na origem será _____. A inclinação da reta tangente à curva de nível de $f$ pela origem no ponto (0, 0) será _____.

**4.** Se o gradiente de $f(x, y, z)$ em (1, 2, 3) for $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, então o valor máximo das derivadas direcionais de $f$ em (1, 2, 3) será _____ e o mínimo será _____.

## EXERCÍCIOS 13.6 Recurso Gráfico CAS

**1-8** Encontre $D_{\mathbf{u}}f$ em $P$.

1. $f(x, y) = (1 + xy)^{3/2}$; $P(3, 1)$; $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$
2. $f(x, y) = \operatorname{sen}(5x - 3y)$; $P(3, 5)$; $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$
3. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y)$; $P(0, 0)$; $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$
4. $f(x, y) = \dfrac{cx + dy}{x - y}$; $P(3, 4)$; $\mathbf{u} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$
5. $f(x, y, z) = 4x^5y^2z^3$; $P(2, -1, 1)$; $\mathbf{u} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$
6. $f(x, y, z) = ye^{xz} + z^2$; $P(0, 2, 3)$; $\mathbf{u} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$
7. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$; $P(-1, 2, 4)$; $\mathbf{u} = -\frac{3}{13}\mathbf{i} - \frac{4}{13}\mathbf{j} - \frac{12}{13}\mathbf{k}$
8. $f(x, y, z) = \operatorname{sen} xyz$; $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \pi\right)$; $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$

**9-18** Encontre a derivada direcional de $f$ em $P$ na direção de $\mathbf{a}$.

9. $f(x, y) = 4x^3y^2$; $P(2, 1)$; $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
10. $f(x, y) = 9x^3 - 2y^3$; $P(1, 0)$; $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
11. $f(x, y) = y^2 \ln x$; $P(1, 4)$; $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
12. $f(x, y) = e^x \cos y$; $P(0, \pi/4)$; $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
13. $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$; $P(-2, 2)$; $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$
14. $f(x, y) = xe^y - ye^x$; $P(0, 0)$; $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
15. $f(x, y, z) = xy + z^2$; $P(-3, 0, 4)$; $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
16. $f(x, y, z) = y - \sqrt{x^2 + z^2}$; $P(-3, 1, 4)$; $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
17. $f(x, y, z) = \dfrac{z - x}{z + y}$; $P(1, 0, -3)$; $\mathbf{a} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
18. $f(x, y, z) = e^{x+y+3z}$; $P(-2, 2, -1)$; $\mathbf{a} = 20\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

**19-22** Encontre a derivada direcional de $f$ em $P$ na direção e no sentido de um vetor que faça, no sentido anti-horário, um ângulo $\theta$ com o eixo $x$ positivo.

19. $f(x, y) = \sqrt{xy}$; $P(1, 4)$; $\theta = \pi/3$
20. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$; $P(-1, -2)$; $\theta = \pi/2$
21. $f(x, y) = \operatorname{tg}(2x + y)$; $P(\pi/6, \pi/3)$; $\theta = 7\pi/4$
22. $f(x, y) = \operatorname{senh} x \cosh y$; $P(0, 0)$; $\theta = \pi$
23. Determine a derivada direcional de
$$f(x, y) = \frac{x}{x + y}$$
em $P(1, 0)$ na direção e sentido de $P$ a $Q(-1, -1)$.
24. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = e^{-x} \sec y$ em $P(0, \pi/4)$ na direção e sentido da origem.
25. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{xy}\,e^y$ em $P(1, 1)$ na direção e no sentido do eixo $y$ negativo.
26. Seja
$$f(x, y) = \frac{y}{x + y}$$
Determine um vetor unitário $\mathbf{u}$ com o qual $D_{\mathbf{u}}f(2, 3) = 0$.
27. Determine a derivada direcional de
$$f(x, y, z) = \frac{y}{x + z}$$
em $P(2, 1, -1)$ na direção e no sentido de $P$ a $Q(-1, 2, 0)$.
28. Determine a derivada direcional da função
$$f(x, y, z) = x^3y^2z^5 - 2xz + yz + 3x$$
em $P(-1, -2, 1)$ na direção e no sentido do eixo $z$ negativo.

### ENFOCANDO CONCEITOS

29. Suponha que $D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = -5$ e $D_{\mathbf{v}}f(1, 2) = 10$, onde $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$ e $\mathbf{v} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$. Determine
(a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$
(c) a derivada direcional de $f$ em $(1, 2)$ na direção e sentido da origem.
30. Dado que $f_x(-5, 1) = -3$ e $f_y(-5, 1) = 2$, determine a derivada direcional de $f$ em $P(-5, 1)$ na direção e no sentido do vetor de $P$ a $Q(-4, 3)$.
31. A figura a seguir mostra algumas curvas de nível de uma função não especificada $f(x, y)$. Qual dos três vetores mostrados na figura é mais provavelmente o gradiente $\nabla f$? Explique.
32. A figura a seguir mostra algumas curvas de nível de uma função não especificada $f(x, y)$. Dos gradientes em $P$ e $Q$ qual, provavelmente, tem o maior comprimento? Explique.

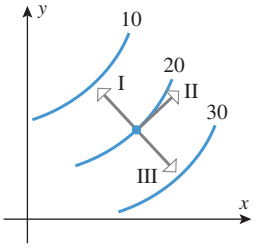



**Figura Ex-31**

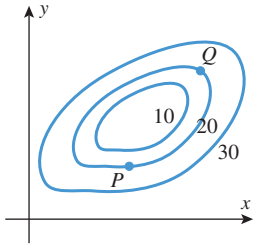



**Figura Ex-32**

**33-40** Encontre $\nabla z$ ou $\nabla w$.

33. $z = \operatorname{sen}(7y^2 - 7xy)$
34. $z = 7 \operatorname{sen}(6x/y)$
35. $z = \dfrac{6x + 7y}{6x - 7y}$
36. $z = \dfrac{6xe^{3y}}{x + 8y}$
37. $w = -x^9 - y^3 + z^{12}$
38. $w = xe^{8y} \operatorname{sen} 6z$
39. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
40. $w = e^{-5x} \sec x^2yz$

**41-46** Encontre o gradiente de $f$ no ponto indicado.

41. $f(x, y) = 5x^2 + y^4$; $(4, 2)$
42. $f(x, y) = 5 \operatorname{sen} x^2 + \cos 3y$; $(\sqrt{\pi}/2, 0)$
43. $f(x, y) = (x^2 + xy)^3$; $(-1, -1)$

**44.** $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$; $(3, 4)$

**45.** $f(x, y, z) = y \ln(x + y + z)$; $(-3, 4, 0)$

**46.** $f(x, y, z) = y^2 z \operatorname{tg}^3 x$; $(\pi/4, -3, 1)$

**47-50** Esboce a curva de nível de $f(x, y)$ que passa por $P$ e desenhe o vetor gradiente em $P$. ■

**47.** $f(x, y) = 4x - 2y + 3$; $P(1, 2)$

**48.** $f(x, y) = y/x^2$; $P(-2, 2)$

**49.** $f(x, y) = x^2 + 4y^2$; $P(-2, 0)$

**50.** $f(x, y) = x^2 - y^2$; $P(2, -1)$

**51.** Determine um vetor unitário $\mathbf{u}$ que seja normal em $P(1, -2)$ à curva de nível de $f(x, y) = 4x^2y$ que passa por $P$.

**52.** Determine um vetor unitário $\mathbf{u}$ que seja normal em $P(2, -3)$ à curva de nível de $f(x, y) = 3x^2y - xy$ que passa por $P$.

**53-60** Encontre um vetor unitário na direção do qual $f$ cresce mais rapidamente em $P$ e obtenha a taxa de variação de $f$ em $P$ nessa direção.

**53.** $f(x, y) = 4x^3y^2$; $P(-1, 1)$

**54.** $f(x, y) = 3x - \ln y$; $P(2, 4)$

**55.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $P(4, -3)$

**56.** $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$; $P(0, 2)$

**57.** $f(x, y, z) = x^3z^2 + y^3z + z - 1$; $P(1, 1, -1)$

**58.** $f(x, y, z) = \sqrt{x - 3y + 4z}$; $P(0, -3, 0)$

**59.** $f(x, y, z) = \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{y^2}$; $P(1, 2, -2)$

**60.** $f(x, y, z) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{y + z}\right)$; $P(4, 2, 2)$

**61-66** Encontre um vetor unitário na direção do qual $f$ decresce mais rapidamente em $P$ e obtenha a taxa de variação de $f$ em $P$ nessa direção. ■

**61.** $f(x, y) = 20 - x^2 - y^2$; $P(-1, -3)$

**62.** $f(x, y) = e^{xy}$; $P(2, 3)$

**63.** $f(x, y) = \cos(3x - y)$; $P(\pi/6, \pi/4)$

**64.** $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}}$; $P(3, 1)$

**65.** $f(x, y, z) = \dfrac{x + z}{z - y}$; $P(5, 7, 6)$

**66.** $f(x, y, z) = 4e^{xy} \cos z$; $P(0, 1, \pi/4)$

**67-70 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. Em cada exercício, suponha que $f$ seja uma função diferenciável de duas variáveis cujo domínio é todo o plano. ■

**67.** Se $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$, então a derivada direcional de $f$ na direção e sentido de $\mathbf{v}$ num ponto $(x_0, y_0)$ será duas vezes a derivada direcional de $f$ na direção e no sentido de $\mathbf{u}$ no ponto $(x_0, y_0)$.

**68.** Se $y = x^2$ for uma curva de nível de $f$, então $f_x(0, 0) = 0$.

**69.** Se $\mathbf{u}$ for um vetor unitário fixado e $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ em cada ponto $(x, y)$, então $f$ será uma função constante.

**70.** Se o vetor deslocamento de $(x_0, y_0)$ até $(x_1, y_1)$ for um múltiplo positivo de $\nabla f(x_0, y_0)$, então $f(x_0, y_0) \leq f(x_1, y_1)$.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**71.** Dado que $\nabla f(4, -5) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, determine a derivada direcional da função $f$ no ponto $(4, -5)$ na direção e no sentido de $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

**72.** Dado que $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ e $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = -2$, determine $\mathbf{u}$ (duas respostas).

**73.** A figura a seguir mostra algumas curvas de nível de uma função não especificada $f(x, y)$.

(a) Use a informação disponível para aproximar o comprimento do vetor $\nabla f(1, 2)$ e esboce a aproximação. Explique como você aproximou o comprimento e determinou a direção e sentido do vetor.

(b) Esboce uma aproximação do vetor $-\nabla f(4, 4)$.

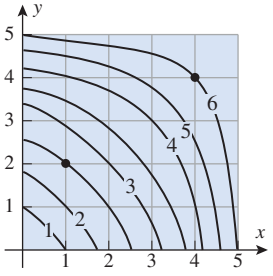



**Figura Ex-73**

**74.** A figura a seguir mostra um mapa topográfico de uma montanha e um ponto $P$ em sua base. Suponha que queiramos escalar essa montanha a partir de $P$ em direção ao topo, de tal forma que estejamos sempre subindo na direção da inclinação mais íngreme. Esboce a projeção desse caminho sobre o mapa de contornos. Isso é chamado de ***caminho de subida mais íngreme***. Explique como esse caminho pode ser determinado.

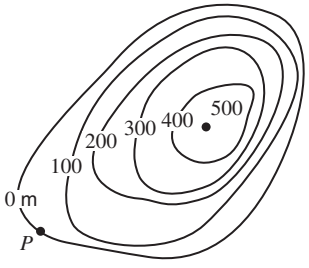



**Figura Ex-74**

**75.** Seja $z = 3x^2 - y^2$. Determine todos os pontos nos quais $\|\nabla z\| = 6$.

**76.** Dado que $z = 3x + y^2$, determine $\|\nabla z\|$ no ponto $(5, 2)$.

**77.** Uma partícula move-se ao longo de uma trajetória $C$ dada pelas equações $x = t$ e $y = -t^2$. Se $z = x^2 + y^2$, determine $dz/ds$ ao longo de $C$ no instante em que a partícula está no ponto $(2, -4)$.

**78.** A temperatura em graus Celsius em um ponto $(x, y)$ de uma placa de metal no plano $xy$ é

$$T(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

(a) Encontre a taxa de variação da temperatura em (1, 1) na direção e sentido de $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
(b) Uma formiga em (1, 1) precisa andar na direção na qual a temperatura baixe mais rapidamente. Encontre um vetor unitário nessa direção.

**79.** Se o potencial elétrico em um ponto $(x, y)$ do plano $xy$ é $V(x, y)$ então o ***vetor de intensidade elétrica*** no ponto $(x, y)$ é $\mathbf{E} = -\nabla V(x, y)$. Suponha que $V(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$.
(a) Determine o vetor de intensidade elétrica em $(\pi/4, 0)$.
(b) Mostre que, em cada ponto no plano, o potencial elétrico decresce mais rapidamente na direção e no sentido do vetor $\mathbf{E}$.

**80.** Em uma certa montanha, a elevação $z$ acima de um ponto $(x, y)$ em um plano $xy$ ao nível do mar é de $z = 2.000 - 0{,}02x^2 - 0{,}04y^2$, onde $x$, $y$ e $z$ estão dados em metros. O eixo $x$ positivo aponta para o leste e o eixo $y$ positivo, para o norte. Um montanhista está no ponto $(-20, 5, 1991)$.
(a) Se o montanhista utilizar uma bússola para caminhar em direção ao oeste, ele estará começando a subir ou descer?
(b) Se o montanhista utilizar uma bússola para caminhar em direção ao nordeste, ele estará subindo ou descendo? A que taxa?
(c) Em qual direção da bússola o montanhista deveria começar a caminhar para percorrer uma curva de nível (duas respostas)?

**81.** Dado que a derivada direcional de $f(x, y, z)$ no ponto $(3, -2, 1)$ e na direção de $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ é $-5$ e que $\|\nabla f(3, -2, 1)\| = 5$, determine $\nabla f(3, -2, 1)$.

**82.** A temperatura (em graus Celsius) em um ponto $(x, y, z)$ de um sólido metálico é

$$T(x, y, z) = \frac{xyz}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

(a) Encontre a taxa de variação da temperatura em relação à distância em (1, 1, 1) na direção da origem.
(b) Encontre a direção na qual a temperatura eleva-se mais rapidamente no ponto (1, 1, 1). (Expresse a sua resposta como um vetor unitário.)
(c) Encontre a taxa na qual a temperatura eleva-se movendo de (1, 1, 1) na direção obtida na parte (b).

**83.** Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
(a) Mostre que $\nabla r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.
(b) Mostre que $\nabla f(r) = f'(r)\nabla r = \dfrac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$.

**84.** Use a fórmula da parte (b) do Exercício 83 para determinar
(a) $\nabla f(r)$ se $f(r) = re^{-3r}$
(b) $f(r)$ se $\nabla f(r) = 3r^2\mathbf{r}$ e $f(2) = 1$.

**85.** Seja $\mathbf{u}_r$ um vetor unitário cujo ângulo no sentido anti-horário com o eixo $x$ positivo é $\theta$, e seja $\mathbf{u}_\theta$ um vetor unitário a 90° no sentido anti-horário de $\mathbf{u}_r$. Mostre que se $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$, então

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta$$

[*Sugestão*: Use a parte (c) do Exercício 57, Seção 13.5.]

**86.** Prove: Se $f$ e $g$ forem diferenciáveis, então
(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
(b) $\nabla(cf) = c\nabla f$ ($c$ constante)
(c) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
(d) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$
(e) $\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$.

**87-88** Uma partícula que busca o calor está localizada no ponto $P$ de um plano de metal, cuja temperatura no ponto $(x, y)$ é $T(x, y)$. Determine as equações paramétricas para a trajetória da partícula se ela se move continuamente na direção do aumento máximo da temperatura. ■

**87.** $T(x, y) = 5 - 4x^2 - y^2$; $P(1, 4)$

**88.** $T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$; $P(5, 3)$

**89.** Use um recurso gráfico para gerar a trajetória da partícula junto a alguma curva de nível representativa da função temperatura do Exercício 87.

**90.** Use um recurso gráfico para gerar a trajetória da partícula junto a alguma curva de nível representativa da função temperatura do Exercício 88.

**C 91.** (a) Use um CAS para fazer o gráfico da função $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
(b) Em quantos pontos será verdade que $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ com quaisquer vetores unitários $\mathbf{u}$?
(c) Use um CAS para determinar $\nabla f$.
(d) Use um CAS para resolver a equação $\nabla f(x, y) = 0$ para $x$ e $y$.
(e) Use o resultado da parte (d) junto ao Teorema 13.6.5 para verificar sua conjectura na parte (b).

**92.** Prove: Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem diferenciáveis em $t$, e se $z = f(x, y)$ for diferenciável no ponto $(x(t), y(t))$, então

$$\frac{dz}{dt} = \nabla z \cdot \mathbf{r}'(t)$$

onde $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$.

**93.** Prove: Se $f$, $f_x$ e $f_y$ forem contínuas em uma região circular, e se $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ em toda a região, então $f(x, y)$ será constante na região. [*Sugestão*: Veja o Exercício 69, Seção 13.5.]

**94.** Prove: Se a função $f$ for diferenciável em um ponto $(x, y)$ e se $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ em duas direções não paralelas, então $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ em todas as direções.

**95.** Dado que as funções $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ e $f(u, v, w)$ são diferenciáveis, mostre que

$$\nabla f(u, v, w) = \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial f}{\partial w}\nabla w$$

**96.** **Texto** Seja $f$ uma função diferenciável de duas variáveis. Escreva um parágrafo curto discutindo as conexões entre derivadas direcionais de $f$ e inclinações de retas tangentes ao gráfico de $f$.

**97.** **Texto** Seja $f$ uma função diferenciável de duas variáveis. Embora tenhamos definido o que significa dizer que $f$ é diferenciável, não definimos a "derivada" de $f$. Escreva um parágrafo curto discutindo os méritos de definir a derivada de $f$ como sendo o gradiente $\nabla f$.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.6

**1.** $\langle 1, 2, 3\rangle$ **2.** 3 **3.** 10; $-\frac{3}{4}$ **4.** 3; $-3$

## 13.7 PLANOS TANGENTES E VETORES NORMAIS

*Nesta seção, discutiremos planos tangentes a superfícies no espaço tridimensional e nos ocuparemos em responder a três questões básicas: O que é um plano tangente? Quando existem planos tangentes? Como encontrar equações de planos tangentes?*

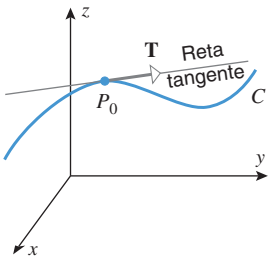



**Figura 13.7.1**

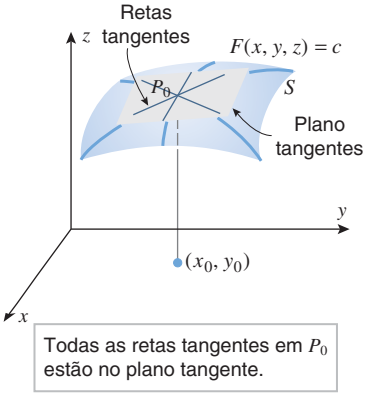



**Figura 13.7.2**

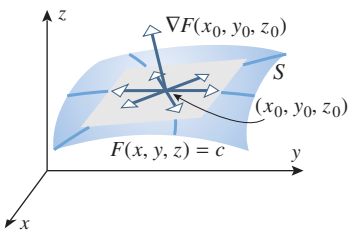



**Figura 13.7.3**

### PLANOS TANGENTES E VETORES NORMAIS A SUPERFÍCIES DE NÍVEL $F(x, y, z) = c$

Inicialmente, consideramos o problema de encontrar planos tangentes a superfícies de nível de uma função $F(x, y, z)$. Essas superfícies são representadas por equações da forma $F(x, y, z) = c$. Vamos supor que $F$ tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas, o que garantirá consequências geométricas importantes. Fixemos $c$ e digamos que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ satisfaz a equação $F(x, y, z) = c$. Em disciplinas mais avançadas, pode ser provado que se $F$ tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas e se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, então, perto de $P_0$, o gráfico de $F(x, y, z) = c$ será, de fato, uma "superfície", e não algum conjunto bizarro de pontos do espaço.

Nosso conceito de plano tangente a uma superfície de nível $S$ dada pela equação $F(x, y, z) = c$ terá por base a noção mais elementar de uma reta tangente a uma curva $C$ do espaço (Figura 13.7.1). Intuitivamente, é de se esperar que o plano tangente a $S$ em um ponto $P_0$ seja composto das retas tangentes em $P_0$ de todas as curvas de $S$ que passem por $P_0$ (Figura 13.7.2). Suponha que $C$ seja uma curva de $S$ que passe por $P_0$ e seja parametrizada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, com $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ e $z_0 = z(t_0)$. Então, a reta $l$ que é tangente a $C$ em $P_0$ é paralela ao vetor

$$\mathbf{r}' = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\,\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}$$

em que supomos $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$ (Definição 12.2.7). Como $C$ está na superfície $F(x, y, z) = c$, temos

$$c = F(x(t), y(t), z(t)) \tag{1}$$

Calculando a derivada em $t_0$ de ambos os lados de (1), a regra da cadeia fornece

$$0 = F_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0)$$

Podemos escrever essa equação em forma vetorial como

$$0 = (F_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\,\mathbf{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}) \cdot (x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\,\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k})$$

ou

$$0 = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}' \tag{2}$$

Segue que, se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, então $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ será normal à reta $l$. Dessa forma, a reta $l$ que é tangente a $C$ em $P_0$ está contida no plano por $P_0$ com vetor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Como a curva $C$ foi tomada *arbitrariamente*, concluímos que o mesmo vale com qualquer curva de $S$ que passe por $P_0$ (Figura 13.7.3). Assim, faz sentido definir o plano tangente a $S$ em $P_0$ como o plano por $P_0$ cujo vetor normal seja

$$\mathbf{n} = \nabla F(x_0, y_0, z_0) = \langle F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\rangle$$

Usando a forma ponto-normal [ver Fórmula (3) da Seção 11.6], chegamos à seguinte definição.

A Definição 13.7.1 pode ser vista como uma extensão para superfícies do Teorema 13.6.6 relativo a curvas.

**13.7.1 DEFINIÇÃO** Suponha que $F(x, y, z)$ tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ seja um ponto da superfície de nível $S$: $F(x, y, z) = c$. Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{n} = \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ será um ***vetor normal*** a $S$ em $P_0$ e o ***plano tangente*** a $S$ em $P_0$ será o plano de equação.

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \qquad (3)$$

A reta pelo ponto $P_0$ paralela ao vetor normal $\mathbf{n}$ é perpendicular ao plano tangente (3). Diremos que essa é a ***reta normal***, ou, às vezes, simplesmente, a ***normal*** à superfície $F(x, y, z) = c$ em $P_0$. Segue que essa reta pode ser dada em forma paramétrica por

$$x = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)t, \quad y = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)t, \quad z = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)t \qquad (4)$$

**▶ Exemplo 1** Considere o elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 18$. Encontre

(a) uma equação do plano tangente ao elipsoide no ponto (1, 2, 1).

(b) equações paramétricas da reta que é normal ao elipsoide no ponto (1, 2, 1).

(c) o ângulo agudo que o plano tangente no ponto (1, 2, 1) faz com o plano $xy$.

***Solução (a)*** Aplicamos a Definição 13.7.1 com $F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2$ e $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 1)$. Como

$$\nabla F(x, y, z) = \langle F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)\rangle = \langle 2x, 8y, 2z\rangle$$

temos

$$\mathbf{n} = \nabla F(1, 2, 1) = \langle 2, 16, 2\rangle$$

Logo, por (3), a equação do plano tangente é

$$2(x - 1) + 16(y - 2) + 2(z - 1) = 0 \quad \text{ou} \quad x + 8y + z = 18$$

***Solução (b)*** Como $\mathbf{n} = \langle 2, 16, 2\rangle$ no ponto (1, 2, 1), segue de (4) que

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 16t, \quad z = 1 + 2t$$

são equações paramétricas da reta normal ao elipsoide no ponto (1, 2, 1).

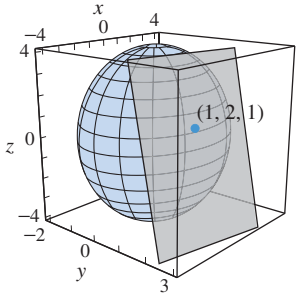



**Figura 13.7.4**

***Solução (c)*** Para encontrar o ângulo agudo $\theta$ entre o plano tangente e o plano $xy$, aplicamos a Fórmula (9) da Seção 11.6 com $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} = \langle 2, 16, 2\rangle$ e $\mathbf{n}_2 = \langle 0, 0, 1\rangle$. Dessa forma, obtemos

$$\cos\theta = \frac{|\langle 2, 16, 2\rangle \cdot \langle 0, 0, 1\rangle|}{\|\langle 2, 16, 2\rangle\| \, \|\langle 0, 0, 1\rangle\|} = \frac{2}{(2\sqrt{66})(1)} = \frac{1}{\sqrt{66}}$$

Assim

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{66}}\right) \approx 83^\circ$$

(Figura 13.7.4). ◀

## ■ PLANOS TANGENTES A SUPERFÍCIES DA FORMA $z = f(x, y)$

Para encontrar um plano tangente a uma superfície da forma $z = f(x, y)$, podemos usar a Equação (3) com a função $F(x, y, z) = z - f(x, y)$.

▶ **Exemplo 2** Encontre uma equação do plano tangente e equações paramétricas da reta normal à superfície $z = x^2y$ no ponto (2, 1, 4).

***Solução*** Seja $F(x, y, z) = z - x^2y$. Então $F(x, y, z) = 0$ na superfície, de modo que podemos encontrar o gradiente de $F$ no ponto (2, 1, 4):

$$\nabla F(x, y, z) = -2xy\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$\nabla F(2, 1, 4) = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Por (3), o plano tangente tem equação

$$-4(x - 2) - 4(y - 1) + 1(z - 4) = 0 \quad \text{ou} \quad -4x - 4y + z = -8$$

e a reta normal tem equações

$$x = 2 - 4t, \quad y = 1 - 4t, \quad z = 4 + t \ \blacksquare$$

Suponha que $f(x, y)$ seja diferenciável em um ponto $(x_0, y_0)$ e que $z_0 = f(x_0, y_0)$. Pode ser mostrado que o procedimento usado no Exemplo 2 pode ser usado para encontrar o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0, z_0)$. Isso dá uma equação alternativa para o plano tangente ao gráfico de uma função diferenciável.

**13.7.2 TEOREMA** *Se $f(x, y)$ for diferenciável no ponto $(x_0, y_0)$, então o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ [ou $(x_0, y_0)$] será o plano*

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{5}$$

**DEMONSTRAÇÃO** Considere a função $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Como $F(x, y, z) = 0$ na superfície, aplicamos a Equação (3) a essa função. As derivadas parciais de $F$ são

$$F_x(x, y, z) = -f_x(x, y), \quad F_y(x, y, z) = -f_y(x, y), \quad F_z(x, y, z) = 1$$

O ponto no qual essas parciais serão calculadas está na superfície; portanto, é da forma $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Assim, (3) dá

$$\begin{aligned} 0 &= F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - f(x_0, y_0)) \\ &= -f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + 1(z - f(x_0, y_0)) \end{aligned}$$

que é equivalente a (5). ■

Lembre que, na Seção 13.4, observamos que se uma função $f(x, y)$ for diferenciável em um ponto $(x_0, y_0)$, então a aproximação linear local $L(x, y)$ de $f$ em $(x_0, y_0)$ tem a equação

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Observe que a equação $z = L(x, y)$ é idêntica à do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0)$. Assim, o gráfico da aproximação linear local de $f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0)$ é o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0)$.

## ■ PLANOS TANGENTES E DIFERENCIAIS TOTAIS

Lembre que, para uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis, a aproximação por diferenciais é

$$\Delta z = \Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx dz = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Observe que o plano tangente na Figura 13.7.5 é o análogo da reta tangente na Figura 13.4.2.

O plano tangente fornece uma interpretação geométrica dessa aproximação. Vemos na Figura 13.7.5 que $\Delta z$ é a variação de $z$ *ao longo da superfície* $z = f(x, y)$ do ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ao ponto $P(x, y, f(x, y))$, e $dz$ é a variação de $z$ *ao longo do plano tangente* de $P_0$ a $Q(x, y, L(x, y))$. O pequeno deslocamento vertical em $(x, y)$ entre a superfície e o plano representa o erro da aproximação linear local de $f$ em $(x_0, y_0)$. Vimos que, perto de $(x_0, y_0)$, esse erro tem uma magnitude muito menor do que a distância entre $(x, y)$ e $(x_0, y_0)$.

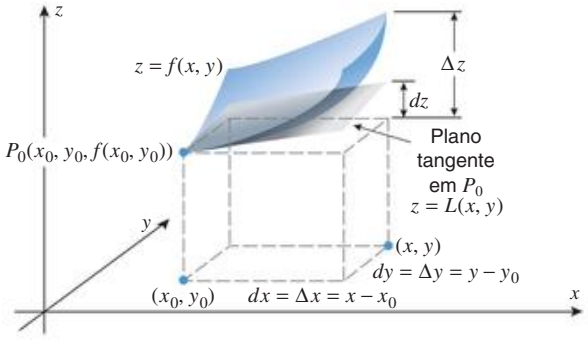



**Figura 13.7.5**

## USANDO GRADIENTES PARA ENCONTRAR RETAS TANGENTES A INTERSEÇÕES DE SUPERFÍCIES

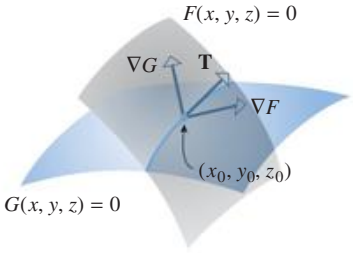



**Figura 13.7.6**

Em geral, a interseção de duas superfícies $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ será uma curva no espaço tridimensional. Se $(x_0, y_0, z_0)$ for um ponto nessa curva, então $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ será normal à superfície $F(x, y, z) = 0$ em $(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ será normal à superfície $G(x, y, z) = 0$ em $(x_0, y_0, z_0)$. Assim, se a curva de interseção puder ser dada por uma parametrização lisa, então seu vetor tangente unitário $\mathbf{T}$ em $(x_0, y_0, z_0)$ será ortogonal a ambos, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ (Figura 13.7.6). Consequentemente, se

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \times \nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$$

então esse produto vetorial será paralelo a $\mathbf{T}$ e, portanto, será tangente à curva de interseção. Esse vetor tangente pode ser usado para determinar a direção da reta tangente à curva de interseção no ponto $(x_0, y_0, z_0)$.

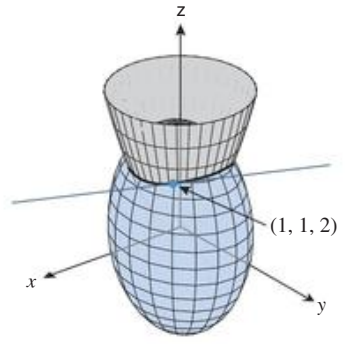



**Figura 13.7.7**

► **Exemplo 3** Obtenha as equações paramétricas da reta tangente à curva de interseção entre o paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(1, 1, 2)$ (Figura 13.7.7).

***Solução*** Começamos reescrevendo as equações das superfícies como

$$x^2 + y^2 - z = 0 \quad \text{e} \quad 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9 = 0$$

e tomamos

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9$$

Precisaremos dos gradientes dessas funções no ponto $(1, 1, 2)$. Os cálculos são

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \nabla G(x, y, z) = 6x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$
$$\nabla F(1, 1, 2) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \nabla G(1, 1, 2) = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Assim, o vetor tangente em $(1, 1, 2)$ à curva de interseção é

$$\nabla F(1, 1, 2) \times \nabla G(1, 1, 2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

Como qualquer múltiplo escalar desse vetor fará exatamente o mesmo, podemos multiplicar por $\frac{1}{2}$ para reduzir o tamanho dos coeficientes e usar o vetor $6\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ para determinar a direção da reta tangente. Esse vetor e o ponto (1, 1, 2) fornecem as equações paramétricas

$$x = 1 + 6t, \quad y = 1 - 7t, \quad z = 2 - 2t \blacktriangleleft$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.7 (Ver página 977 para respostas.)

**1.** Suponha que $f(1, 0, -1) = 2$ e que $f(x, y, z)$ seja diferenciável em $(1, 0, -1)$ com $\nabla f(1, 0, -1) = \langle 2, 1, 1\rangle$. Uma equação do plano tangente à superfície de nível $f(x, y, z) = 2$ no ponto $(1, 0, -1)$ é _____; as equações paramétricas da reta normal à superfície de nível pelo ponto $(1, 0, -1)$ são

$$x = _____, \quad y = _____, \quad z = _____$$

**2.** Suponha que $f(x, y)$ seja diferenciável no ponto (3, 1) com $f(3, 1) = 4, f_x(3, 1) = 2$ e $f_y(3, 1) = -3$. Uma equação do plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto (3, 1, 4) é _____; e

$$x = _____, \quad y = _____, \quad z = _____$$

são equações paramétricas da reta normal ao gráfico de $f$ no ponto (3, 1, 4).

**3.** Uma equação do plano tangente ao gráfico de $z = x^2\sqrt{y}$ no ponto (2, 4, 8) é _____; as equações paramétricas da reta normal ao gráfico de $z = x^2\sqrt{y}$ no ponto (2, 4, 8) são

$$x = _____, \quad y = _____, \quad z = _____$$

**4.** A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e o plano $x + y + z = 5$ intersectam em um círculo que passa pelo ponto (2, 1, 2). Equações paramétricas da reta normal a esse círculo em (2, 1, 2) são

$$x = _____, \quad y = _____, \quad z = _____$$

## EXERCÍCIOS 13.7 C CAS

**1.** Considere o elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$.
(a) Encontre uma equação do plano tangente ao elipsoide no ponto (2, 2, 1).
(b) Determine equações paramétricas da reta que é normal ao elipsoide no ponto (2, 2, 1).
(c) Determine o ângulo agudo que o plano tangente no ponto (2, 2, 1) faz com o plano $xy$.

**2.** Considere a superfície $xz - yz^3 + yz^2 = 2$.
(a) Encontre uma equação do plano tangente à superfície no ponto $(2, -1, 1)$
(b) Determine equações paramétricas da reta que é normal à superfície no ponto $(2, -1, 1)$.
(c) Determine o ângulo agudo que o plano tangente no ponto $(2, -1, 1)$ faz com o plano $xy$.

**3-12** Encontre uma equação para o plano tangente e equações paramétricas para a reta normal à superfície no ponto $P$. ■

**3.** $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $P(-3, 0, 4)$

**4.** $x^2y - 4z^2 = -7$; $P(-3, 1, -2)$

**5.** $x^2 - xyz = 56$; $P(-4, 5, 2)$

**6.** $z = x^2 + y^2$; $P(2, -3, 13)$

**7.** $z = 4x^3y^2 + 2y$; $P(1, -2, 12)$

**8.** $z = \frac{1}{2}x^7y^{-2}$; $P(2, 4, 4)$

**9.** $z = xe^{-y}$; $P(1, 0, 1)$

**10.** $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $P(-1, 0, 0)$

**11.** $z = e^{3y}\operatorname{sen} 3x$; $P(\pi/6, 0, 1)$

**12.** $z = x^{1/2} + y^{1/2}$; $P(4, 9, 5)$

### ENFOCANDO CONCEITOS

**13.** Encontre todos os pontos da superfície nos quais o plano tangente é horizontal.
(a) $z = x^3y^2$
(b) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$

**14.** Encontre um ponto da superfície $z = 3x^2 - y^2$ no qual o plano tangente é paralelo ao plano $6x + 4y - z = 5$.

**15.** Encontre um ponto da superfície $z = 8 - 3x^2 - 2y^2$ no qual o plano tangente é perpendicular à reta $x = 2 - 3t$, $y = 7 + 8t$, $z = 5 - t$.

**16.** Mostre que as superfícies

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad z = \tfrac{1}{10}(x^2 + y^2) + \tfrac{5}{2}$$

intersectam em (3, 4, 5) e têm um plano tangente em comum nesse ponto.

**17.** (a) Encontre todos os pontos de interseção entre a reta

$$x = -1 + t, \quad y = 2 + t, \quad z = 2t + 7$$

e a superfície

$$z = x^2 + y^2$$

(b) Em cada ponto de interseção, determine o cosseno do ângulo agudo entre a reta dada e a reta normal à superfície.

**18.** Mostre que se $f$ é diferenciável e $z = xf(x/y)$, então todos os planos tangentes ao gráfico dessa equação passam pela origem.

**19-22 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**19.** Se o plano tangente à superfície de nível de $F(x, y, z)$ no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ também for tangente a uma superfície de nível de $G(x, y, z)$ em $P_0$, então $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \nabla G(x_0, y_0, z_0)$.

**20.** Se o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 2)$ tiver a equação $x - y + 2z = 4$, então $f_x(1, 1) = 1$ e $f_y(1, 1) = -1$.

**21.** Se o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 2, 1)$ tiver a equação $2x + y - z = 3$, então a aproximação linear local de $f$ em $(1, 2)$ será dada pela função $L(x, y) = 1 + 2(x - 1) + (y - 2)$.

**22.** A reta normal à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem um vetor diretor dado por $f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

**23-24** Encontre dois vetores unitários que são normais à superfície dada no ponto $P$. ■

**23.** $\sqrt{\dfrac{z+x}{y-1}} = z^2;\ P(3, 5, 1)$

**24.** $\operatorname{sen} xz - 4\cos yz = 4;\ P(\pi, \pi, 1)$

**25.** Mostre que toda reta que é normal à esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

passa pela origem.

**26.** Encontre todos os pontos do elipsoide $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 9$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $x - 2y + 3z = 5$.

**27.** Encontre todos os pontos da superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ nos quais a reta normal é paralela à reta que passa por $P(1, -2, 1)$ e $Q(4, 0, -1)$.

**28.** Mostre que o elipsoide $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ e a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 24 = 0$$

têm um plano tangente em comum no ponto $(1, 1, 2)$.

**29.** Encontre equações paramétricas para a reta tangente à curva de interseção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e do elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(1, -1, 2)$.

**30.** Encontre equações paramétricas para a reta tangente à curva de interseção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e do plano $x + 2y + 2z = 20$ no ponto $(4, 3, 5)$.

**31.** Encontre equações paramétricas para a reta tangente à curva de interseção dos cilindros $x^2 + z^2 = 25$ e $y^2 + z^2 = 25$ no ponto $(3, -3, 4)$.

**C 32.** A figura a seguir mostra a interseção das superfícies $z = 8 - x^2 - y^2$ e $4x + 2y - z = 0$

(a) Encontre equações paramétricas para a reta tangente à curva de interseção no ponto $(0, 2, 4)$.

(b) Use um CAS para gerar uma reprodução razoável da figura. Não é necessário gerar as cores, mas tente obter um ponto de vista similar.

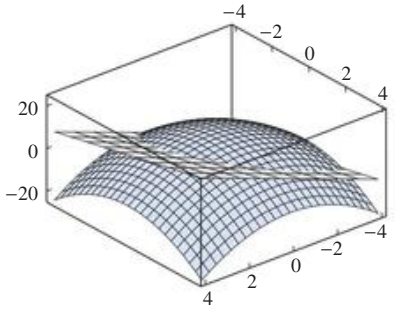



**Figura Ex-32**

**33.** Mostre que a equação do plano que é tangente ao elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

em $(x_0, y_0, z_0)$ pode ser escrita na forma

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

**34.** Mostre que a equação do plano que é tangente ao paraboloide

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

em $(x_0, y_0, z_0)$ pode ser escrita na forma

$$z + z_0 = \frac{2x_0 x}{a^2} + \frac{2y_0 y}{b^2}$$

**35.** Prove: Se as superfícies $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ intersectarem em $P(x_0, y_0, z_0)$ e se $f$ e $g$ forem diferenciáveis em $(x_0, y_0)$, então as retas normais em $P$ são perpendiculares se e somente se

$$f_x(x_0, y_0)\, g_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\, g_y(x_0, y_0) = -1$$

**36.** Use o resultado do Exercício 35 para mostrar que as retas normais aos cones $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ são perpendiculares às retas normais da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ em cada ponto de interseção (ver Figura Ex-38).

**37.** Dizemos que duas superfícies $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$ são ***ortogonais*** em um ponto $P$ de interseção se $\nabla f$ e $\nabla g$ são não nulos em $P$ e as retas normais às superfícies são perpendiculares em $P$. Mostre que se $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, então as superfícies $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$ são ortogonais no ponto $(x_0, y_0, z_0)$ se, e somente se,

$$f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z = 0$$

nesse ponto. [*Nota:* Essa é uma versão mais geral do resultado do Exercício 35.]

**38.** Use o resultado do Exercício 37 para mostrar que a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e o cone $z^2 = x^2 + y^2$ são ortogonais em todo o ponto de interseção (ver figura a seguir).

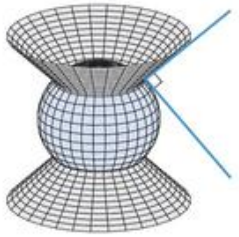


**Figura Ex-38**

**39.** Mostre que o volume do sólido limitado pelos planos coordenados e o plano tangente da parte da superfície $xyz = k$, $k > 0$, que está no primeiro octante não dependente do ponto de tangência.

**40.** **Texto** Discuta o papel da regra da cadeia na definição do plano tangente a uma superfície de nível.

**41.** **Texto** Discuta a relação entre planos tangentes e aproximações lineares locais de funções de duas variáveis.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.7

**1.** $2(x-1)+y+(z+1)=0$; $x=1+2t$; $y=t$; $z=-1+t$

**2.** $z=4+2(x-3)-3(y-1)$; $x=3+2t$; $y=1-3t$; $z=4-t$

**3.** $z=8+8(x-2)+(y-4)$; $x=2+8t$; $y=4+t$; $z=8-t$ **4.** $x=2+t$; $y=1$; $z=2-t$

## 13.8 MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

*Anteriormente, no Volume 1, vimos como determinar máximos e mínimos de uma função de uma variável. Nesta seção, desenvolveremos técnicas similares para funções de duas variáveis.*

### EXTREMOS

Se imaginarmos o gráfico de uma função $f$ de duas variáveis como uma cadeia de montanhas (Figura 13.8.1), então os cumes, que são os pontos altos de suas vizinhanças imediatas, são chamados de *máximos relativos* de $f$, e as bases dos vales, que são os pontos baixos de suas vizinhanças imediatas, são chamadas de *mínimos relativos* de $f$.

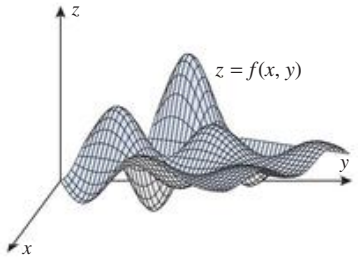



**Figura 13.8.1**

Assim como um geólogo pode estar interessado em determinar a montanha mais alta e o vale mais profundo em toda uma cadeia de montanhas, também um matemático pode estar interessado em determinar o maior e o menor valor de $f(x, y)$ sobre o domínio *inteiro* de $f$. Eles são chamados de *valores máximos absolutos* e *mínimos absolutos de f*. As seguintes definições dão precisão a essas ideias informais.

**13.8.1** **DEFINIÇÃO** Diz-se que uma função de duas variáveis tem um ***máximo relativo*** em um ponto $(x_0, y_0)$ se houver um círculo centrado em $(x_0, y_0)$ tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ em quaisquer pontos $(x, y)$ do domínio de $f$ que estiverem dentro do círculo, e diz-se que $f$ tem um ***máximo absoluto*** em $(x_0, y_0)$ se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ em quaisquer pontos $(x, y)$ do domínio de $f$.

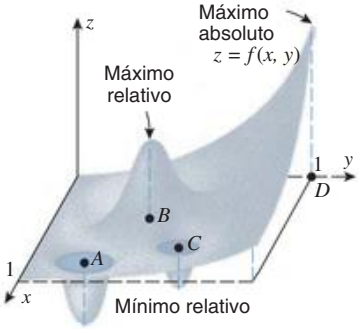



**Figura 13.8.2**

**13.8.2** **DEFINIÇÃO** Diz-se que uma função $f$ de duas variáveis tem um ***mínimo relativo*** em um ponto $(x_0, y_0)$ se houver um círculo centrado em $(x_0, y_0)$ tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ em quaisquer pontos $(x, y)$ do domínio de $f$ que estiverem dentro do círculo, e diz-se que $f$ tem um ***mínimo absoluto*** em $(x_0, y_0)$ se $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ em quaisquer pontos $(x, y)$ do domínio de $f$.

Se $f$ tiver um máximo ou mínimo relativo em $(x_0, y_0)$, dizemos que $f$ tem um ***extremo relativo*** em $(x_0, y_0)$, e se $f$ tiver um máximo ou mínimo absoluto em $(x_0, y_0)$, dizemos que $f$ tem um ***extremo absoluto*** em $(x_0, y_0)$.

A Figura 13.8.2 mostra o gráfico de uma função $f$ cujo domínio é a região quadrada fechada no plano $xy$ dos pontos que satisfazem as desigualdades $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. A função

$f$ tem mínimos relativos nos pontos $A$ e $C$ e um máximo relativo em $B$. Há um mínimo absoluto em $A$ e um máximo absoluto em $D$.

Para funções de duas variáveis, estaremos interessados em duas importantes questões:

- Existem extremos relativos ou absolutos?
- Em caso afirmativo, onde estão localizados?

## CONJUNTOS LIMITADOS

Assim como distinguimos entre intervalos finitos e infinitos da reta real, vamos querer distinguir entre regiões de "extensão finita" e regiões de "extensão infinita" no espaço bi ou tridimensional. Um conjunto de pontos no espaço bidimensional é denominado ***limitado*** se o conjunto inteiro couber dentro de algum retângulo, e é denominado ***ilimitado*** se não houver retângulo que contenha todos os pontos do conjunto. Analogamente, um conjunto de pontos no espaço tridimensional é ***limitado*** se o conjunto couber dentro de alguma caixa e é ***ilimitado*** caso contrário (Figura 13.8.3).

Explique por que todo subconjunto de um conjunto limitado também é limitado.

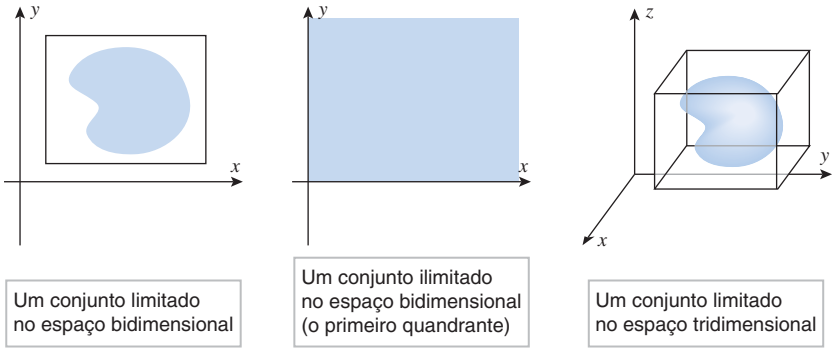



**Figura 13.8.3**

## TEOREMA DO VALOR EXTREMO

Para funções de uma variável que são contínuas em um intervalo fechado, o Teorema do Valor Extremo (Teorema 4.4.2, no Volume 1) respondeu à questão da existência dos extremos absolutos. O teorema seguinte, que enunciaremos sem demonstração, é o resultado correspondente para funções de duas variáveis.

**13.8.3** DEFINIÇÃO **(*Teorema do Valor Extremo*)** *Se $f(x, y)$ for contínua em um conjunto fechado e limitado $R$, então $f$ terá máximo e mínimo absolutos em $R$.*

► **Exemplo 1** A região quadrada $R$ cujos pontos satisfazem as desigualdades

$$0 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le 1$$

é um conjunto fechado e limitado no plano $xy$. A função $f$ cujo gráfico é mostrado na Figura 13.8.2 é contínua em $R$; assim, o Teorema 13.8.3 garante a existência de máximo e mínimo em $R$. Eles ocorrem nos pontos $D$ e $A$ que estão mostrados na figura. ◄

**OBSERVAÇÃO** Se qualquer uma das condições do Teorema do Valor Extremo deixar de ser válida, então não há garantia de que exista um máximo ou mínimo absoluto na região $R$. Assim, uma função descontínua em um conjunto fechado e limitado não precisa ter extremo absoluto, e uma função contínua em um conjunto que não é fechado ou que não é limitado tampouco precisa ter algum extremo absoluto.

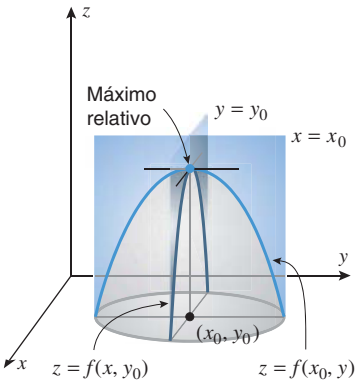



**Figura 13.8.4**

## ENCONTRANDO EXTREMOS RELATIVOS

Lembre-se de que se uma função $g$ de uma variável tiver um extremo relativo em um ponto $x_0$ onde $g$ é diferenciável, então $g'(x_0) = 0$. Para obter o análogo desse resultado para funções de duas variáveis, suponha que $f(x, y)$ tenha um máximo relativo em $(x_0, y_0)$ e que as derivadas parciais de $f$ existam em $(x_0, y_0)$. Parece plausível, geometricamente, que os traços da superfície $z = f(x, y)$ nos planos $x = x_0$ e $y = y_0$ tenham retas tangentes horizontais em $(x_0, y_0)$ (Figura 13.8.4), logo

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

A mesma conclusão é válida se $f$ tiver um mínimo relativo em $(x_0, y_0)$, e isso tudo sugere o seguinte resultado, que enunciaremos sem prova formal.

**13.8.4 TEOREMA** *Se $f$ tiver um extremo relativo em um ponto $(x_0, y_0)$ e se as derivadas parciais de primeira ordem de $f$ existirem nesse ponto, então*

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

Lembre-se de que os *pontos críticos* de uma função $f$ de uma variável são aqueles valores de $x$ do domínio de $f$ nos quais $f'(x) = 0$ ou $f$ não é diferenciável. A definição seguinte é o análogo para funções de duas variáveis.

**13.8.5 DEFINIÇÃO** Um ponto $(x_0, y_0)$ no domínio de uma função $f(x, y)$ é denominado ***ponto crítico*** da função se $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$ ou se uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em $(x_0, y_0)$.

Explique por que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = 0$$

em qualquer $\mathbf{u}$ se $(x_0, y_0)$ for um ponto crítico de $f$ e $f$ for diferenciável em $(x_0, y_0)$.

Segue dessa definição e do Teorema 13.8.4 que os extremos relativos ocorrem nos pontos críticos, exatamente como para uma função de uma variável. Contudo, lembre-se de que, para uma função de uma variável, um extremo relativo não precisa ocorrer em *cada* ponto crítico. Por exemplo, a função pode ter um ponto de inflexão com uma reta tangente horizontal no ponto crítico (ver Figura 4.2.6, no Volume 1). Analogamente, uma função de duas variáveis não precisa ter um extremo relativo em cada ponto crítico. Por exemplo, considere a função

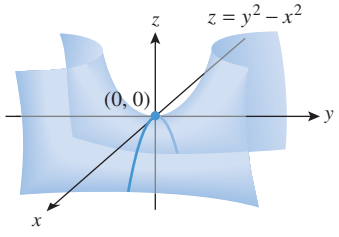
$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

Essa função, cujo gráfico é o paraboloide hiperbólico mostrado na Figura 13.8.5, tem um ponto crítico em (0, 0), pois

$$f_x(x, y) = -2x \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 2y$$

do qual tem-se que

$$f_x(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(0, 0) = 0$$



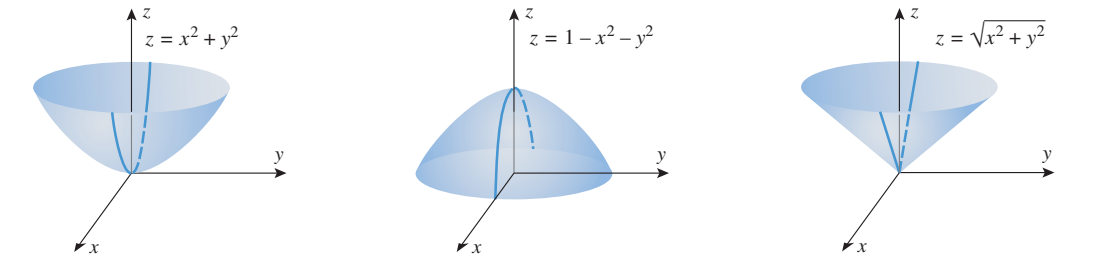

A função $f(x, y) = y^2 - x^2$ não tem máximo nem mínimo relativo no ponto crítico (0, 0).

**Figura 13.8.5**

Entretanto, a função $f$ não tem máximo nem mínimo relativo em (0, 0). Por razões óbvias, o ponto (0, 0) é chamado de *ponto de sela* de $f$. Em geral, diremos que uma superfície $z = f(x, y)$ tem um ***ponto de sela*** em $(x_0, y_0)$ se houver dois planos verticais distintos que passam nesse ponto tais que o traço da superfície em um dos planos tem um máximo relativo em $(x_0, y_0)$ e o traço no outro tem um mínimo relativo em $(x_0, y_0)$.

▶ **Exemplo 2** As três funções com gráficos na Figura 13.8.6 têm, todas, pontos críticos em (0, 0). Para o paraboloide, as derivadas parciais na origem são zero. Isso pode ser verificado algebricamente calculando as derivadas parciais em (0, 0), mas pode ser visto geometrica-

mente observando que os traços no plano $xz$ e no plano $yz$ têm as retas tangentes horizontais em $(0, 0)$. Para o cone, nenhuma das derivadas parciais existe na origem, pois os traços no plano $xz$ e no planos $yz$ têm esquinas na origem. O paraboloide da parte $(a)$ e o cone na parte $(c)$ têm um mínimo relativo e absoluto na origem, e o paraboloide da parte $(b)$ tem um máximo relativo e absoluto na origem. ◀




$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$
mín relativo e absoluto em $(0, 0)$

$(a)$

$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$
máx relativo e absoluto em $(0, 0)$

$(b)$

$f_x(0, 0)$ and $f_y(0, 0)$ não existem
mín relativo e absoluto em $(0, 0)$

$(c)$

**Figura 13.8.6**

## TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Para funções de uma variável, o teste da derivada segunda (Teorema 4.2.4, no Volume 1) foi usado para determinar o comportamento de uma função em um ponto crítico. O seguinte teorema, que é geralmente provado em disciplinas de cálculo avançado, é o análogo daquele teorema para funções de duas variáveis.

**13.8.6 TEOREMA** (***Teste da Derivada Segunda***) *Seja $f$ uma função de duas variáveis com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em algum círculo centrado em um ponto crítico $(x_0, y_0)$ e seja*

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

*(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então $f$ terá um mínimo relativo em $(x_0, y_0)$.*

*(b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então $f$ terá um máximo relativo em $(x_0, y_0)$.*

*(c) Se $D < 0$, então $f$ terá um ponto de sela em $(x_0, y_0)$.*

*(d) Se $D = 0$, então nenhuma conclusão pode ser tirada.*

Com a notação do Teorema 13.8.6, mostre que se $D > 0$, então $f_{xx}(x_0, y_0)$ e $f_{yy}(x_0, y_0)$ têm o mesmo sinal. Assim, podemos trocar $f_{xx}(x_0, y_0)$ por $f_{yy}(x_0, y_0)$ nas partes $(a)$ e $(b)$ do teorema.

**▶ Exemplo 3** Localize todos os extremos relativos e pontos de sela de

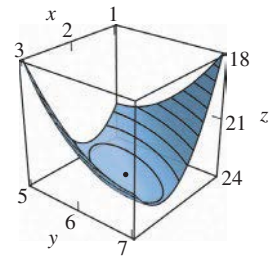
$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$

***Solução*** Como $f_x(x, y) = 6x - 2y$ e $f_y(x, y) = -2x + 2y - 8$, os pontos críticos de $f$ satisfazem as equações

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 0 \\ -2x + 2y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo-as para $x$ e $y$, obtemos $x = 2$, $y = 6$ (verifique); logo, $(2, 6)$ é o único ponto crítico. Para aplicar o Teorema 13.8.6, precisamos das derivadas de segunda ordem

$$f_{xx}(x, y) = 6, \quad f_{yy}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = -2$$




$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$

**Figura 13.8.7**

No ponto (2, 6) temos

$$D = f_{xx}(2, 6) f_{yy}(2, 6) - f_{xy}^2(2, 6) = (6)(2) - (-2)^2 = 8 > 0$$

e

$$f_{xx}(2, 6) = 6 > 0$$

logo $f$ tem um mínimo relativo em (2, 6) pela parte (*a*) do teste da derivada segunda. A Figura 13.8.7 mostra o gráfico de $f$ em uma vizinhança do mínimo relativo. ◄

► **Exemplo 4** Localize todos os extremos relativos e os pontos de sela de

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

***Solução*** Como

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4y - 4x^3 \\ f_y(x, y) &= 4x - 4y^3 \end{aligned} \tag{1}$$

os pontos críticos de $f$ têm coordenadas que satisfazem as equações

$$\begin{aligned} 4y - 4x^3 &= 0 \\ 4x - 4y^3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} y &= x^3 \\ x &= y^3 \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo a equação de cima na equação de baixo, obtemos $x = (x^3)^3$ ou, equivalentemente, $x^9 - x = 0$ ou $x(x^8 - 1) = 0$, a qual tem soluções $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. Substituindo esses valores na Equação (2) de cima, obtemos os valores $y$ correspondentes $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$. Assim, os pontos críticos de $f$ são (0, 0), (1, 1) e (−1, −1).

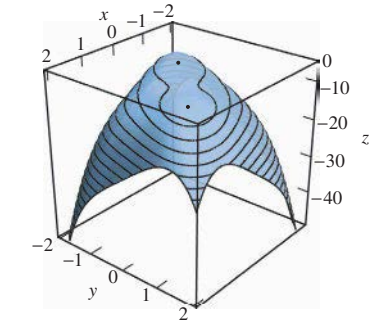
De (1)

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2, \quad f_{yy}(x, y) = -12y^2, \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

e obtemos a seguinte tabela:

| PONTO CRÍTICO $(x_0, y_0)$ | $f_{xx}(x_0, y_0)$ | $f_{yy}(x_0, y_0)$ | $f_{xy}(x_0, y_0)$ | $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ |
|---|---|---|---|---|
| (0, 0) | 0 | 0 | 4 | −16 |
| (1, 1) | −12 | −12 | 4 | 128 |
| (−1, −1) | −12 | −12 | 4 | 128 |

Nos pontos (1, 1) e (−1, −1), temos $D > 0$ e $f_{xx} < 0$, logo ocorrem máximos relativos nesses pontos críticos. Em (0, 0), há um ponto de sela, já que $D < 0$. A superfície e um mapa de contornos estão mostrados na Figura 13.8.8. ◄




$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

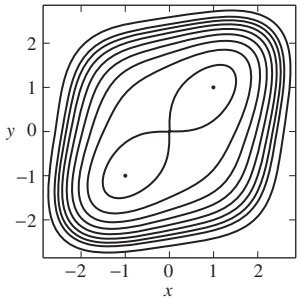



**Figura 13.8.8**

O padrão "número oito" em (0, 0) do mapa de contornos da superfície na Figura 13.8.8 é típico para curvas de nível que passam por um ponto de sela. Se um besouro inicia em um ponto (0, 0, 0) sobre a superfície, em quantas direções ele pode andar e permanecer no plano $xy$?

O seguinte teorema, que é o análogo para funções de duas variáveis do Teorema 4.4.3, no Volume 1, levará a um importante método para determinar extremos absolutos.

**13.8.7 TEOREMA** *Se uma função $f$ de duas variáveis tiver um extremo absoluto (um máximo absoluto ou um mínimo absoluto) em um ponto interior de seu domínio, então esse extremo ocorrerá em um ponto crítico.*

**DEMONSTRAÇÃO** Se $f$ tiver um máximo absoluto no ponto $(x_0, y_0)$ do interior do domínio de $f$, então $f$ terá um máximo relativo em $(x_0, y_0)$. Se ambas as derivadas parciais existirem em $(x_0, y_0)$, então

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

pelo Teorema 13.8.4, logo, $(x_0, y_0)$ é um ponto crítico de $f$. Se uma das duas derivadas parciais não existir, então de novo $(x_0, y_0)$ é um ponto crítico, logo $(x_0, y_0)$ é um ponto crítico em todos os casos. A prova para mínimo absoluto é análoga. ■

## ■ ENCONTRANDO EXTREMOS ABSOLUTOS EM CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS

Se $f(x, y)$ for contínua em um conjunto fechado e limitado $R$, então o Teorema do Valor Extremo (Teorema 13.8.3) garante a existência de um máximo e um mínimo absoluto de $f$ em $R$. Esses extremos absolutos podem ocorrer ou na fronteira de $R$ ou no interior de $R$, mas se um extremo absoluto ocorrer no interior, então ele ocorrerá em um ponto crítico pelo Teorema 13.8.7. Assim, somos levados ao seguinte procedimento para determinar extremos absolutos:

Compare esse procedimento com o da Seção 4.4, no Volume 1, para encontrar os valores extremos de $f(x)$ em um intervalo fechado.

***Como Encontrar os Extremos Absolutos de uma Função Contínua de Duas Variáveis em um Conjunto Fechado e Limitado R***

**Passo 1** Encontre os pontos críticos de $f$ que estão situados no interior de $R$.

**Passo 2** Encontre todos os pontos de fronteira nos quais os extremos podem ocorrer.

**Passo 3** Calcule $f(x, y)$ nos pontos obtidos nos passos precedentes. O maior desses valores é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto.

**▶ Exemplo 5** Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7 \tag{3}$$

na região triangular fechada $R$ de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$ e $(0, 5)$.

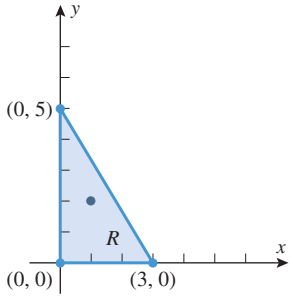


**Figura 13.8.9**

***Solução*** A região $R$ está mostrada na Figura 13.8.9. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 6 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3$$

logo, todos os pontos críticos ocorrem onde

$$3y - 6 = 0 \quad \text{e} \quad 3x - 3 = 0$$

Resolvendo essas equações, obtemos $x = 1$ e $y = 2$, logo $(1, 2)$ é o único ponto crítico. Conforme mostrado na Figura 13.8.9, esse ponto crítico está no interior de $R$.

Em seguida, queremos determinar as localizações dos pontos sobre a fronteira de $R$ nos quais pode ocorrer um valor extremo. A fronteira de $R$ consiste em três segmentos de retas, cada um dos quais trataremos separadamente:

O *segmento de reta entre* $(0, 0)$ *e* $(3, 0)$: nesse segmento de reta, temos $y = 0$, logo (3) simplifica para uma função da única variável $x$,

$$u(x) = f(x, 0) = -6x + 7, \quad 0 \le x \le 3$$

Essa função não tem ponto crítico, pois $u'(x) = -6$ é não nula para todo $x$. Assim, os valores extremos de $u(x)$ ocorrem nos pontos extremos $x = 0$ e $x = 3$, que correspondem aos pontos $(0, 0)$ e $(3, 0)$ de $R$.

*O segmento de reta entre* (0, 0) *e* (0, 5): nesse segmento de reta, temos $x = 0$, logo (3) simplifica para uma função de uma única variável $y$,

$$v(y) = f(0, y) = -3y + 7, \quad 0 \le y \le 5$$

Essa função não tem pontos críticos, pois $v'(y) = -3$ é não nula para todo $y$. Assim, os valores extremos de $v(y)$ ocorrem nos pontos extremos $y = 0$ e $y = 5$, que correspondem aos pontos (0, 0) e (0, 5) de $R$.

*O segmento de reta entre* (3, 0) *e* (0, 5): no plano $xy$, uma equação para esse segmento é

$$y = -\tfrac{5}{3}x + 5, \quad 0 \le x \le 3 \tag{4}$$

logo (3) simplifica para uma função de uma única variável $x$,

$$\begin{aligned} w(x) &= f\left(x, -\tfrac{5}{3}x + 5\right) = 3x\left(-\tfrac{5}{3}x + 5\right) - 6x - 3\left(-\tfrac{5}{3}x + 5\right) + 7 \\ &= -5x^2 + 14x - 8, \qquad 0 \le x \le 3 \end{aligned}$$

Uma vez que $w'(x) = -10x + 14$, a equação $w'(x) = 0$ fornece $x = \frac{7}{5}$ como o único ponto crítico de $w$. Assim, os valores extremos de $w$ ocorrem ou no ponto crítico $x = \frac{7}{5}$ ou nos pontos extremos $x = 0$ e $x = 3$. Os pontos extremos correspondem aos pontos (0, 5) e (3, 0) de $R$, e, por (4), o ponto crítico corresponde a $\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}\right)$.

Finalmente, a Tabela 13.8.1 lista os valores de $f(x, y)$ no ponto crítico interior e nos pontos de fronteira nos quais pode ocorrer um extremo absoluto. Da tabela, concluímos que o valor máximo absoluto de $f$ é $f(0, 0) = 7$ e o valor mínimo absoluto é $f(3, 0) = -11$. ◀

**Tabela 13.8.1**

| $(x, y)$ | (0, 0) | (3, 0) | (0, 5) | $\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}\right)$ | (1, 2) |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x, y)$ | 7 | −11 | −8 | $\frac{9}{5}$ | 1 |

**▶ Exemplo 6** Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 pés$^3$ e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material.

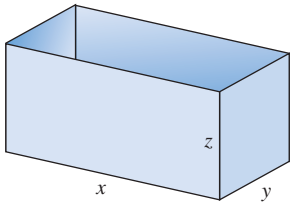
***Solução*** Sejam

$x$ = comprimento da caixa (em pés)

$y$ = largura da caixa (em pés)

$z$ = altura da caixa (em pés)

$S$ = área da superfície da caixa (em pés ao quadrado)




Dois lados têm área $xz$ cada.
Dois lados têm área $yz$ cada.
A base tem área $xy$.

**Figura 13.8.10**

É razoável supor que a caixa com a área mínima de superfície necessite de uma quantidade mínima do material, logo nosso objetivo é minimizar a área de superfície

$$S = xy + 2xz + 2yz \tag{5}$$

(Figura 13.8.10) sujeita à restrição de volume

$$xyz = 32 \tag{6}$$

De (6), obtemos $z = 32/xy$, logo (5) pode ser escrita como

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x} \tag{7}$$

que expressa $S$ como uma função de duas variáveis. As dimensões $x$ e $y$ nessa fórmula devem ser positivas mas, fora isso, não têm outras limitações, portanto nosso problema reduz-se a determinar o valor mínimo absoluto de $S$ no primeiro quadrante: $x > 0$, $y > 0$. Como essa região não é limitada nem fechada, não temos garantia matemática alguma nesse estágio de que exista um valor mínimo absoluto. Contudo, se $S$ tiver um valor mínimo absoluto no primeiro quadrante aberto, então esse valor deve ocorrer em um ponto crítico de $S$. Assim, nosso próximo passo é encontrar os pontos críticos de $S$.

Derivando (7), obtemos

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2} \tag{8}$$

logo, as coordenadas dos pontos críticos de $S$ satisfazem

$$y - \frac{64}{x^2} = 0, \quad x - \frac{64}{y^2} = 0$$

Resolvendo a primeira equação para $y$, obtemos

$$y = \frac{64}{x^2} \tag{9}$$

e substituindo essa expressão na segunda equação, temos

$$x - \frac{64}{(64/x^2)^2} = 0$$

a qual pode ser reescrita como

$$x\left(1 - \frac{x^3}{64}\right) = 0$$

As soluções dessa equação são $x = 0$ e $x = 4$. Uma vez que queremos $x > 0$, a única solução significante é $x = 4$. Substituindo este valor em (9), obtemos $y = 4$. Concluímos que o ponto $(x, y) = (4, 4)$ é o único ponto crítico de S no primeiro quadrante. Como $S = 48$ se $x = y = 4$, isso sugere que tentemos mostrar que o valor mínimo de $S$ no primeiro quadrante aberto seja 48.

Segue imediatamente da Equação (7) que $48 < S$ em qualquer ponto do primeiro quadrante em que valer pelo menos uma das desigualdades

$$xy > 48, \quad \frac{64}{y} > 48, \quad \frac{64}{x} > 48$$

Portanto, para provar que $48 \leq S$, podemos nos restringir ao conjunto de pontos do primeiro quadrante que satisfazem as três desigualdades

$$xy \leq 48, \quad \frac{64}{y} \leq 48, \quad \frac{64}{x} \leq 48$$

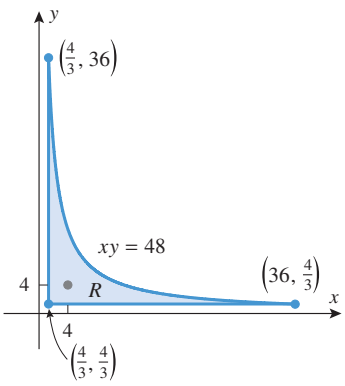



**Figura 13.8.11**

Essas desigualdades também podem ser escritas como

$$xy \leq 48, \quad y \geq \frac{4}{3}, \quad x \geq \frac{4}{3}$$

e definem uma região limitada e fechada $R$ dentro do primeiro quadrante (Figura 13.8.11). A função $S$ é contínua em $R$, portanto, o Teorema 13.8.3 garante que $S$ tem um valor mínimo absoluto em algum lugar de $R$. Como o ponto (4, 4) está em $R$ e $48 < S$, na fronteira de $R$ (por quê?), o valor mínimo de $S$ em $R$ deve ocorrer em um ponto interior. Então, segue do Teorema 13.8.7 que o valor mínimo de $S$ em $R$ deve ocorrer em um ponto crítico de $S$. Logo, o mínimo absoluto de $S$ em $R$ (e, portanto, em todo o primeiro quadrante aberto) é $S = 48$ no ponto (4, 4). Substituindo $x = 4$ e $y = 4$ em (6), obtemos $z = 2$, portanto, a caixa com a quantidade mínima de material tem uma altura de 2 pés e uma base quadrada com lados de 4 pés de comprimento. ◀

**OBSERVAÇÃO** Na nossa solução do Exemplo 6, felizmente fomos capazes de provar a existência de um mínimo absoluto de $S$ no primeiro quadrante. O problema geral de encontrar um extremo absoluto de uma função em uma região ilimitada, ou uma região que não é fechada, pode ser difícil e não será considerado neste livro. Contudo, em aplicações, algumas vezes podemos usar considerações físicas para deduzir que foi encontrado um extremo absoluto. Por exemplo, o gráfico da Equação (7) na Figura 13.8.12 sugere fortemente que o mínimo relativo em $x = 4$ e $y = 4$ é, também, um mínimo absoluto.

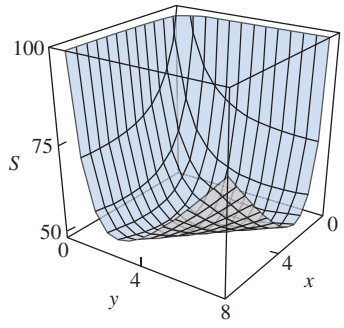



**Figura 13.8.12**

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.8 (Ver página 989 para respostas.)

**1.** Os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ são _____.

**2.** Suponha que $f(x, y)$ tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas em toda parte e que a origem seja um ponto crítico de $f$. Decida qual informação (se houver) é fornecida pelo teste da derivada segunda se
(a) $f_{xx}(0, 0) = 2,\ f_{xy}(0, 0) = 2,\ f_{yy}(0, 0) = 2$
(b) $f_{xx}(0, 0) = -2,\ f_{xy}(0, 0) = 2,\ f_{yy}(0, 0) = 2$
(c) $f_{xx}(0, 0) = 3,\ f_{xy}(0, 0) = 2,\ f_{yy}(0, 0) = 2$
(d) $f_{xx}(0, 0) = -3,\ f_{xy}(0, 0) = 2,\ f_{yy}(0, 0) = -2$.

**3.** Decida qual informação (se houver) é fornecida pelo teste da derivada segunda para a função $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ no ponto
(a) $(0, 0)$ (b) $(-1, -1)$ (c) $(1, 1)$

**4.** Uma caixa retangular tem área de superfície total de 2 m$^2$. Expresse o volume da caixa como uma função das dimensões $x$ e $y$ da base da caixa.

## EXERCÍCIOS 13.8 Recurso Gráfico C CAS

**1-2** Localize todos os máximos e mínimos absolutos, se houver, por inspeção. Então verifique sua resposta usando Cálculo. ■

**1.** (a) $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$
(b) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
(c) $f(x, y) = x + 2y - 5$

**2.** (a) $f(x, y) = 1 - (x + 1)^2 - (y - 5)^2$
(b) $f(x, y) = e^{xy}$
(c) $f(x, y) = x^2 - y^2$

**3-4** Complete os quadrados e localize todos os máximos e mínimos absolutos, se houver, por inspeção. Então verifique sua resposta usando Cálculo. ■

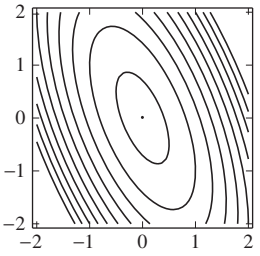
**3.** $f(x, y) = 13 - 6x + x^2 + 4y + y^2$

**4.** $f(x, y) = 1 - 2x - x^2 + 4y - 2y^2$

### ENFOCANDO CONCEITOS

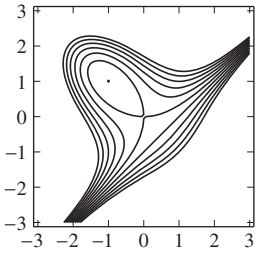
**5-8** Os mapas de contornos mostram todos os aspectos significantivos da função. Faça uma conjectura sobre o número e a localização de todos os extremos relativos e os pontos de sela e, então, use Cálculo para verificar sua conjectura. ■

**5.**



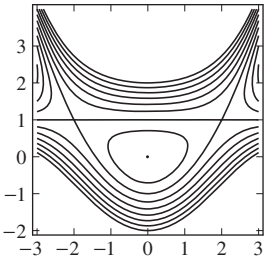
$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$

**6.**



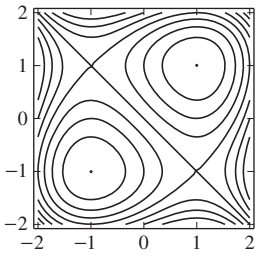
$f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$

**7.**



$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$

**8.**



$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

**9-20** Localize todos os máximos e mínimos relativos e os pontos de sela, se houver. ■

**9.** $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

**10.** $f(x, y) = x^2 + xy - 2y - 2x + 1$

**11.** $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$

**12.** $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

**13.** $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$

**14.** $f(x, y) = xe^y$

**15.** $f(x, y) = x^2 + y - e^y$

**16.** $f(x, y) = xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y}$

**17.** $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

**18.** $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$

**19.** $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2+2x)}$

**20.** $f(x, y) = xy + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{b^3}{y}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

C **21.** Use um CAS para gerar um mapa de contornos de

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 + 2$$

com $-2 \leq x \leq 2$ e $-2 \leq y \leq 2$ e use o mapa para aproximar a localização de todos os extremos relativos e os pontos de sela na região. Verifique sua resposta usando Cálculo e identifique os extremos relativos como máximo relativo ou mínimo relativo.

C **22.** Use um CAS para gerar o mapa de contornos de

$$f(x, y) = 2y^2x - yx^2 + 4xy$$

com $-5 \leq x \leq 5$ e $-5 \leq y \leq 5$ e use o mapa para aproximar a localização de todos os extremos relativos e os pontos de sela na região. Verifique sua resposta usando Cálculo e identifique os extremos relativos como máximo relativo ou mínimo relativo.

**23-26 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. Nestes exercícios, suponha que $f(x, y)$ tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$ ■

**23.** Se a função $f$ estiver definida no disco $x^2 + y^2 \leq 1$, então $f$ terá um ponto crítico em algum lugar do disco.

**24.** Se a função $f$ estiver definida no disco $x^2 + y^2 \leq 1$ e se $f$ não for uma função constante, então $f$ terá um número finito de pontos críticos nesse disco.

**25.** Se $P(x_0, y_0)$ for um ponto crítico de $f$ e se $f$ estiver definida em um disco centrado em $P$ com $D(x_0, y_0) > 0$, então $f$ terá um extremo relativo em $P$.

**26.** Se $P(x_0, y_0)$ for um ponto crítico de $f$ com $f(x_0, y_0) = 0$ e se $f$ estiver definida num disco centrado em $P$ com $D(x_0, y_0) < 0$, então $f$ terá valores tanto negativos quanto positivos nesse disco.

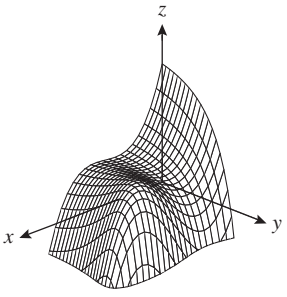
## ENFOCANDO CONCEITOS

**27.** (a) Mostre que o teste da derivada segunda não fornece informações sobre os pontos críticos de $f(x, y) = x^4 + y^4$.
(b) Classifique todos os pontos críticos de $f$ como máximo ou mínimo relativo ou ponto de sela.

**28.** (a) Mostre que o teste da derivada segunda não fornece informações sobre os pontos críticos de $f(x, y) = x^4 - y^4$.
(b) Classifique todos os pontos críticos de $f$ como máximo ou mínimo relativo ou ponto de sela.

**29.** Lembre que, pelo Teorema 4.4.4, no Volume 1, se uma função contínua de uma variável tem exatamente um extremo relativo em um intervalo, então esse extremo relativo é um extremo absoluto no intervalo. Este exercício mostra que esse resultado não se estende a funções de duas variáveis.
(a) Mostre que $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ tem apenas um único ponto crítico e que nele ocorre um máximo relativo. (Veja a figura a seguir.)
(b) Mostre que $f$ não tem máximo absoluto.

***Fonte:*** Este exercício está baseado no artigo "The Only Critical Point in Town Test", por Ira Rosenholtz e Lowell Smylie, *Mathematics Magazine*, Vol. 58, No. 3, maio de 1985, p. 149-150.

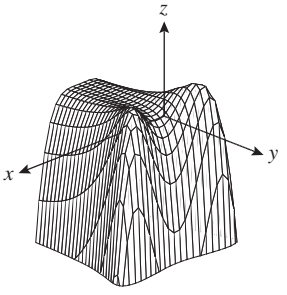



$z = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$

**Figura Ex-29**

**30.** Se $f$ for uma função contínua de uma variável com dois máximos relativos em um intervalo, então deve haver um mínimo relativo entre eles. (Convença-se disso fazendo algumas figuras.) O objetivo desse exercício é mostrar que esse resultado não se estende a funções de duas variáveis. Mostre que $f(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ tem dois máximos relativos, mas nenhum outro ponto crítico (veja a figura a seguir).

***Fonte:*** Este exercício é baseado no problema "Two Mountains Without a Valley", proposto e resolvido por Ira Rosenholtz, *Mathematics Magazine*, Vol. 60, No.1, fevereiro de 1987, p. 48.




$z = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$

**Figura Ex-30**

**31-36** Encontre os extremos absolutos da função dada no conjunto fechado e limitado $R$ indicado. ■

**31.** $f(x, y) = xy - x - 3y$; $R$ é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(0, 4)$ e $(5, 0)$.

**32.** $f(x, y) = xy - 2x$; $R$ é a região triangular com vértices (0, 0), (0, 4) e (4, 0)

**33.** $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$; $R$ é a região quadrada com vértices (0, 0), (0, 2), (2, 2) e (2, 0).

**34.** $f(x, y) = xe^y - x^2 - e^y$; $R$ é a região retangular com vértices (0, 0), (0, 1) (2, 1) e (2, 0).

**35.** $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$; $R$ é a região circular $x^2 + y^2 \leq 4$.

**36.** $f(x, y) = xy^2$; $R$ é a região que satisfaz as desigualdades $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 1$.

**37.** Determine três números positivos cuja soma seja 48 e que seu produto seja o maior possível.

**38.** Determine três números positivos cuja soma seja 27 e que seu produto seja o maior possível.

**39.** Determine todos os pontos sobre a parte do plano $x + y + z = 5$ no primeiro octante nos quais $f(x, y, z) = xy^2z^2$ tem um valor máximo.

**40.** Determine os pontos da superfície $x^2 - yz = 5$ que estão mais próximos da origem.

**41.** Determine as dimensões da caixa retangular de volume máximo que pode ser inscrita em uma esfera de raio $a$.

**42.** O regulamento de uma companhia aérea permite que cada passageiro carregue uma mala tal que a soma da largura, da altura e do comprimento seja menor do que ou igual a 129 cm. Encontre as dimensões da mala de maior volume que pode ser carregada com esse regulamento.

**43.** Uma caixa retangular fechada com um volume de 16 pés$^3$ é feita de dois tipos de materiais. O topo e a base são feitos de um material que custa 10 centavos por pé quadrado e os lados, de um material que custa 5 centavos por pé quadrado. Determine as dimensões da caixa de modo que o custo dos materiais seja minimizado.

**44.** Um fabricante faz dois modelos de um item, padrão e de luxo. Custa \$40 para fabricar um modelo padrão e \$60 o de luxo. Uma firma de pesquisa de mercado estima que se o modelo padrão for vendido por $x$ dólares e o de luxo por $y$ dólares, então o fabricante venderá $500(y - x)$ do item padrão e $45.000 + 500(x - 2y)$ do de luxo a cada ano. Com qual preço os itens devem ser vendidos para maximizar o lucro?

**45.** Considere a função

$$f(x, y) = 4x^2 - 3y^2 + 2xy$$

no quadrado unitário $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

(a) Encontre os valores máximo e mínimo de $f$ em cada aresta do quadrado.

(b) Encontre os valores máximo e mínimo de $f$ em cada diagonal do quadrado.

(c) Encontre os valores máximo e mínimo de $f$ no quadrado inteiro.

**46.** Mostre que dentre todos paralelogramas com perímetro $l$, um quadrado com lados de comprimento $l/4$ tem área máxima. [*Sugestão*: A área de um paralelograma é dada pela fórmula $A = ab \operatorname{sen} \alpha$, onde $a$ e $b$ são os comprimentos dos dois lados adjacentes e $\alpha$ é ângulo entre eles.]

**47.** Determine as dimensões de uma caixa retangular, aberta no topo, tendo volume $V$ e requerendo a menor quantidade de material para sua construção.

**48.** Uma tira de metal de 27 cm de largura deve ser dobrada ao longo dos dois lados para formar uma calha de seção transversal trapezoidal, como na figura a seguir. Determine $x$ e $\phi$ de tal forma que a seção transversal trapezoidal tenha uma área máxima.

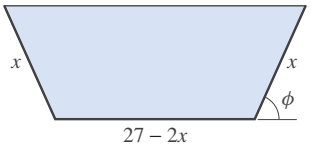



**Figura Ex-48**

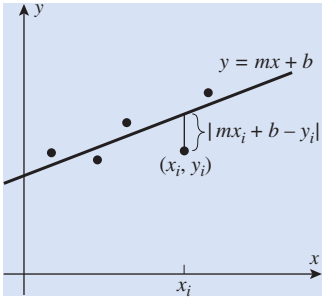
**49-50** Um problema comum no trabalho experimental é obter uma relação matemática $y = f(x)$ entre duas variáveis $x$ e $y$ "ajustando" uma curva a pontos do plano que correspondem a valores de $x$ e $y$ determinados experimentalmente, digamos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

A curva $y = f(x)$ é denominada ***modelo matemático*** dos dados. A forma geral da função $f$ é comumente determinada por algum princípio físico básico, mas algumas vezes é simplesmente determinada pelo padrão apresentado pelos dados. Estamos interessados em ajustar uma reta $y = mx + b$ aos dados. Geralmente, os dados não estão alinhados sobre uma reta (possivelmente devido a erros experimentais ou a variações nas condições experimentais), logo o problema é determinar uma reta que ajuste "melhor" os dados, de acordo com algum critério. Um critério para selecionar a reta de melhor ajuste é escolher $m$ e $b$ que minimizem a função

$$g(m, b) = \sum_{i=1}^{n} (mx_i + b - y_i)^2$$

Isso é chamado de ***método dos mínimos quadrados***, e a reta resultante é chamada de ***reta de regressão*** ou ***reta de mínimos quadrados de melhor ajuste***. Geometricamente, $|mx_i + b - y_i|$ é a distância vertical entre o dado $(x_i, y_i)$ e a reta $y = mx + b$.




Essas distâncias verticais são chamadas de ***resíduos*** dos dados, logo o efeito de minimizar $g(m, b)$ é minimizar a soma dos quadrados dos resíduos. Nestes exercícios, deduziremos uma fórmula para a reta de regressão. ■

**49.** O objetivo deste exercício é encontrar os valores de $m$ e $b$ que produzam a reta de regressão.

(a) Para minimizar $g(m, b)$, começamos determinando os valores de $m$ e $b$ tais que $\partial g/\partial m = 0$ e $\partial g/\partial b = 0$. Mostre que

essas equações estarão satisfeitas se $m$ e $b$ satisfizerem as condições

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) m + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

(b) Seja $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ a média aritmética de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Use o fato de que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \geq 0$$

para mostrar que

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq 0$$

com igualdade se, e somente se, todos os $x_i$ forem iguais.

(c) Supondo que nem todos os $x_i$ sejam iguais, prove que as equações em (a) têm a solução única

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

[*Nota*: Mostramos que $g$ tem um ponto crítico nesses valores de $m$ e $b$. No próximo exercício, mostraremos que $g$ tem um mínimo absoluto nesse ponto crítico. Uma vez feito isso, poderemos concluir que a reta $y = mx + b$ é a reta de regressão para esses valores de $m$ e $b$.]

**50.** Suponha que nem todos os $x_i$ sejam iguais, de modo que $g(m, b)$ tem um único ponto crítico nos valores de $m$ e $b$ obtidos no Exercício 49(c). O objetivo deste exercício é mostrar que $g$ tem um valor mínimo absoluto nesse ponto.

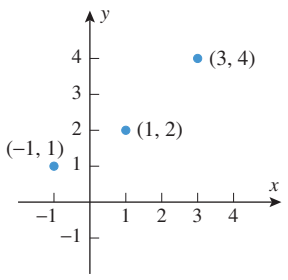
(a) Encontre as derivadas parciais $g_{mm}(m, b)$, $g_{bb}(m, b)$ e $g_{mb}(m, b)$ e, então, aplique o teste da derivada segunda para mostrar que $g$ tem um mínimo relativo no ponto crítico obtido no Exercício 49.

(b) Mostre que o gráfico da equação $z = g(m, b)$ é uma quádrica. [*Sugestão*: Ver Fórmula (4) da Seção 11.7.]

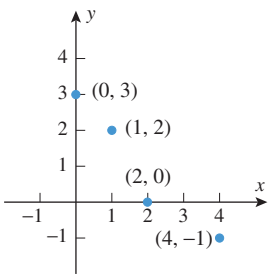
(c) Pode ser provado que o gráfico de $z = g(m, b)$ é um paraboloide elíptico. Aceitando isso, mostre que esse paraboloide se abre no sentido $z$ positivo e explique por que isso mostra que $g$ tem um mínimo absoluto no ponto crítico encontrado no Exercício 49.

**51-54** Use as fórmulas obtidas no Exercício 49 para determinar e desenhar a reta de regressão. Se o leitor dispuser de uma calculadora que possa calcular retas de regressão, use-a para conferir a reta. ■

**51.**




**52.**




**53.**

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1,5 | 1,6 | 2,1 | 3,0 |

**54.**

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4,2 | 3,5 | 3,0 | 2,4 | 2,0 |

**55.** A seguinte tabela mostra a expectativa de vida por ano de nascimento de mulheres norte-americanas:

| ANO DE NASCIMENTO | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| EXPECTATIVA DE VIDA | 79,3 | 79,4 | 79,5 | 79,6 | 79,9 | 79,9 | 80,2 | 80,4 |

***Fonte:*** Dados de *The 2011 Statistical Abstract*, the U.S. Census Bureau..

(a) Tome $t = 0$ como sendo o ano 1930, e seja $y$ a expectativa de vida por ano de nascimento $t$. Use a capacidade de regressão de uma calculadora para determinar a reta de regressão de $y$ como uma função de $t$.

(b) Use um recurso gráfico para fazer um gráfico que mostre os pontos de dados e a reta de regressão.

(c) Use a reta de regressão para fazer uma conjectura sobre a expectativa de vida das mulheres nascidas no ano 2015.

**56.** O gerente de uma companhia procura estabelecer uma relação entre as vendas de um certo produto e o preço. O departamento de pesquisa da companhia forneceu os seguintes dados:

| PREÇO ($x$) EM DÓLARES | \$35,00 | \$40,00 | \$45,00 | \$48,00 | \$50,00 |
|---|---|---|---|---|---|
| VOLUME DE VENDA DIÁRIA ($y$) EM UNIDADES | 80 | 75 | 68 | 66 | 63 |

(a) Use uma calculadora para determinar a reta de regressão de $y$ como uma função de $x$.

(b) Use um recurso gráfico para fazer um gráfico que mostre os pontos de dados e a reta de regressão.

(c) Use a reta de regressão para fazer uma conjectura sobre o número de unidades que seriam vendidas a um preço de \$60,00.

**57.** Se um gás for resfriado com seu volume mantido constante, então segue da ***lei dos gases ideais*** da Física que sua pressão cai proporcionalmente à queda da temperatura. A temperatura que, em teoria, corresponde a uma pressão zero é chamada de

***zero absoluto***. Suponha que um experimento produza os seguintes dados para a pressão $P$ *versus* a temperatura $T$, com o volume mantido constante:

| $P$ (QUILO PASCAL) | 134 | 142 | 155 | 160 | 171 | 184 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ (°CELSIUS) | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |

(a) Use uma calculadora para determinar a reta de regressão de $P$ como uma função de $T$.
(b) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico que mostre os pontos dados e a reta de regressão.
(c) Use a reta de regressão para estimar o valor do zero absoluto em graus Celsius.

**58.** Encontre:
(a) uma função contínua $f(x, y)$ que esteja definida em todo o plano $xy$ e que não tenha extremo absoluto no plano $xy$;
(b) uma função $f(x, y)$ que esteja definida em todo o retângulo $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ e que não tenha extremo absoluto no retângulo.

**59.** Mostre que se $f$ tiver um máximo relativo em $(x_0, y_0)$, então $G(x) = f(x, x_0)$ terá um máximo relativo em $x = x_0$ e $H(y) = f(x_0, y)$ terá um máximo relativo em $y = y_0$.

**60.** **Texto** Explique como pode ser determinada a localização dos extremos relativos ou pontos de sela de $f(x, y)$ por meio do exame das curvas de nível de $f$.

**61.** **Texto** Suponha que o teste da derivada segunda não forneça informação sobre a natureza de um certo ponto crítico $(x_0, y_0)$ porque $D(x_0, y_0) = 0$. Discuta quais passos podem ser tomados para determinar se há um extremo relativo nesse ponto crítico.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.8

**1.** $(0, 0)$ e $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ **2.** (a) nenhuma informação (b) ponto de sela em $(0, 0)$ (c) mínimo relativo em $(0, 0)$ (d) máximo relativo em $(0, 0)$ **3.** (a) ponto de sela em $(0, 0)$ (b) nenhuma informação, pois $(-1, -1)$ não é um ponto crítico (c) um mínimo relativo em $(1, 1)$ **4.** $V = \dfrac{xy(1 - xy)}{x + y}$

## 13.9 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

*Nesta seção, estudaremos um novo e poderoso método para maximizar e minimizar uma função sujeita a restrições sobre as variáveis. Esse método nos ajudará a resolver certos problemas de otimização que são difíceis ou impossíveis de resolver usando os métodos estudados na seção anterior.*

### PROBLEMAS DE EXTREMOS COM RESTRIÇÕES

No Exemplo 6 da última seção, resolvemos o problema de minimizar

$$S = xy + 2xz + 2yz \tag{1}$$

sujeita à restrição

$$xyz - 32 = 0 \tag{2}$$

Esse é um caso especial do seguinte problema geral:

**13.9.1** ***Problema do Extremo a Três Variáveis com uma Restrição***
Maximize ou minimize a função $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = 0$.

Estaremos interessados também na seguinte versão de duas variáveis desse problema:

**13.9.2** ***Problema do Extremo a Duas Variáveis com uma Restrição***
Maximize ou minimize a função $f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = 0$.

## MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Uma maneira de atacar problemas desses tipos é resolver a equação de restrição para uma das variáveis em termos das outras e substituir o resultado em $f$. Isso produz uma nova função de uma ou duas variáveis que incorpora a restrição e pode ser maximizada ou minimizada aplicando os métodos tradicionais. Por exemplo, para resolver o problema no Exemplo 6 da última seção, substituimos (2) dentro de (1) para obter

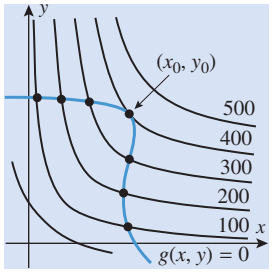
$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

a qual, então, minimizamos encontrando os pontos críticos e aplicando o teste da derivada segunda. Contudo, essa abordagem depende de nossa habilidade de resolver a equação restrita para uma das variáveis em termos das outras. Se isso não puder ser feito, outros métodos devem ser usados. Um desses métodos, chamado de *método dos multiplicadores de Lagrange*, será discutido nesta seção.

Para motivar o método dos multiplicadores de Lagrange, suponha que estejamos tentando maximizar uma função $f(x, y)$ sujeita a uma restrição $g(x, y) = 0$. Geometricamente, isso significa que estamos procurando um ponto $(x_0, y_0)$ sobre o gráfico da curva de restrição no qual $f(x, y)$ seja tão grande quanto possível. Para ajudar a localizar tal ponto, vamos construir um mapa de contornos de $f(x, y)$ no mesmo sistema de coordenadas que o gráfico de $g(x, y) = 0$. Por exemplo, a Figura 13.9.1*a* mostra algumas curvas de nível típicas de $f(x, y) = c$, na qual marcamos $c = 100, 200, 300, 400$ e $500$ com o objetivo de ilustração. Nessa figura, cada ponto de interseção de $g(x, y) = 0$ com uma curva de nível é candidato para uma solução, uma vez que esses pontos situam-se na curva de restrição. Entre as sete dessas interseções mostradas na figura, o valor máximo de $f(x, y)$ ocorre na interseção $(x_0, y_0)$, em que $f(x, y)$ tem um valor de 400. Note que, em $(x_0, y_0)$, a curva de restrição e a curva de nível só se tocam e, portanto, têm uma reta tangente *comum* nesse ponto. Como $\nabla f(x_0, y_0)$ é normal à curva de nível $f(x, x) = 400$ em $(x_0, y_0)$ e como $\nabla g(x_0, y_0)$ é normal à curva de restrição $g(x, y) = 0$ em $(x_0, y_0)$, concluímos que os vetores $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ devem ser paralelos. Assim,

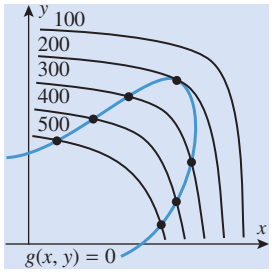
$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \tag{3}$$

com algum escalar $\lambda$. A mesma condição é válida em pontos da curva de restrição nos quais $f(x, y)$ tem um mínimo. Por exemplo, se as curvas de nível forem como mostrado na Figura




Máximo de $f(x, y)$ é 400

(*a*)




Mínimo de $f(x, y)$ é 200

(*b*)

**Figura 13.9.1**

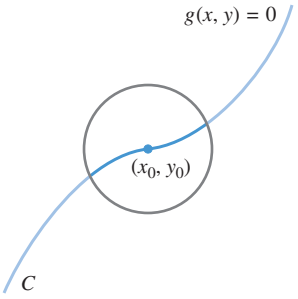
**Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)** Matemático e astrônomo franco-italiano. Lagrange, filho de funcionário público, nasceu em Turim, na Itália. (O registro de batismo lista seu nome como Giuseppe Lodovico Lagrangia.) Embora seu pai quisesse que ele fosse advogado, Lagrange foi atraído pela Matemática e pela Astronomia depois de ler um trabalho do astrônomo Halley. Aos 16 anos, ele começou a estudar Matemática por si próprio e, aos 19 anos, foi designado para um cargo de professor universitário na Escola Real de Artilharia em Turim. No ano seguinte, Lagrange enviou a Euler soluções para alguns problemas famosos usando novos métodos que acabaram florescendo como um ramo da Matemática chamado de Cálculo das Variações. Esses métodos e suas aplicações por Lagrange aos problemas de Mecânica Celeste foram de tal importância histórica que, com a idade de 25 anos, ele foi considerado por muitos de seus contemporâneos como o maior matemático vivo.

Em 1776, por recomendações de Euler, foi escolhido para suceder Euler como diretor da Academia de Berlim. Durante sua estada em Berlim, Lagrange se distinguiu não apenas na Mecânica Celeste, mas também em equações algébricas e na teoria dos números. Depois de vinte anos em Berlim, mudou-se para Paris a convite de Luís XVI. Foi dado a ele um apartamento no Louvre e o trataram com grande honra, mesmo durante a revolução.

Napoleão foi um grande admirador de Lagrange e distribuiu a ele honrarias – título de conde, senador e Legião da Honra. Os anos em que Lagrange viveu em Paris foram dedicados essencialmente a tratados didáticos resumindo sua concepção da Matemática. Um dos mais famosos trabalhos é um ensaio, *Mécanique Analytique*, no qual reduziu a teoria da Mecânica a umas poucas fórmulas gerais das quais todas as outras equações necessárias poderiam ser deduzidas.

É um fato histórico interessante que o pai de Lagrange especulou, sem bom êxito, em várias aventuras financeiras, o que forçou sua família a viver modestamente. O próprio Lagrange relatou que se sua família tivesse dinheiro, ele não teria seguido a sua vocação, a Matemática. Apesar de sua fama, ele foi sempre um homem tímido e modesto. Depois de sua morte, foi enterrado com honras no Panteão.

*[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joseph_Louis_Lagrange.jpg]*




Um máximo relativo restrito ocorre em $(x_0, y_0)$ se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ em algum segmento de $C$ que se estenda para ambos os lados de $(x_0, y_0)$.

**Figura 13.9.2**

13.9.1*b*, então o valor mínimo de $f(x, y)$ ocorrerá onde a curva de restrição somente tocar uma curva de nível. Assim, para determinar o máximo ou o mínimo de $f(x, y)$ sujeito à restrição $g(x, y) = 0$, procuramos os pontos nos quais (3) é válido – esse é o método dos multiplicadores de Lagrange.

Nosso próximo objetivo nesta seção é tornar o argumento intuitivo precedente mais preciso. Para isso, será útil começar com alguma terminologia sobre o problema de maximizar ou minimizar uma função $f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = 0$. Assim como ocorre com outros tipos de problemas de maximização e minimização, precisamos distinguir entre extremos relativos e absolutos. Diremos que $f$ tem um ***máximo*** (***mínimo***) ***absoluto restrito*** em $(x_0, y_0)$ se $f(x_0, y_0)$ é o maior (menor) valor de $f$ na curva de restrição, e diremos que $f$ tem um ***máximo*** (***mínimo***) ***relativo restrito*** em $(x_0, y_0)$ se $f(x_0, y_0)$ for o maior (menor) valor de $f$ em algum segmento da curva de restrição que se estenda para ambos os lados do ponto $(x_0, y_0)$ (Figura 13.9.2).

Vamos supor que um máximo ou um mínimo relativo restrito ocorra no ponto $(x_0, y_0)$ e, para simplificar, vamos também supor que a curva $g(x, y) = 0$ seja dada por uma parametrização lisa

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

onde $s$ é um parâmetro comprimento de arco com ponto de referência $(x_0, y_0)$ em $s = 0$. Assim, a quantidade

$$z = f(x(s), y(s))$$

tem um máximo ou mínimo relativo em $s = 0$, e isso implica que $dz/ds = 0$ naquele ponto. A partir da regra da cadeia, essa equação pode ser expressa como

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) = 0$$

onde as derivadas são todas calculadas em $s = 0$. Entretanto, o primeiro fator no produto escalar é o gradiente de $f$, e o segundo fator é o vetor tangente unitário à curva de restrição. Como o ponto $(x_0, y_0)$ corresponde a $s = 0$, segue dessa equação que

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{T}(0) = 0$$

o que implica que o gradiente é $\mathbf{0}$ ou normal à curva de restrição em um extremo relativo restrito. Contudo, a curva de restrição $g(x, y) = 0$ é uma curva de nível para a função $g(x, y)$, logo se $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, então $\nabla g(x_0, y_0)$ é normal a essa curva em $(x_0, y_0)$. Disso segue que existe algum escalar $\lambda$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \tag{4}$$

Dizemos que esse escalar é um ***multiplicador de Lagrange***. Assim, o ***método dos multiplicadores de Lagrange*** para determinar extremos relativos restritos consiste em procurar pontos na curva de restrição $g(x, y) = 0$ nos quais a Equação (4) é satisfeita com algum escalar $\lambda$.

**13.9.3** TEOREMA (***Princípio do Extremo Restrito para Duas Variáveis e Uma Restrição***) *Sejam $f$ e $g$ funções de duas variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo a curva de restrição $g(x, y) = 0$ e suponha que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em qualquer ponto da curva. Se $f$ tiver um extremo relativo restrito, então esse extremo ocorrerá em um ponto $(x_0, y_0)$ da curva de restrição no qual os vetores gradientes $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ forem paralelos; isto é, existirá algum número $\lambda$ tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

► **Exemplo 1** Em que ponto ou pontos do círculo $x^2 + y^2 = 1$ tem $f(x, y) = xy$ um máximo absoluto, e qual é esse máximo?

***Solução*** O círculo $x^2 + y^2 = 1$ é um conjunto fechado e limitado e $f(x, y) = xy$ é uma função contínua, portanto, segue do Teorema do Valor Extremo (Teorema 13.8.3) que $f$ tem um máximo absoluto e um mínimo absoluto no círculo. Para encontrar esses extremos, usaremos os multiplicadores de Lagrange para encontrar os extremos relativos restritos e, então, calcularemos $f$ nesses extremos relativos para determinar os extremos absolutos.
Queremos maximizar $f(x, y) = xy$ sujeita à restrição

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{5}$$

Primeiro, procuramos os extremos *relativos* restritos. Para isso, precisaremos dos gradientes

$$\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

Da fórmula de $\nabla g$, vemos que $\nabla g = \mathbf{0}$ se, e somente se, $x = 0$ e $y = 0$, logo $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em todo ponto do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Assim, em um extremo relativo restrito devemos ter

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{ou} \quad y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})$$

que é equivalente ao par de equações

$$y = 2x\lambda \quad \text{e} \quad x = 2y\lambda$$

Segue dessas equações que se $x = 0$, então $y = 0$ e se $y = 0$, então $x = 0$. Em qualquer caso, temos $x^2 + y^2 = 0$, logo a equação restrita $x^2 + y^2 = 1$ não é satisfeita. Assim, podemos supor que $x$ e $y$ são não nulos, e podemos reescrever a equação como

$$\lambda = \frac{y}{2x} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{x}{2y}$$

da qual obtemos

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$$

ou

$$y^2 = x^2$$

Substituindo isso em (5), obtemos

$$2x^2 - 1 = 0 \tag{6}$$

da qual obtemos $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Cada um desses valores, quando substituído na Equação (6), produz os valores $y = \pm 1/\sqrt{2}$. Assim, os extremos relativos restritos ocorrem nos pontos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Os valores de $xy$, nesses pontos, são como segue:

| $(x, y)$ | $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ | $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ | $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ | $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ |
|---|---|---|---|---|
| $xy$ | 1/2 | −1/2 | −1/2 | 1/2 |

Desse modo, a função $f(x, y) = xy$ tem um máximo absoluto de $\frac{1}{2}$ ocorrendo nos dois pontos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Embora não tenha sido perguntado, podemos ver também que $f$ tem um mínimo absoluto de $-\frac{1}{2}$ ocorrendo nos pontos $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. A Figura 13.9.3 mostra algumas curvas de nível $xy = c$ e a curva de restrição na vizinhança do máximo. Uma figura análoga para o mínimo pode ser obtida usando valores negativos de $c$ para as curvas de nível $xy = c$. ◀

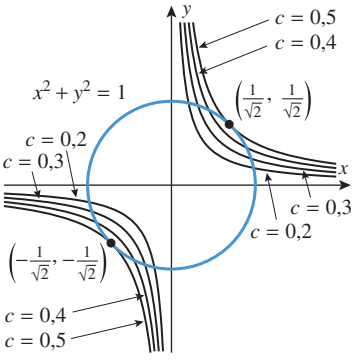



**Figura 13.9.3**

Dê uma outra solução para o Exemplo 1 usando a parametrização

$$x = \cos\theta \quad y = \operatorname{sen}\theta$$

e a identidade

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

**OBSERVAÇÃO** Se $c$ for uma constante, então as funções $g(x, y)$ e $g(x, y) - c$ têm o mesmo gradiente, uma vez que a constante $c$ desaparece quando diferenciamos. Consequentemente, *não* é essencial reescrever uma restrição da forma $g(x, y) = c$ como $g(x, y) - c = 0$ para poder aplicar o princípio do extremo restrito. Assim, no último exemplo, poderíamos ter mantido a restrição na forma $x^2 + y^2 = 1$ e, então, tomar $g(x, y) = x^2 + y^2$ em vez de $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

**▶ Exemplo 2** Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar as dimensões do retângulo com perímetro $p$ e área máxima.

***Solução*** Sejam

$x =$ comprimento do retângulo $\quad y =$ largura do retângulo $\quad A =$ área do retângulo

Queremos maximizar $A = xy$ no segmento da reta

$$2x + 2y = p, \quad 0 \le x, y \tag{7}$$

que corresponde à restrição de perímetro. Esse segmento é um conjunto limitado e fechado e, como $f(x, y) = xy$ é uma função contínua, segue do Teorema do Valor Extremo (Teorema 13.8.3) que $f$ tem um máximo absoluto nesse segmento. Esse máximo absoluto também deve ser um máximo relativo restrito, pois $f$ é 0 nos extremos do segmento e positiva nos demais pontos do segmento. Se $g(x, y) = 2x + 2y$, então temos

$$\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \nabla g = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

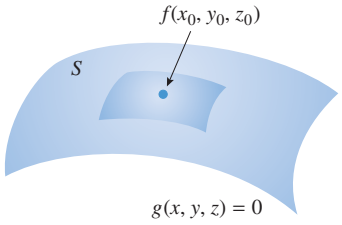
Notando que $\nabla g \neq \mathbf{0}$, segue de (4) que

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

em um máximo relativo restrito. Isso é equivalente às duas equações

$$y = 2\lambda \quad \text{e} \quad x = 2\lambda$$

Eliminando $\lambda$ dessas equações, obtemos $x = y$, o que mostra que o retângulo é realmente um quadrado. Usando esta condição e a restrição (7), obtemos $x = p/4$ e $y = p/4$. ◀




Um máximo restrito relativo ocorre em $(x_0, y_0, z_0)$ se $f(x_0, y_0, z_0) \ge f(x, y, z)$ em todos os pontos de $S$ próximos de $(x_0, y_0, z_0)$.

**Figura 13.9.4**

## TRÊS VARIÁVEIS E UMA RESTRIÇÃO

O método dos multiplicadores de Lagrange pode também ser usado para maximizar ou minimizar uma função de três variáveis $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = 0$. Como regra, o gráfico de $g(x, y, z) = 0$ será alguma superfície $S$ no espaço tridimensional. Assim, do ponto de vista geométrico, o problema é maximizar ou minimizar $f(x, y, z)$, quando $(x, y, z)$ varia sobre a superfície $S$ (Figura 13.9.4). Como de costume, distinguiremos entre extremos relativos e absolutos. Diremos que $f$ tem um ***máximo*** (***mínimo***) ***absoluto restrito*** em $(x_0, y_0, z_0)$ se $f(x_0, y_0, z_0)$ é o maior (menor) valor de $f(x, y, z)$ em $S$, e diremos que $f$ tem um ***máximo*** (***mínimo***) ***relativo restrito*** em $(x_0, y_0, z_0)$ se $f(x_0, y_0, z_0)$ for o maior (menor) valor de $f(x, y, z)$ em todos os pontos de $S$ que estão "próximos" de $(x_0, y_0, z_0)$.

O seguinte teorema, que enunciamos sem prova, é o análogo tridimensional do Teorema 13.9.3.

**13.9.4 TEOREMA** (***Princípio do Extremo Restrito para Três Variáveis e Uma Restrição***) *Sejam $f$ e $g$ funções de três variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo a superfície de restrição $g(x, y, z) = 0$ e suponha que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em qualquer ponto dessa superfície. Se $f$ tiver um extremo relativo restrito, então esse extremo ocorrerá em um ponto $(x_0, y_0, z_0)$ da superfície de restrição no qual os vetores gradientes $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ forem paralelos; isto é, existirá algum número $\lambda$ tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

**▶ Exemplo 3** Determine os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ que estão o mais próximo e o mais afastado do ponto $(1, 2, 2)$.

***Solução*** Para evitar radicais, determinaremos os pontos da esfera que minimizem e maximizem o *quadrado* da distância ao ponto (1, 2, 2). Assim, queremos encontrar os extremos relativos de

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$$

sujeita à restrição

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \tag{8}$$

Se tomarmos $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, então $\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Desse modo, $\nabla g = \mathbf{0}$ se, e somente se, $x = y = z = 0$. Segue que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em qualquer ponto da esfera (8) e, portanto, os extremos relativos restritos devem ocorrrer em pontos nos quais

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

Isto é,

$$2(x - 1)\mathbf{i} + 2(y - 2)\mathbf{j} + 2(z - 2)\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k})$$

que leva às equações

$$2(x - 1) = 2x\lambda, \quad 2(y - 2) = 2y\lambda, \quad 2(z - 2) = 2z\lambda \tag{9}$$

Podemos supor que $x$, $y$ e $z$ sejam não nulos, uma vez que $x = 0$ não satisfaz a primeira equação, $y = 0$ não satisfaz a segunda e $z = 0$ não satisfaz a terceira. Assim, podemos reescrever (9) como

$$\frac{x - 1}{x} = \lambda, \quad \frac{y - 2}{y} = \lambda, \quad \frac{z - 2}{z} = \lambda$$

As duas primeiras equações implicam que

$$\frac{x - 1}{x} = \frac{y - 2}{y}$$

do que segue

$$y = 2x \tag{10}$$

Analogamente, a primeira e a terceira equações implicam que

$$z = 2x \tag{11}$$

Substituindo (10) e (11) na equação de restrição (8), obtemos

$$9x^2 = 36 \quad \text{ou} \quad x = \pm 2$$

Substituindo esses valores em (10) e (11), obtemos dois pontos

$$(2, 4, 4) \quad \text{e} \quad (-2, -4, -4)$$

Uma vez que $f(2, 4, 4) = 9$ e $f(-2, -4, -4) = 81$, segue que (2, 4, 4) é o ponto da esfera mais próximo a (1, 2, 2) e (−2, −4, −4) é o ponto que está mais afastado (Figura 13.9.5). ◄

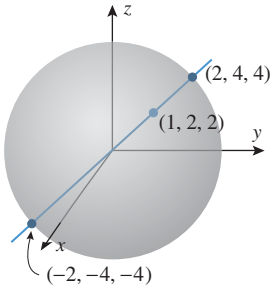



**Figura 13.9.5**

**OBSERVAÇÃO** Geralmente, a resolução de sistemas lineares como (9) envolve tentativa e erro. Uma técnica que às vezes funciona foi demonstrada no Exemplo 3. Naquele exemplo, resolvemos as equações para uma variável comum ($\lambda$) e depois deduzimos relações entre as demais variáveis ($x$, $y$ e $z$). Substituir essas relações na equação de restrição nos levou ao valor de uma das variáveis, a partir da qual calculamos os valores das demais variáveis.

A seguir, usaremos multiplicadores de Lagrange para resolver o problema do Exemplo 6 da seção anterior.

► **Exemplo 4** Use multiplicadores de Lagrange para determinar as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 pés$^3$ e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material.

***Solução*** Com a notação introduzida no Exemplo 6 da última seção, o problema é minimizar a área de superfície

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

sujeita à restrição do volume

$$xyz = 32 \tag{12}$$

Se tomarmos $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ e $g(x, y, z) = xyz$, então

$$\nabla f = (y + 2z)\mathbf{i} + (x + 2z)\mathbf{j} + (2x + 2y)\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \nabla g = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

Segue-se que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em qualquer ponto da superfície $xyz = 32$, uma vez que $x$, $y$ e $z$ são não nulos nessa superfície. Assim, em um extremo relativo restrito devemos ter $\nabla f = \lambda \nabla g$, isto é,

$$(y + 2z)\mathbf{i} + (x + 2z)\mathbf{j} + (2x + 2y)\mathbf{k} = \lambda(yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$$

Essa condição fornece as três equações

$$y + 2z = \lambda yz, \quad x + 2z = \lambda xz, \quad 2x + 2y = \lambda xy$$

Como $x$, $y$ e $z$ são não nulos, essas equações podem ser reescritas como

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{y} = \lambda, \quad \frac{1}{z} + \frac{2}{x} = \lambda, \quad \frac{2}{y} + \frac{2}{x} = \lambda$$

Das duas primeiras equações,

$$y = x \tag{13}$$

e da primeira e terceira equações

$$z = \tfrac{1}{2}x \tag{14}$$

Substituindo (13) e (14) na restrição de volume (12), obtemos

$$\tfrac{1}{2}x^3 = 32$$

Essa equação, junto a (13) e (14), fornece

$$x = 4, \quad y = 4, \quad z = 2.$$

o que é consistente com o resultado que foi obtido no Exemplo 6 da última seção. ◀

Há variações no método dos multiplicadores de Lagrange que podem ser usadas para resolver problemas com duas ou mais restrições. Contudo, não discutiremos esse tópico aqui.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.9 (Ver página 997 para respostas.)

**1.** (a) Suponha que $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sejam diferenciáveis na origem, que tenham gradientes não nulos nesse ponto e que $g(0, 0) = 0$. Se o valor máximo de $f(x, y)$ condicionado à restrição $g(x, y) = 0$ ocorrer na origem, qual é a relação entre a reta tangente ao gráfico de $g(x, y) = 0$ e a reta tangente na origem à curva de nível de $f$ por $(0, 0)$?

(b) Suponha que $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ sejam diferenciáveis na origem, que tenham gradientes não nulos nesse ponto e que $g(0, 0, 0) = 0$. Se o valor máximo de $f(x, y, z)$ condicionado à restrição $g(x, y, z) = 0$ ocorrer na origem, qual é a relação entre o plano tangente ao gráfico da restrição $g(x, y, z) = 0$ e o plano tangente na origem à superfície de nível de $f$ por $(0, 0, 0)$?

**2.** O valor máximo de $x + y$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 = 1$ é _____.

**3.** O valor máximo de $x + y + z$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é _____.

**4.** Os valores máximo e mínimo de $2x + 3y$ sujeitos à restrição $x + y = 1$, com $0 \leq x$, $0 \leq y$, são _____ e _____, respectivamente.

## EXERCÍCIOS 13.9 Recurso Gráfico CAS

### ENFOCANDO CONCEITOS

**1.** A figura a seguir mostra o gráfico da reta $x + y = 4$ e as curvas de nível de altura $c = 2, 4, 6$ e $8$ para a função $f(x, y) = xy$.

(a) Use a figura para encontrar o valor máximo da função $f(x, y) = xy$ sujeita à restrição $x + y = 4$ e explique seu raciocínio.

(b) Como podemos dizer, a partir da figura, que a resposta em (a) não é o valor mínimo de $f$ sujeita à restrição?

(c) Use multiplicadores de Lagrange para verificar seu trabalho.

**2.** A figura a seguir mostra o gráfico da reta $3x + 4y = 25$ e as curvas de nível de altura $c = 9, 16, 25, 36$ e $49$ para a função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(a) Use a figura para encontrar o valor mínimo da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeita à restrição $3x + 4y = 25$ e explique seu raciocínio.

(b) Como podemos dizer a partir da figura que a resposta em (a) não é o valor máximo de $f$ sujeito à restrição?

(c) Use multiplicadores de Lagrange para verificar seu trabalho.

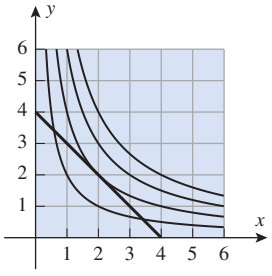



**Figura Ex-1**

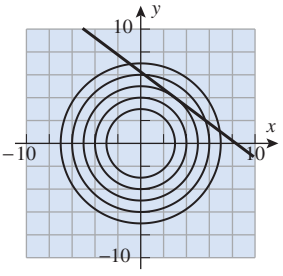



**Figura Ex-2**

**3.** (a) Use um recurso gráfico para gerar o círculo $x^2 + y^2 = 25$ e duas curvas de nível distintas de $f(x, y) = x^2 - y$ que somente toquem o círculo.

(b) Use os resultados obtidos na parte (a) para aproximar os valores máximo e mínimo de $f$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 25$.

(c) Verifique as suas aproximações da parte (b) usando multiplicadores de Lagrange.

**4.** (a) Se o leitor dispuser de um CAS que possa gerar curvas implícitas, use-o para fazer o gráfico do círculo $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$ e duas curvas de nível distintas de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ que somente toquem o círculo.

(b) Use o resultado obtido na parte (a) para aproximar o valor mínimo de $f$ sujeita à restrição $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

(c) Confirme graficamente que o valor encontrado em (b) é um mínimo e não um máximo.

(d) Verifique suas aproximações usando multiplicadores de Lagrange e resolvendo as equações necessárias numericamente.

**5-12** Use multiplicadores de Lagrange para obter os valores máximo e mínimo de $f$ sujeita à restrição dada. Além disso, encontre os pontos nos quais esses valores extremos ocorrem. ■

**5.** $f(x, y) = xy;\ 4x^2 + 8y^2 = 16$

**6.** $f(x, y) = x^2 - y^2;\ x^2 + y^2 = 25$

**7.** $f(x, y) = 4x^3 + y^2;\ 2x^2 + y^2 = 1$

**8.** $f(x, y) = x - 3y - 1;\ x^2 + 3y^2 = 16$

**9.** $f(x, y, z) = 2x + y - 2z;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$

**10.** $f(x, y, z) = 3x + 6y + 2z;\ 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 70$

**11.** $f(x, y, z) = xyz;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**12.** $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**13-16** Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**13.** Um "multiplicador de Lagrange" é um tipo especial de vetor gradiente.

**14.** Os extremos de $f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = 0$ ocorrem em pontos nos quais $\nabla f = \nabla g$.

**15.** No método dos multiplicadores de Lagrange, é necessário resolver a equação de restrição $g(x, y) = 0$ para $y$ em termos de $x$.

**16.** Os extremos de $f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = 0$ ocorrem em pontos nos quais uma curva de nível de $f$ for tangente à curva de restrição $g(x, y) = 0$.

**17-24** Resolva usando multiplicadores de Lagrange. ■

**17.** Determine o ponto da reta $2x - 4y = 3$ que está mais próximo da origem.

**18.** Encontre o ponto da reta $y = 2x + 3$ que está mais próximo de $(4, 2)$.

**19.** Encontre o ponto do plano $x + 2y + z = 1$ que está mais próximo da origem.

**20.** Encontre o ponto do plano $4x + 3y + z = 2$ que está mais próximo de $(1, 1, 1)$.

**21.** Encontre os pontos do círculo $x^2 + y^2 = 45$ que estão mais próximos e afastados de $(1, 2)$.

**22.** Encontre os pontos da superfície $xy - z^2 = 1$ que estão mais próximos da origem.

**23.** Encontre um vetor no espaço tridimensional cujo comprimento seja 5 e cujos componentes têm a maior soma possível.

**24.** Suponha que a temperatura em um ponto $(x, y)$ de uma placa de metal seja $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Uma formiga, andando sobre a placa, percorre um círculo de raio 5 centrado na origem. Qual é a maior e a menor temperatura encontrada pela formiga?

**25-32** Use multiplicadores de Lagrange para resolver os problemas indicados da Seção 13.8. ■

**25.** Exercício 38

**26.** Exercício 39

**27.** Exercício 40

**28.** Exercício 41

**29.** Exercício 43

**30.** Exercícios 45(a) e 45(b)

**31.** Exercício 46

**32.** Exercício 47

C **33.** Sejam $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ os ângulos de um triângulo.
(a) Use multiplicadores de Lagrange para determinar o valor máximo de $f(\alpha, \beta, \gamma) = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ e determine os ângulos para os quais o máximo ocorre.
(b) Expresse $f(\alpha, \beta, \gamma)$ como uma função apenas de $\alpha$ e $\beta$ e use um CAS para fazer o gráfico dessa função de duas variáveis. Confirme que o resultado obtido na parte (a) é consistente com o gráfico.

**34.** A figura a seguir mostra a interseção do paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ e o cilindro circular reto $x^2 + y^2 = 1$. Use multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos mais alto e mais baixo da curva de interseção.

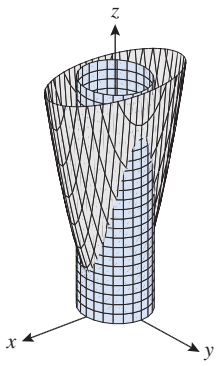


**Figura Ex-34**

**35.** **Texto** Forneça uma sequência dos passos da resolução de um problema de extremos a duas variáveis com uma restrição pelo método dos multiplicadores de Lagrange. Interprete cada passo geometricamente.

**36.** **Texto** Retome o Exemplo 2 usando os métodos da Seção 4.5 (no Volume 1) e compare sua resolução com a do Exemplo 2. Por exemplo, como é utilizada a restrição do perímetro em cada abordagem?

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 13.9

**1.** (a) São a mesma reta. (b) São o mesmo plano. **2.** $\sqrt{2}$ **3.** $\sqrt{3}$ **4.** 3; 2

## EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 13 Recurso Gráfico

**1.** Seja $f(x, y) = e^x \ln y$. Obtenha
(a) $f(\ln y, e^x)$ (b) $f(r + s, rs)$.

**2.** Esboce o domínio de $f$ usando linhas contínuas para as partes da fronteira incluídas no domínio e linhas tracejadas para as partes não incluídas.
(a) $f(x, y) = \ln(xy - 1)$ (b) $f(x, y) = (\text{arc sen } x)/e^y$

**3.** Mostre que as curvas de nível do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e do paraboloide $z = x^2 + y^2$ são círculos e faça um esboço que ilustre a diferença entre os mapas de contornos das duas funções.

**4.** (a) Em palavras, descreva as superfícies de nível da função $f(x, y, z) = a^2x^2 + a^2y^2 + z^2$, onde $a > 0$.
(b) Encontre uma função $f(x, y, z)$ cujas superfícies de nível formem uma família de paraboloides circulares que se abrem na direção $z$ positiva.

**5-6** (a) Obtenha o limite da função $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ se ele existir e (b) determine se $f$ é contínua em $(0, 0)$. ■

**5.** $f(x, y) = \dfrac{x^4 - x + y - x^3y}{x - y}$

**6.** $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

**7.** (a) Uma companhia fabrica dois tipos de monitores de computadores: padrão e de alta resolução. Suponha que $P(x, y)$ seja o lucro que resulta da produção e da venda de $x$ monitores padrão e $y$ monitores de alta resolução. O que representam as duas derivadas parciais $\partial P/\partial x$ e $\partial P/\partial y$?
(b) Suponha que a temperatura no instante $t$ em um ponto $(x, y)$ sobre a superfície de um lago seja $T(x, y, t)$. O que representam as derivadas parciais $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial t$?

**8.** Seja $z = f(x, y)$.
(a) Expresse $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ como limites.
(b) Em palavras, o que as derivadas $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ dizem sobre a superfície $z = f(x, y)$?
(c) Em palavras, o que as derivadas $\partial z/\partial x\ (x_0, y_0)$ e $\partial z/\partial y(x_0, y_0)$ dizem sobre as taxas de variação de $z$ em relação a $x$ e $y$?

**9.** A pressão em $\text{N/m}^2$ de um gás em um cilindro é dada por $P = 10T/V$ com $T$ em kelvins (K) e $V$ em $\text{m}^3$.
(a) Se $T$ crescer a uma taxa de 3K/min com $V$ mantido fixado em 2,5 $\text{m}^3$, determine a taxa à qual a pressão está variando quando $T = 50$ K.
(b) Se $T$ for mantido fixado em 50 K enquanto que $V$ está decrescendo a uma taxa de 3 $\text{m}^3$/min, determine a taxa à qual a pressão está variando quando $V = 2{,}5\ \text{m}^3$.

**10.** Obtenha a inclinação da reta tangente no ponto $(1, -2, -3)$ da curva de interseção da superfície $z = 5 - 4x^2 - y^2$ com
(a) o plano $x = 1$ (b) o plano $y = -2$.

**11–14** Verifique a afirmação. ■

**11.** Se $w = \operatorname{tg}(x^2 + y^2) + x\sqrt{y}$, então $w_{xy} = w_{yx}$.

**12.** Se $w = \ln(3x - 3y) + \cos(x + y)$, então $\partial^2 w/\partial x^2 = \partial^2 w/\partial y^2$.

**13.** Se $F(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$, então $F$ satisfaz a equação $F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} = 0$.

**14.** Se $f(x, y, z) = xyz + x^2 + \ln(y/z)$, então $f_{xyzx} = f_{zxxy}$.

**15.** O que $\Delta f$ e $df$ representam e como se relacionam?

**16.** Se $w = x^2y - 2xy + y^2x$, encontre o incremento $\Delta w$ e a diferencial $dw$ se $(x, y)$ varia de $(1, 0)$ para $(1{,}1; -0{,}1)$.

**17.** Use diferenciais para estimar a variação no volume $V = \frac{1}{3}x^2h$ de uma pirâmide com uma base quadrada quando sua altura $h$ está crescendo de 2 a 2,2 m, enquanto a dimensão $x$ da base está decrescendo de 1 a 0,9 m. Compare isso com $\Delta V$.

**18.** Encontre a aproximação linear local de $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$ em $\left(\frac{1}{3}, \pi\right)$.

**19.** Suponha que $z$ seja uma função diferenciável de $x$ e $y$ com

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = 4 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = 2$$

Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são funções diferenciáveis de $t$ com $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $x'(0) = -\frac{1}{2}$ e (na composição) $z'(0) = 2$, encontre $y'(0)$.

**20.** Em cada parte, use o Teorema 13.5.3 para determinar $dy/dx$.
(a) $3x^2 - 5xy + \operatorname{tg} xy = 0$
(b) $x \ln y + \operatorname{sen}(x - y) = \pi$

**21.** Dado que $f(x, y) = 0$, use o Teorema 13.5.3 para expressar $d^2y/dx^2$ em termos das derivadas parciais de $f$.

**22.** Seja $z = f(x, y)$, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$.
(a) Mostre que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dt}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}$$

(b) Use as fórmulas da parte (a) para ajudar a encontrar uma fórmula para $d^2z/dt^2$.

**23.** (a) Como estão relacionados a derivada direcional e o gradiente de uma função?
(b) Sob quais condições a derivada direcional de uma função diferenciável é 0?
(c) Em que direções e sentidos a derivada direcional de uma função diferenciável tem seu valor máximo? E o valor mínimo?

**24.** Em palavras, o que a derivada $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ nos diz sobre a superfície $z = f(x, y)$?

**25.** Encontre $D_{\mathbf{u}}f(-3, 5)$ para $f(x, y) = y \ln(x + y)$ se $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$.

**26.** Suponha que $\nabla f(0, 0) = 2\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$.
(a) Encontre um vetor unitário $\mathbf{u}$ tal que $D_{\mathbf{u}}f(0, 0)$ seja um máximo. Qual é esse valor máximo?
(b) Encontre um vetor unitário $\mathbf{u}$ tal que $D_{\mathbf{u}}f(0, 0)$ seja um mínimo. Qual é esse valor mínimo?

**27.** No ponto $(1, 2)$, a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f$ é $2\sqrt{2}$ na direção e sentido de $P_1(2, 3)$ e é $-3$ na direção e sentido de $P_2(1, 0)$. Determine $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$ na direção e no sentido da origem.

**28.** Obtenha equações para o plano tangente e a reta normal para a dada superfície em $P_0$.
(a) $z = x^2e^{2y}$; $P_0(1, \ln 2, 4)$
(b) $x^2y^3z^4 + xyz = 2$; $P_0(2, 1, -1)$

**29.** Encontre todos os pontos da superfície $z = 2 - xy$ nos quais a reta normal passa pela origem.

**30.** Mostre que para todos os planos tangentes à superfície

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$$

a soma dos quadrados das coordenadas dos pontos de corte com os eixos $x$, $y$ e $z$ é 1.

**31.** Determine todos os pontos do paraboloide $z = 9x^2 + 4y^2$ nos quais a reta normal é paralela à reta que passa pelos pontos $P(4, -2, 5)$ e $Q(-2, -6, 4)$.

**32.** Suponha que as equações do movimento de uma partícula sejam $x = t - 1$, $y = 4e^{-t}$, $z = 2 - \sqrt{t}$, onde $t > 0$. Determine, até o décimo de grau mais próximo, o ângulo agudo entre o vetor velocidade e a reta normal à superfície $(x^2/4) + y^2 + z^2 = 1$ nos pontos em que a partícula colide com a superfície. Use uma calculadora com a capacidade de encontrar raízes, quando necessário.

**33–36** Localize todos os mínimos relativos, máximos relativos e os pontos de sela. ■

**33.** $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y$

**34.** $f(x, y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$

**35.** $f(x, y) = x^3 - 3xy + \frac{1}{2}y^2$

**36.** $f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

**37–39** Resolva estes exercícios de duas maneiras:
(a) Use restrições para eliminar uma variável.
(b) Use multiplicadores de Lagrange. ■

**37.** Encontre todos extremos relativos de $x^2y^2$ sujeitos à restrição $4x^2 + y^2 = 8$.

**38.** Determine as dimensões da caixa retangular de volume máximo que possa ser inscrita no elipsoide

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$$

**39.** Conforme ilustrado na figura a seguir, suponha que uma corrente $I$ se divida em correntes $I_1$, $I_2$ e $I_3$ que passam nos resistores $R_1$, $R_2$ e $R_3$, respectivamente, de tal forma que a energia total para os três resistores é um mínimo. Determine as razões $I_1$: $I_2$: $I_3$ se a energia dissipada em $R_i$ é $I_i^2R_i$ $(i = 1, 2, 3)$ e $I_1 + I_2 + I_3 = I$.

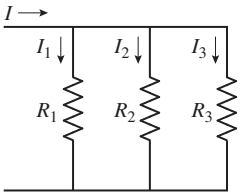



**Figura Ex-39**

**40-42** Em Economia, um ***modelo de produção*** é uma relação matemática entre o produto de uma companhia ou um país e o trabalho e equipamento de capital necessário para produzir aquele produto. Muito do trabalho pioneiro no campo de modelos de produção ocorreu em torno de 1920, quando Paul Douglas, da Universidade de Chicago, e seu colaborador Charles Cobb propuseram que o produto $P$ pode ser expresso em termos do trabalho $L$ e o equipamento de capital $K$ por uma equação da forma

$$P = cL^{\alpha}K^{\beta}$$

onde $c$ é uma constante de proporcionalidade e $\alpha$ e $\beta$ são constantes tais que $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$. Isso é chamado de ***modelo de produção de Cobb-Douglas***. Tipicamente, $P$, $L$ e $K$ são dados em termos de seus equivalentes valores monetários. Estes exercícios exploram propriedades desse modelo. ■

**40.** (a) Considere o modelo de produção de Cobb-Douglas dado pela fórmula $P = L^{0,75}K^{0,25}$. Esboce as curvas de nível $P(L, K) = 1$, $P(L, K) = 2$ e $P(L, K) = 3$ em um sistema de coordenadas $LK$ ($L$ horizontal e $K$ vertical). Esse esboço não precisa ser numericamente exato, mas deve mostrar a forma geral das curvas e suas relativas posições.

(b) Use um recurso gráfico para fazer um mapa de contornos mais acurado do modelo.

**41.** (a) Encontre $\partial P/\partial L$ e $\partial P/\partial K$ para o modelo de produção de Cobb-Douglas $P = cL^{\alpha}K^{\beta}$.

(b) A derivada $\partial P/\partial L$ é chamada de ***produtividade marginal do trabalho*** e a derivada $\partial P/\partial K$ é chamada de ***produtividade marginal do capital***. Explique o que essas quantidades significam em termos práticos.

(c) Mostre que se $\beta = 1 - \alpha$, então $P$ satisfaz a equação diferencial parcial

$$K\frac{\partial P}{\partial K} + L\frac{\partial P}{\partial L} = P$$

**42.** Considere o modelo de produção de Cobb-Douglas

$$P = 1.000L^{0,6}K^{0,4}$$

(a) Encontre o valor máximo de $P$ se o trabalho custa \$50,00 por unidade, o capital custa \$100,00 por unidade e o custo total de trabalho e capital é fixado em \$200.000,00.

(b) Como devem ser alocados os \$200.000,00 entre trabalho e capital para atingir o máximo de $P$?

## CAPÍTULO 13 ESTABELECENDO CONEXÕES

**1.** Suponha que uma função $z = f(x, y)$ seja dada em forma polar fazendo as substituições $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Mostre que

$$r\frac{\partial z}{\partial r} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}$$

**2.** Dizemos que uma função $f(x, y)$ é ***homogênea de grau n*** se $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ com $t > 0$. Em cada parte, mostre que a função é homogênea e obtenha seu grau.

(a) $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f(x, y) = x^2y - 2y^3$ (d) $f(x, y) = \dfrac{5}{(x^2 + 2y^2)^2}$

**3.** Suponha que uma função $f(x, y)$ esteja definida em todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$. Prove que $f$ é homogênea de grau $n$ se, e só se, existe alguma função $g(\theta)$ de período $2\pi$ tal que a forma polar da equação $z = f(x, y)$ seja

$$z = r^n g(\theta)$$

com $r > 0$ e $-\infty < \theta < +\infty$.

**4.** (a) Use a regra da cadeia para mostrar que se $f(x, y)$ for uma função homogênea de grau $n$, então

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

[*Sugestão:* Tome $u = tx$ e $v = ty$ em $f(tx, ty)$ e derive ambos os lados de $f(u, v) = t^n f(x, y)$ em relação a $t$.]

(b) Use os resultados dos Exercícios 1 e 3 para obter uma outra dedução da equação na parte (a).

(c) Confirme que as funções do Exercício 2 satisfazem a equação da parte (a).

**5.** Suponha que uma função $f(x, y)$ esteja definida em todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ e satisfaça

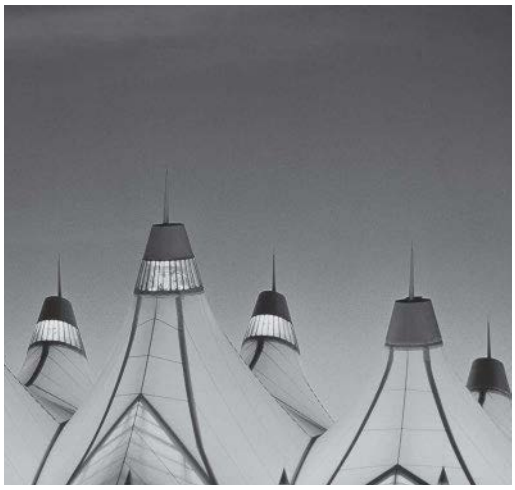
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

Prove que $f$ é homogênea de grau $n$. [*Sugestão:* Expresse a função $z = f(x, y)$ em forma polar e use o Exercício 1 para concluir que

$$r\frac{\partial z}{\partial r} - nz = 0$$

Divida ambos os lados dessa equação por $r^{n+1}$ e interprete o lado esquerdo da equação resultante como a derivada parcial em relação a $r$ de um produto de duas funções.]

# 14 INTEGRAIS MÚLTIPLAS



Stone/Getty Images

*Os métodos de integração estudados neste capítulo são necessários para encontrar a área de superfícies complexas como as utilizadas no projeto do Aeroporto Internacional de Denver, nos Estados Unidos.*

Neste capítulo, ampliaremos o conceito de integral definida para funções de duas e três variáveis. Enquanto as funções de uma variável são, geralmente, integradas em intervalos, as funções de duas varáveis são usualmente integradas em regiões do espaço bidimensional e as funções de três variáveis, em regiões do espaço tridimensional. O cálculo de tais integrais requer algumas técnicas novas que serão o foco central deste capítulo. Uma vez que tenhamos desenvolvido os métodos básicos para integrar funções de duas e três variáveis, mostraremos como essas integrais podem ser usadas para calcular áreas de superfícies e volumes de sólidos; mostraremos, também, como elas podem ser usadas para determinar massas e centros de gravidade de chapas planas e sólidos tridimensionais. Além do nosso estudo de integração, generalizaremos o conceito de curva paramétrica no espaço bidimensional para o de superfície paramétrica no espaço tridimensional. Isso nos permitirá trabalhar com uma variedade maior de superfícies do que era possível anteriormente e proporcionará uma ferramenta poderosa para gerar superfícies usando computadores e outros recursos computacionais gráficos.

## 14.1 INTEGRAIS DUPLAS

*A noção de integral definida pode ser estendida para funções de duas ou mais variáveis. Nesta seção, discutiremos a integral dupla, que é a extensão para funções de duas variáveis.*

### VOLUME

Lembre-se de que a integral definida de uma função de uma variável

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \tag{1}$$

originou-se do problema da determinação de áreas sob curvas. [Na expressão à direita em (1), usamos o "limite quando $n \to +\infty$" para sintetizar o processo pelo qual aumentamos o número de subintervalos de $[a, b]$ de tal modo que os comprimentos dos subintervalos tendam a zero.] As integrais das funções de duas variáveis originam-se do problema da determinação de volumes sob superfícies:

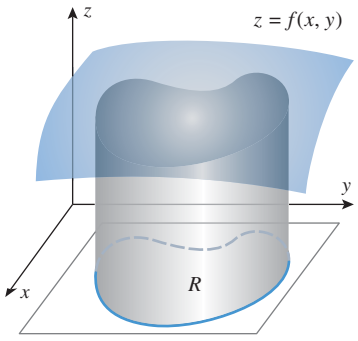



Figura 14.1.1

**14.1.1 O PROBLEMA DO VOLUME** Dada uma função $f$ de duas variáveis, contínua e não negativa em uma região $R$ do plano $xy$, encontre o volume do sólido compreendido entre a superfície $z = f(x, y)$ e a região $R$ (Figura 14.1.1).

Adiante, adicionaremos mais restrições à região $R$, mas por enquanto vamos supor apenas que a região inteira possa ser envolvida por um retângulo apropriadamente grande cujos lados sejam paralelos aos eixos coordenados. Isto assegura que $R$ não se estenda indefinidamente em qualquer direção.

O procedimento para calcular o volume $V$ do sólido da Figura 14.1.1 é similar ao processo limitante usado para determinar áreas, exceto que, agora, os elementos de aproximação são paralelepípedos retangulares em vez de retângulos. Procedemos como segue:

- Usando retas paralelas aos eixos coordenados, divida o retângulo que envolve a região $R$ em sub-retângulos e exclua das considerações todos os sub-retângulos que contenham quaisquer pontos fora de $R$. Sobram somente retângulos que são subconjuntos de $R$ (Figura 14.1.2). Suponha que haja $n$ desses sub-retângulos e denote a área do $k$-ésimo retângulo por $\Delta A_k$.
- Escolha um ponto arbitrário em cada sub-retângulo e denote o ponto do $k$-ésimo sub-retângulo por $(x_k^*, y_k^*)$. Como mostrado na Figura 14.1.3, o produto $f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ é o volume de um paralelepípedo retangular com área da base $\Delta Ak$ e altura $f(x_k^*, y_k^*)$, de modo que o somatório

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

pode ser considerado como uma aproximação do volume $V$ do sólido inteiro.

- Há duas fontes de erro na aproximação: em primeiro lugar, os paralelepípedos têm topo plano, enquanto que a superfície $z = f(x, y)$ pode ser curva; em segundo lugar, os retângulos que formam as bases dos paralelepípedos não cobrem completamente a região $R$. Entretanto, se repetirmos o processo acima com cada vez mais subdivisões, de modo que tanto os comprimentos quanto as larguras dos retângulos da base tendam a zero, então é plausível que os erros de ambos os tipos tendam para zero e o volume exato do sólido seja

$$V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

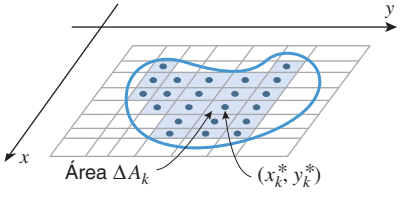



Figura 14.1.2

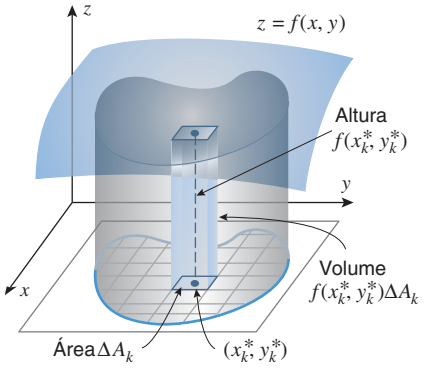



Figura 14.1.3

Essa fórmula sugere a seguinte definição.

Apesar da Definição 14.1.2 ser satisfatória para nossos propósitos atuais, há vários problemas que precisam ser resolvidos antes que ela possa ser considerada uma definição matematicamente rigorosa. Por exemplo, teríamos de provar que o limite existe realmente e que seu valor independe de como os pontos $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \ldots, (x_n^*, y_n^*)$ são escolhidos. Prova-se que isso é verdadeiro se a função $f$ for contínua na região $R$ e se essa região não for muito "complicada". Os detalhes escapam ao escopo deste livro.

**14.1.2 DEFINIÇÃO** (***Volume sob uma Superfície***) Se $f$ for uma função de duas variáveis, contínua e não negativa em uma região $R$ do plano $xy$, então o volume do sólido compreendido entre a superfície $z = f(x, y)$ e a região $R$ será definido por

$$V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \tag{2}$$

Aqui, $n \to +\infty$ indica o processo de aumentar o número de sub-retângulos do retângulo que envolve $R$ de tal modo que tanto os comprimentos quanto as larguras dos sub-retângulos tendam a zero.

Supõe-se na Definição 14.1.2 que $f$ seja não negativa na região $R$. Se $f$ for contínua em $R$ e possuir tanto valores positivos como negativos, então o limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \tag{3}$$

não representa mais o volume entre $R$ e a superfície $z = f(x, y)$; representa, sim, uma diferença de volumes – o volume entre $R$ e a parte da superfície acima do plano $xy$ menos o volume entre $R$ e a parte da superfície abaixo do plano $xy$. Chamamos essa diferença de ***volume líquido com sinal*** entre a região $R$ e a superfície $z = f(x, y)$.

## DEFINIÇÃO DE UMA INTEGRAL DUPLA

A notação $n \to +\infty$ em (3), da mesma forma que na Definição 14.1.2, contém todo o processo pelo qual o retângulo que envolve a região $R$ é, repetidamente, subdividido de tal modo que tanto os comprimentos quanto as larguras dos sub-retângulos tendam a zero. Note que, subdividindo de tal modo que os comprimentos dos sub-retângulos tendam a zero, forçamos a norma da partição do comprimento do retângulo que envolve $R$ tender a zero. Analogamente, subdividindo de tal modo que as larguras dos sub-retângulos tendam a zero, forçamos a norma da partição da largura do retângulo que envolve $R$ tender a zero. Assim, estendemos o conceito transmitido pela Fórmula (1), em que a integral definida de uma função de uma variável é expressa como um limite de somas de Riemann. Por extensão, as somas em (3) também são denominadas ***somas de Riemann***, e o limite das somas de Riemann é denotado por

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \tag{4}$$

que é denominada ***integral dupla*** de $f(x, y)$ em $R$.

Se $f$ for contínua e não negativa na região $R$, então a Fórmula (2) do volume poderá ser expressa como

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA \tag{5}$$

Se $f$ possui tanto valores positivos como negativos em $R$, então um valor positivo para a integral dupla de $f$ em $R$ significa que há mais volume acima do que abaixo de $R$; um valor negativo para a integral dupla significa que há mais volume abaixo do que acima de $R$; e o valor zero significa que o volume acima é igual ao volume abaixo de $R$.

## CÁLCULO DE INTEGRAIS DUPLAS

Com exceção dos casos mais simples, é impraticável obter o valor de uma integral dupla pelo limite (4). Entretanto, vamos mostrar, agora, como calcular integrais duplas por meio do cál-

culo de duas integrais simples sucessivas. No restante desta seção, vamos limitar nossa discussão ao caso em que $R$ é um retângulo; na próxima seção, consideraremos integrais duplas em regiões mais complicadas.

As derivadas parciais de uma função $f(x, y)$ são calculadas mantendo-se uma das variáveis fixa e diferenciando em relação à outra variável. Consideremos o inverso deste processo, ***integração parcial***. Os símbolos

$$\int_a^b f(x, y)\,dx \quad \text{e} \quad \int_c^d f(x, y)\,dy$$

denotam ***integrais definidas parciais***; a primeira integral, chamada de ***integral definida parcial em relação a x***, é calculada mantendo $y$ fixo e integrando em relação a $x$; e a segunda integral, chamada de ***integral definida parcial em relação a y***, é calculada mantendo $x$ fixo e integrando em relação a $y$. Como mostra o exemplo a seguir, a integral definida parcial em relação a $x$ é uma função de $y$, e a integral definida parcial em relação a $y$ é uma função de $x$.

**► Exemplo 1**

$$\int_0^1 xy^2\,dx = y^2\int_0^1 x\,dx = \frac{y^2x^2}{2}\Big]_{x=0}^{1} = \frac{y^2}{2}$$

$$\int_0^1 xy^2\,dy = x\int_0^1 y^2\,dy = \frac{xy^3}{3}\Big]_{y=0}^{1} = \frac{x}{3}$$ ◄

Uma integral definida parcial em relação a $x$ é uma função de $y$ e, portanto, pode ser integrada em relação a $y$; de modo similar, uma integral definida parcial em relação a $y$ pode ser integrada em relação a $x$. Esse processo de integração em dois estágios é chamado de ***integração iterada*** (ou ***repetida***). Introduzimos a seguinte notação:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy \tag{6}$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx \tag{7}$$

Essas integrais são chamadas de ***integrais iteradas***.

**► Exemplo 2** Calcule

$$\text{(a)}\ \int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy)\,dy\,dx \qquad \text{(b)}\ \int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy)\,dx\,dy$$

***Solução (a)***

$$\begin{aligned}\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy)\,dy\,dx &= \int_1^3 \left[\int_2^4 (40 - 2xy)\,dy\right] dx \\ &= \int_1^3 (40y - xy^2)\Big]_{y=2}^{4}\,dx \\ &= \int_1^3 [(160 - 16x) - (80 - 4x)]\,dx \\ &= \int_1^3 (80 - 12x)\,dx \\ &= (80x - 6x^2)\Big]_1^3 = 112\end{aligned}$$

*Solução (b)*

$$\int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy)\,dx\,dy = \int_2^4 \left[\int_1^3 (40 - 2xy)\,dx\right] dy$$
$$= \int_2^4 (40x - x^2y)\Big]_{x=1}^3 dy$$
$$= \int_2^4 [(120 - 9y) - (40 - y)]\,dy$$
$$= \int_2^4 (80 - 8y)\,dy$$
$$= (80y - 4y^2)\Big]_2^4 = 112 \quad \blacktriangleleft$$

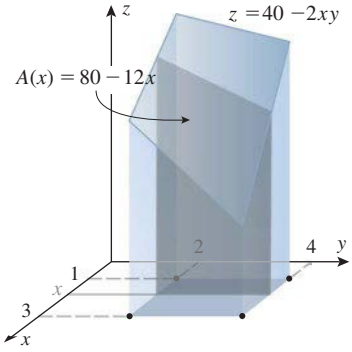



**Figura 14.1.4**

Não é por acaso que ambas as partes do Exemplo 2 tenham produzido a mesma resposta. Considere o sólido $S$ limitado acima pela superfície $z = 40 - 2xy$ e abaixo pelo retângulo $R$ definido por $1 \le x \le 3$ e $2 \le y \le 4$. Pelo método de fatiamento discutido na Seção 6.2, no Volume 1, o volume de $S$ é dado por

$$V = \int_1^3 A(x)\,dx$$

onde $A(x)$ é a área da seção transversal vertical de $S$ tomada perpendicularmente ao eixo $x$ (Figura 14.1.4). Para um valor fixado de $x$, com $1 \le x \le 3$, $z = 40 - 2xy$ é uma função de $y$, portanto a integral

$$A(x) = \int_2^4 (40 - 2xy)\,dy$$

representa a área sob o gráfico dessa função de $y$. Assim,

$$V = \int_1^3 \left[\int_2^4 (40 - 2xy)\,dy\right] dx = \int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy)\,dy\,dx$$

é o volume de $S$. Analogamente, pelo método de fatiamento com seções transversais verticais de $S$ tomadas perpendicularmente ao eixo $y$, o volume de $S$ é dado por

$$V = \int_2^4 A(y)\,dy = \int_2^4 \left[\int_1^3 (40 - 2xy)\,dx\right] dy = \int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy)\,dx\,dy$$

(Figura 14.1.5). Assim, ambas as integrais iteradas em (a) e (b) do Exemplo 2 medem o volume de $S$ que, pela Fórmula (5), é a integral dupla de $z = 40 - 2xy$ em $R$, ou seja,

$$\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy)\,dy\,dx = \iint_R (40 - 2xy)\,dA = \int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy)\,dx\,dy$$

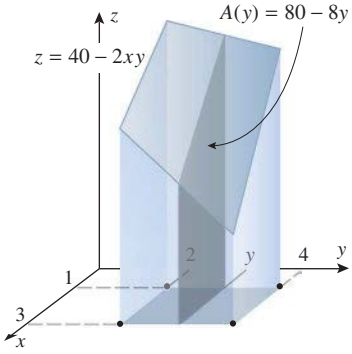



**Figura 14.1.5**

Muitas vezes, para simplificar, denotamos o retângulo

$$\{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

por $[a, b] \times [c, d]$.

O argumento geométrico que acabamos de apresentar pode ser aplicado a qualquer função contínua $f(x, y)$ que seja não negativa em um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, como foi o caso de $f(x, y) = 40 - 2xy$ em $[1, 3] \times [2, 4]$. A conclusão de que a integral dupla de $f(x, y)$ em $R$ tenha o mesmo valor em qualquer uma das duas possíveis integrais iteradas é verdadeira mesmo se $f$ for negativa em alguns pontos de $R$. Enunciamos esse resultado no teorema a seguir, sem apresentar uma prova formal.

**14.1.3 TEOREMA** (***Teorema de Fubini***) Seja $R$ o retângulo definido pelas desigualdades

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

Se $f(x, y)$ for contínua nesse retângulo, então

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx$$

O Teorema 14.1.3 permite calcular uma integral dupla em um retângulo convertendo-a para uma integral iterada. Isso pode ser feito de duas maneiras, ambas produzindo o mesmo valor para a integral dupla.

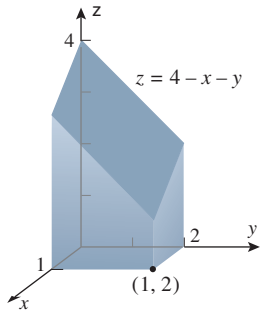



**Figura 14.1.6**

**▶ Exemplo 3** Use uma integral dupla para encontrar o volume do sólido delimitado acima pelo plano $z = 4 - x - y$ e abaixo pelo retângulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$ (Figura 14.1.6).

***Solução*** O volume é a integral dupla de $z = 4 - x - y$ em $R$. Usando o Teorema 14.1.3, isso pode ser obtido de qualquer uma das integrais iteradas

$$\int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y)\, dx\, dy \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y)\, dy\, dx \tag{8}$$

Usando a primeira, obtemos

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (4 - x - y)\, dA = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 \left[ 4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{1} dy = \int_0^2 \left( \frac{7}{2} - y \right) dy \\ &= \left[ \frac{7}{2} y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 5 \end{aligned}$$

Esse resultado pode ser conferido calculando a segunda integral em (8). ◀

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Se o leitor dispuser de um recurso computacional capaz de efetuar integrais duplas iteradas, use-o para conferir o Exemplo 3.

O Teorema 14.1.3 garante que a integral dupla no Exemplo 4 também pode ser calculada integrando primeiro em relação a $y$ e depois em relação a $x$. Verifique isso.

**▶ Exemplo 4** Calcule a integral dupla

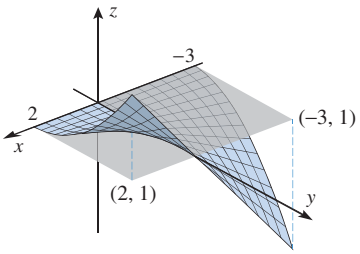
$$\iint_R y^2 x\, dA$$

no retângulo $R = \{(x, y) : -3 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.

**Guido Fubini (1879-1943)** Matemático italiano. Já como jovem estudante em Veneza, Fubini, que era filho de matemático, mostrou habilidades matemáticas. Entrou no ensino superior na Escola Normal Superior de Pisa em 1896 e apresentou sua tese de doutorado em geometria elíptica aos 20 anos de idade, em 1900. Subsequentemente, lecionou em várias universidades até se decidir pela Universidade de Turin, onde permaneceu por varias décadas. Seu trabalho matemático era muito abrangente, tendo trazido contribuições substanciais em várias áreas da Matemática. Ao iniciar a Primeira Guerra Mundial, interessou-se pela precisão dos disparos de artilharia e, depois da guerra, continuou trabalhando em assuntos aplicados como acústica e circuitos elétricos. Em 1939, quando se aproximava dos sessenta anos de idade e da aposentadoria, o governo fascista de Mussolini adotou as políticas antissemitas de Hitler, o que forçou Fubini, que era judeu, a aceitar uma posição na Universidade de Princeton, nos Estados Unidos, onde permaneceu até sua morte, quatro anos depois. Ele era muito benquisto pelos seus colegas de Princeton, e circulam muitas histórias a seu respeito. Em uma de suas conferências sobre balística, Fubini mostrou que o disparo de um projétil de certo formato poderia, sob circunstâncias adequadas, acabar voltando em sua trajetória feito um bumerangue e atingir as próprias tropas. Então, muito bem humorado, ele sugeriu que uma "arma de Fubini" dessas poderia ser usada para enganar o inimigo, pois este ficaria confuso ao ver a arma sendo disparada para longe de suas tropas e não suspeitaria de coisa alguma até que o projétil revertesse sua trajetória e o atingisse.

Fubini era extremamente pequeno, o que causava certos problemas. Consta que um dia a preocupada zeladora de seu prédio chamou seus amigos porque ele não havia voltado para casa. Depois de procurarem em vários locais, inclusive nas redondezas do lago de Princeton, descobriram Fubini, que não conseguia alcançar qualquer um dos botões, preso em um elevador em pane. Ele, então, celebrou seu salvamento com uma festa e, mais tarde, deixou um cartaz em seu apartamento no qual escrevera: "Para a zeladora: se eu não estiver em casa até às 18h30, por favor confira o elevador..."

*[Imagem: Wendy Wray]*




$z = y^2x$ em $[-3, 2] \times [0, 1]$

**Figura 14.1.7**

***Solução*** Em virtude do Teorema 14.1.3, o valor da integral dupla pode ser obtido calculando uma de duas possíveis integrais iteradas. Escolhemos integrar primeiro em relação a $x$ e depois em relação a $y$.

$$\iint_R y^2x\,dA = \int_0^1 \int_{-3}^2 y^2x\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2x^2\right]_{x=-3}^{2} dy$$
$$= \int_0^1 \left(-\frac{5}{2}y^2\right) dy = -\frac{5}{6}y^3\Big]_0^1 = -\frac{5}{6} \quad \blacktriangleleft$$

A integral no Exemplo 4 pode ser interpretada como o volume líquido com sinal entre o retângulo $[-3, 2] \times [0, 1]$ e a superfície $z = y^2x$. Ou seja, é o volume abaixo de $z = y^2x$ e acima de $[0, 2] \times [0, 1]$ menos o volume acima de $z = y^2x$ e abaixo de $[-3, 0] \times [0, 1]$ (Figura 14.1.7).

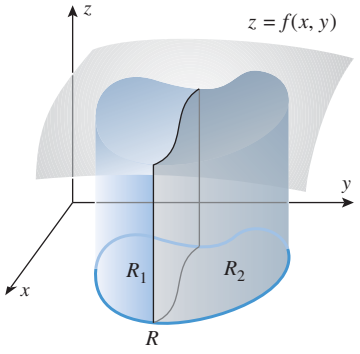
## PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS DUPLAS

Para distinguir entre integrais duplas de funções de duas variáveis e integrais definidas de funções de uma variável, vamos referir-nos a estas como ***integrais simples***. Visto que as integrais duplas, da mesma maneira que as integrais simples, são definidas como limites, elas herdam muitas das propriedades dos limites. Os resultados a seguir, que enunciamos sem provas, são análogos aos do Teorema 5.5.4, no Volume 1.

$$\iint_R cf(x, y)\,dA = c\iint_R f(x, y)\,dA \quad (c \text{ uma constante}) \tag{9}$$

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\,dA = \iint_R f(x, y)\,dA + \iint_R g(x, y)\,dA \tag{10}$$

$$\iint_R [f(x, y) - g(x, y)]\,dA = \iint_R f(x, y)\,dA - \iint_R g(x, y)\,dA \tag{11}$$




O volume do sólido inteiro é a soma dos volumes dos sólidos acima de $R_1$ e $R_2$.

**Figura 14.1.8**

É intuitivamente evidente que se $f(x, y)$ for não negativa na região $R$, então subdividir $R$ em duas regiões, $R_1$ e $R_2$, traz como efeito a subdivisão do sólido entre $R$ e $z = f(x, y)$ em dois sólidos, e a soma dos volumes desses dois sólidos é igual ao volume do sólido inteiro (Figura 14.1.8). Isso sugere o seguinte resultado, que é verdadeiro mesmo que $f$ possua valores negativos:

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \iint_{R_1} f(x, y)\,dA + \iint_{R_2} f(x, y)\,dA \tag{12}$$

A demonstração desse resultado será omitida.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.1 (*Ver página 1008 para respostas.*)

**1.** A integral dupla é definida como um limite de somas de Riemann por

$$\iint_R f(x, y)\,dA = _____$$

**2.** A integral iterada

$$\int_1^5 \int_2^4 f(x, y)\,dx\,dy$$

integra $f$ no retângulo definido por

$_____ \le x \le _____$, $_____ \le y \le _____$.

**3.** Preencha as lacunas com o integrando e os extremos de integração que faltam.

$$\int_1^5 \int_2^4 (3x^2 - 2xy + y^2)\,dx\,dy = \int_{\square}^{\square} _____\,dy$$

**4.** O volume do sólido englobado pela superfície $z = x/y$ e o retângulo $0 \le x \le 4$, $1 \le y \le e^2$ do plano $xy$ é $_____$.

## EXERCÍCIOS 14.1 C CAS

**1-12** Calcule as integrais iteradas. ■

1. $\int_0^1 \int_0^2 (x+3)\,dy\,dx$
2. $\int_1^3 \int_{-1}^1 (2x-4y)\,dy\,dx$
3. $\int_2^4 \int_0^1 x^2 y\,dx\,dy$
4. $\int_{-2}^0 \int_{-1}^2 (x^2+y^2)\,dx\,dy$
5. $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+y}\,dy\,dx$
6. $\int_0^2 \int_0^1 y \operatorname{sen} x\,dy\,dx$
7. $\int_{-1}^0 \int_2^5 dx\,dy$
8. $\int_4^6 \int_{-3}^7 dy\,dx$
9. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2}\,dy\,dx$
10. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 x\cos xy\,dy\,dx$
11. $\int_0^{\ln 2} \int_0^1 xye^{y^2x}\,dy\,dx$
12. $\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx$

**13-16** Calcule as integrais duplas na região retangular $R$. ■

13. $\iint_R 4xy^3\,dA;\ R=\{(x,y): -1\le x\le 1, -2\le y\le 2\}$
14. $\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dA;$ $R=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$
15. $\iint_R x\sqrt{1-x^2}\,dA;\ R=\{(x,y): 0\le x\le 1, 2\le y\le 3\}$
16. $\iint_R (x\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x)\,dA;$ $R=\{(x,y): 0\le x\le \pi/2, 0\le y\le \pi/3\}$

### ENFOCANDO CONCEITOS

17. (a) Seja $f(x,y)=x^2+y$ e, como mostrado na figura a seguir, seja o retângulo $R=[0,2]\times[0,2]$ subdividido em 16 sub-retângulos. Escolha $(x_k^*, y_k^*)$ como o centro do $k$-ésimo retângulo e aproxime a integral dupla de $f$ em $R$ pela soma de Riemann resultante.
    (b) Compare o resultado da parte (a) com o valor exato da integral.

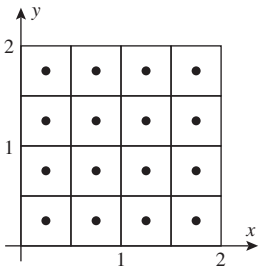



**Figura Ex-17**

18. (a) Seja $f(x,y)=x-2y$ e considere uma subdivisão do retângulo $R=[0,2]\times[0,2]$ em 16 retângulos menores, como no Exercício 17. Tome $(x_k^*, y_k^*)$ como sendo o centro do $k$-ésimo retângulo e aproxime a integral dupla de $f$ em $R$ pela soma de Riemann resultante.
    (b) Compare o resultado de (a) com o valor exato da integral.

**19-20** Cada integral iterada representa o volume de um sólido. Faça um esboço do sólido. Use Geometria para calcular o volume do sólido e, então, calcule a integral iterada. ■

19. $\int_0^5 \int_1^2 4\,dx\,dy$
20. $\int_0^1 \int_0^1 (2-x-y)\,dx\,dy$

**21-22** Cada integral iterada representa o volume de um sólido. Faça um esboço do sólido. (*Não* é preciso calcular o volume.) ■

21. $\int_0^3 \int_0^4 \sqrt{25-x^2-y^2}\,dy\,dx$
22. $\int_{-2}^2 \int_{-2}^2 (x^2+y^2)\,dx\,dy$

**23-26 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

23. Na definição de integral dupla,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

o símbolo $\Delta A_k$ representa uma região retangular dentro de $R$ à qual pertence o ponto $(x_k^*, y_k^*)$.

24. Se $R$ for o retângulo $\{(x,y): 1\le x\le 4, 0\le y\le 3\}$ e $\int_0^3 f(x,y)\,dy = 2x$, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = 15$$

25. Se $R$ for o retângulo $\{(x,y): 1\le x\le 5, 2\le y\le 4\}$, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_1^5 \int_2^4 f(x,y)\,dx\,dy$$

26. Suponha que em alguma região $R$ do plano $xy$ tenhamos

$$\iint_R f(x,y)\,dA = 0$$

Se $R$ for subdividida em duas regiões $R_1$ e $R_2$, então

$$\iint_{R_1} f(x,y)\,dA = -\iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

27. Neste exercício, suponha que $f(x,y)=g(x)h(y)$ e $R=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$. Mostre que

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \left[\int_a^b g(x)\,dx\right]\left[\int_c^d h(y)\,dy\right]$$

**28.** Use o resultado do Exercício 33 para calcular a integral

$$\int_0^{\ln 2} \int_{-1}^{1} \sqrt{e^y + 1}\, \operatorname{tg} x \, dx \, dy$$

por inspeção. Explique seu raciocínio.

**29-32** Use uma integral dupla para calcular o volume. ■

**29.** O volume sob o plano $z = 2x + y$ e acima do retângulo $R = \{(x, y): 3 \le x \le 5, 1 \le y \le 2\}$.

**30.** O volume sob a superfície $z = 3x^3 + 3x^2 y$ e acima do retângulo $R = \{(x, y): 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

**31.** O volume do sólido compreendido pela superfície $z = x^2$ e os planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 0$ e $z = 0$.

**32.** O volume no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, o plano $y = 4$ e o plano $(x/3) + (z/5) = 1$

**33.** Calcule a integral escolhendo uma ordem de integração conveniente:

$$\iint_R x \cos(xy) \cos^2 \pi x \, dA; \; R = \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \times [0, \pi]$$

**34.** (a) Faça um esboço do sólido no primeiro octante compreendido pelos planos $x = 0$, $z = 0$, $x = 5$, $z - y = 0$ e $z = -2y + 6$.
(b) Calcule o volume sólido dividindo-o em duas partes.

**35-40** O ***valor médio*** de uma função contínua $f(x, y)$ em um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ é definido como

$$f_{\text{m}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

onde $A(R) = (b - a)(d - c)$ é a área do retângulo $R$ (comparar com a Definição 5.8.1, do Volume 1). Use essa definição nestes exercícios. ■

**35.** Encontre o valor médio de $f(x, y) = xy^2$ no retângulo $[0, 8] \times [0, 6]$.

**36.** Encontre o valor médio de $f(x, y) = x^2 + 7y$ no retângulo $[0, 3] \times [0, 6]$.

**37.** Calcule o valor médio de $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$ no retângulo $[0, 1] \times [0, \pi/2]$.

**38.** Calcule o valor médio de $f(x, y) = x(x^2 + y)^{1/2}$ no intervalo $[0, 1] \times [0, 3]$.

**39.** Suponha que a temperatura, em graus Celsius, num ponto $(x, y)$ de uma chapa metálica plana seja $T(x, y) = 10 - 8x^2 - 2y^2$, onde $x$ e $y$ estão em metros. Calcule a temperatura média da porção retangular da chapa dada por $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 2$.

**40.** Mostre que se $f(x, y)$ for constante no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, digamos, $f(x, y) = k$, então $f_{\text{m}} = k$ em $R$.

**41-42** A maioria dos CAS possui comandos para a aproximação de integrais duplas numericamente. Leia a documentação correspondente e use um CAS para encontrar uma aproximação numérica da integral dupla nestes exercícios. ■

**C 41.** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \operatorname{sen} \sqrt{x^3 + y^3}\, dx \, dy$

**C 42.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-(x^2+y^2)}\, dx \, dy$

**C 43.** Use um CAS para calcular as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{y - x}{(x + y)^3}\, dx \, dy \quad \text{e} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{y - x}{(x + y)^3}\, dy \, dx$$

Isso contradiz o Teorema 14.1.3? Explique.

**C 44.** Use um CAS para mostrar que o volume $V$ sob a superfície $z = xy^3 \operatorname{sen} xy$ e acima do retângulo mostrado na figura a seguir é $V = 3/\pi$.

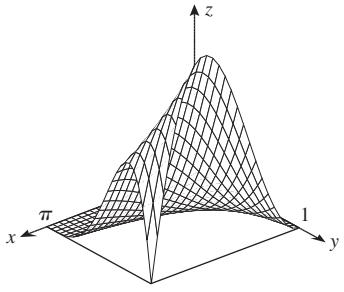



**Figura Ex-44**

**45. Texto** Discuta como o cálculo de um volume usando uma integral dupla iterada corresponde ao método de calcular um volume por fatias (Seção 6.2, no Volume 1).

**46. Texto** Discuta como a propriedade da integral dupla dada na Fórmula (12) generaliza a propriedade da integral simples no Teorema 5.5.5, no Volume 1.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.1

**1.** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$ **2.** $2 \le x \le 4, 1 \le y \le 5$ **3.** $\displaystyle\int_1^5 (56 - 12y + 2y^2)\, dy$ **4.** 16

# 14.2 INTEGRAIS DUPLAS EM REGIÕES NÃO RETANGULARES

*Nesta seção, mostraremos como calcular integrais duplas em regiões que não são retangulares.*

## INTEGRAIS ITERADAS COM LIMITES DE INTEGRAÇÃO NÃO CONSTANTES

Mais adiante nesta seção, veremos que as integrais duplas em regiões não retangulares podem ser calculadas como integrais iteradas dos seguintes tipos:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx \tag{1}$$

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy \tag{2}$$

Observe que os limites de integração na integral de fora em (1) e (2) são constantes. Isso é consistente com o fato de que o valor de cada integral iterada é um número que representa um volume líquido com sinal.

Começamos com um exemplo que ilustra como calcular tais integrais.

**▶ Exemplo 1** Calcule

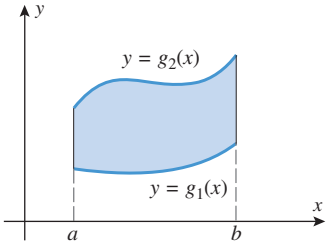
$$\text{(a)} \int_0^1 \int_{-x}^{x^2} y^2 x\, dy\, dx \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi/3} \int_0^{\cos y} x \operatorname{sen} y\, dx\, dy$$

***Solução (a)***

$$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} y^2 x\, dy\, dx = \int_0^1 \left[ \int_{-x}^{x^2} y^2 x\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \frac{y^3 x}{3} \right]_{y=-x}^{x^2} dx$$
$$= \int_0^1 \left[ \frac{x^7}{3} + \frac{x^4}{3} \right] dx = \left( \frac{x^8}{24} + \frac{x^5}{15} \right) \Big]_0^1 = \frac{13}{120}$$

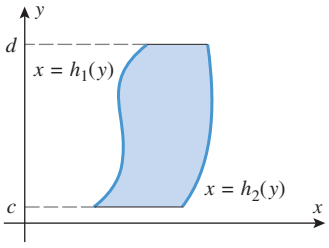
***Solução (b)***

$$\int_0^{\pi/3} \int_0^{\cos y} x \operatorname{sen} y\, dx\, dy = \int_0^{\pi/3} \left[ \int_0^{\cos y} x \operatorname{sen} y\, dx \right] dy = \int_0^{\pi/3} \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} y \Big]_{x=0}^{\cos y} dy$$
$$= \int_0^{\pi/3} \left[ \frac{1}{2} \cos^2 y \operatorname{sen} y \right] dy = -\frac{1}{6} \cos^3 y \Big]_0^{\pi/3} = \frac{7}{48} \quad \blacktriangleleft$$




Região do tipo I

(a)




Região do tipo II

(b)

**Figura 14.2.1**

## INTEGRAIS DUPLAS EM REGIÕES NÃO RETANGULARES

Regiões planas podem ser extremamente complexas, e a teoria das integrais duplas em regiões muito gerais é um tópico para disciplinas avançadas de Matemática. Limitaremos nosso estudo das integrais duplas a dois tipos básicos de regiões, que chamaremos de *tipo I* e *tipo II* e definiremos como segue.

**14.2.1 DEFINIÇÃO**

(a) Uma ***região do tipo I*** é limitada à esquerda e à direita por retas verticais $x = a$ e $x = b$ e é limitada abaixo e acima por curvas contínuas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, onde $g_1(x) \le g_2(x)$ com $a \le x \le b$ (Figura 14.2.1*a*).

(b) Uma ***região do tipo II*** é limitada abaixo e acima por retas horizontais $y = c$ e $y = d$ e é limitada à direita e à esquerda por curvas contínuas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$, que satisfazem $h_1(y) \le h_2(y)$ com $c \le y \le d$ (Figura 14.2.1*b*).

O teorema seguinte permite-nos a calcular integrais duplas em regiões do tipo I e II usando integrais iteradas.

**14.2.2 TEOREMA**

(*a*) *Se R for uma região do tipo I na qual f*(*x*, *y*) *é contínua, então*

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \tag{3}$$

(*b*) *Se R for uma região do tipo II na qual f*(*x*, *y*) *é contínua, então*

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{4}$$

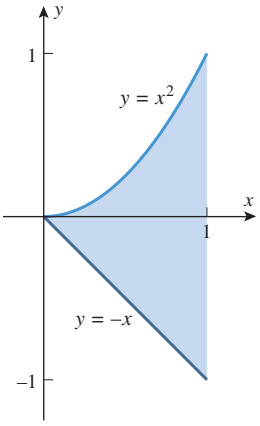



**Figura 14.2.2**

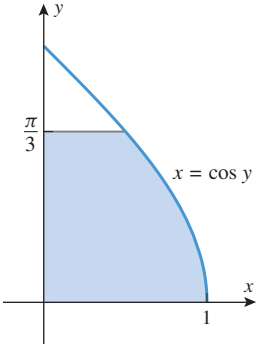



**Figura 14.2.3**

**► Exemplo 2** Cada uma das integrais iterada do Exemplo 1 é igual a uma integral dupla em uma região *R*. Em cada caso, identifique a regra *R*.

***Solução*** Pelo Teorema 14.2.2, a integral no Exemplo 1(a) é a integral dupla da função $f(x, y) = y^2x$ na região *R* do tipo I delimitada lateralmente pelas retas verticais $x = 0$ e $x = 1$ e acima e abaixo pelas curvas $y = -x$ e $y = x^2$ (Figura 14.2.2). Também, a integral no Exemplo 1(b) é a integral dupla de $f(x, y) = x$ sen $y$ na região *R* do tipo II delimitada acima e abaixo pelas retas horizontais $y = 0$ e $y = \pi/3$ e lateralmente pelas curvas $x = 0$ e $x = \cos y$ (Figura 14.2.3). ◄

Não vamos demonstrar o Teorema 14.2.2, mas no caso em que $f(x, y)$ for não negativa na região *R*, ele é aceitável através de um raciocínio geométrico semelhante ao que foi dado para o Teorema 14.1.3. Como $f(x, y)$ é não negativa, a integral dupla pode ser interpretada como o volume do sólido *S* que é limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela região *R*, de modo que é suficiente mostrar que a integral iterada representa esse volume. Considere, por exemplo, a integral iterada (3). Dado um valor fixo de *x*, a função $f(x, y)$ é uma função de *y* e, então, a integral

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

representa a área sob o gráfico dessa função de *y* entre os pontos $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$. Essa área, mostrada em azul escuro na Figura 14.2.4, é a área da seção transversal do sólido *S* em *x* e, então, pelo método de fatiamento, o volume *V* do sólido *S* é

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

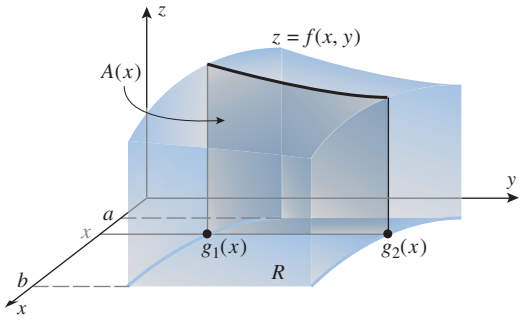



**Figura 14.2.4**

que mostra que a integral iterada (3) é igual à integral dupla. Analogamente, a integral iterada em (4) é igual a integral dupla correspondente.

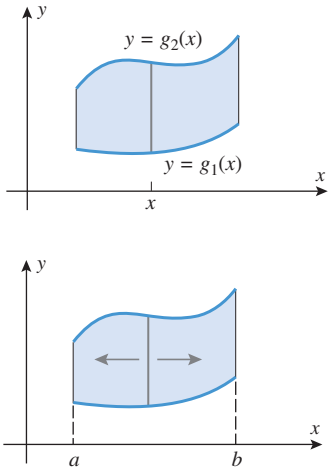



Figura 14.2.5

## DETERMINAÇÃO DOS LIMITES DE INTEGRAÇÃO PARA O CÁLCULO DE INTEGRAIS DUPLAS

Para aplicar o Teorema 14.2.2, é conveniente começar com um esboço bidimensional da região $R$. [Não é necessário fazer o gráfico de $f(x, y)$.] Para uma região do tipo I, os limites de integração da Fórmula (3) podem ser obtidos com segue:

***Determinação dos Limites de Intergração: Região do Tipo I***

**Passo 1** Como $x$ é mantido fixo para a primeira integração, traçamos uma reta vertical através da região $R$ em um ponto $x$ arbitrário fixado (Figura 14.2.5). Essa reta cruza a fronteira de $R$ duas vezes. O ponto inferior da interseção está na curva $y = g_1(x)$, e o ponto superior está na curva $y = g_2(x)$. Essas duas interseções determinam os limites de integração inferior e superior de $y$ na Fórmula (3).

**Passo 2** Imagine que a reta traçada no Passo 1 se mova primeiro para a esquerda e depois para a direita (Figura 14.2.5). A posição extrema à esquerda na qual a reta intersecta a região $R$ é $x = a$, e a posição extrema à direita na qual a reta intersecta a região $R$ é $x = b$. Obtemos, assim, os limites de integração de $x$ na Fórmula (3).

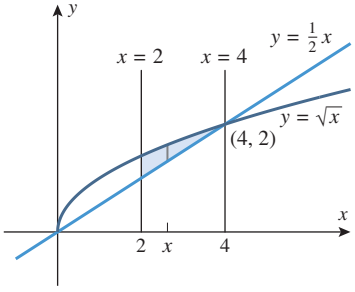



Figura 14.2.6

**► Exemplo 3** Calcule

$$\iint_R xy\,dA$$

na região $R$ compreendida pelas curvas $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ e $x = 4$.

***Solução*** Consideramos $R$ como uma região do tipo I. A região $R$ e a vertical correspondente ao ponto $x$ fixado são mostradas na Figura 14.2.6. A reta intersecta a região $R$ na fronteira inferior $y = \frac{1}{2}x$ e na fronteira superior $y = \sqrt{x}$. Esses são os limites de integração de $y$. Mover a reta primeiro à esquerda e depois à direita produz os limites de integração $x = 2$ e $x = 4$ de $x$. Assim,

$$\iint_R xy\,dA = \int_2^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\,dx = \int_2^4 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x/2}^{\sqrt{x}} dx = \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32}\right]_2^4 = \left(\frac{64}{6} - \frac{256}{32}\right) - \left(\frac{8}{6} - \frac{16}{32}\right) = \frac{11}{6} \quad ◄$$

Se $R$ for uma região do tipo II, os limites de integração da Fórmula (4) podem ser obtidos como segue:

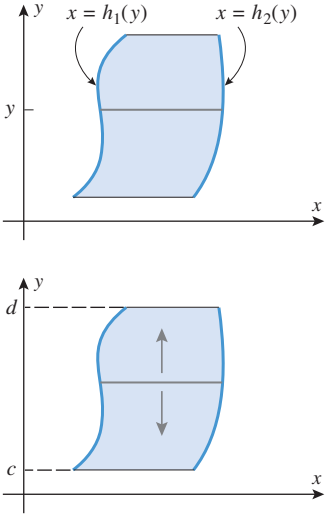



Figura 14.2.7

***Determinação dos Limites de Integração: Região do Tipo II***

**Passo 1** Como $y$ é mantido fixo para a primeira integração, traçamos uma reta horizontal através da região $R$ pelo ponto fixo $y$ (Figura 14.2.7). Essa reta corta a fronteira de $R$ duas vezes. O ponto de interseção mais à esquerda está na curva $x = h_1(y)$, e o ponto mais à direita está na curva $x = h_2(y)$. Essas interseções determinam os limites de integração de $x$ na Fórmula (4).

**Passo 2** Imagine que a reta traçada no Passo 1 se mova primeiro para baixo e depois para cima (Figura 14.2.7). A posição mais baixa na qual a reta intersecta a região $R$ é $y = c$, e a posição mais alta na qual a reta intersecta a região $R$ é $y = d$. Obtemos, assim, os limites de integração de $y$ na Fórmula (4).

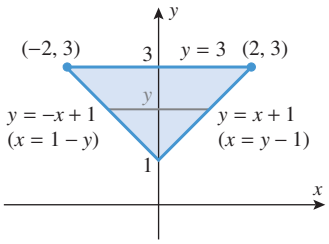



**Figura 14.2.8**

Para integrar em uma região do tipo II, os limites esquerdo e direito devem ser expressos sob a forma $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$. Por isso, reescrevemos as equações dos limites

$$y = -x + 1 \quad \text{e} \quad y = x + 1$$

como

$$x = 1 - y \quad \text{e} \quad x = y - 1$$

no Exemplo 4.

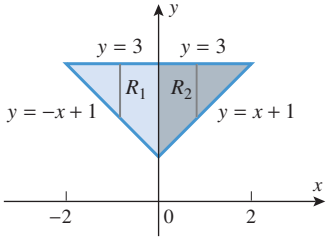



**Figura 14.2.9**

**► Exemplo 4** Calcule

$$\iint_R (2x - y^2)\, dA$$

na região triangular $R$ compreendida pelas retas $y = -x + 1$, $y = x + 1$ e $y = 3$.

***Solução*** Consideramos $R$ como uma região do tipo II. A região $R$ e a reta horizontal correspondente ao ponto fixado $y$ são mostradas na Figura 14.2.8. A reta intersecta a região $R$ na fronteira à esquerda $x = 1 - y$ e na fronteira à direita $x = y - 1$. Esses são os limites de integração de $x$. Movendo a reta primeiramente para baixo e depois para cima, produzimos os limites $y = 1$ e $y = 3$ de $y$. Assim,

$$\begin{aligned}\iint_R (2x - y^2)\, dA &= \int_1^3 \int_{1-y}^{y-1} (2x - y^2)\, dx\, dy = \int_1^3 \left[x^2 - y^2 x\right]_{x=1-y}^{y-1} dy \\ &= \int_1^3 [(1 - 2y + 2y^2 - y^3) - (1 - 2y + y^3)]\, dy \\ &= \int_1^3 (2y^2 - 2y^3)\, dy = \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{2}\right]_1^3 = -\frac{68}{3}\end{aligned}$$ ◄

No Exemplo 4, poderíamos ter tratado $R$ como uma região do tipo I, porém com uma complicação adicional: considerada como uma região do tipo I, a fronteira superior de $R$ é a reta $y = 3$ (Figura 14.2.9), e a fronteira inferior consiste em duas partes, a reta $y = -x + 1$ à esquerda e a reta $y = x + 1$ à direita do eixo $y$. Para fazer a integração, é necessário decompor a região $R$ em duas partes, $R_1$ e $R_2$, como mostrado na Figura 14.2.9, e escrever

$$\begin{aligned}\iint_R (2x - y^2)\, dA &= \iint_{R_1} (2x - y^2)\, dA + \iint_{R_2} (2x - y^2)\, dA \\ &= \int_{-2}^0 \int_{-x+1}^3 (2x - y^2)\, dy\, dx + \int_0^2 \int_{x+1}^3 (2x - y^2)\, dy\, dx\end{aligned}$$

Isto fornecerá o mesmo resultado que foi obtido no Exemplo 4. (Verifique.)

**► Exemplo 5** Use uma integral dupla para calcular o volume do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $z = 4 - 4x - 2y$.

***Solução*** O tetraedro em questão é limitado acima pelo plano

$$z = 4 - 4x - 2y \tag{5}$$

e abaixo pela região triangular $R$ mostrada na Figura 14.2.10. Assim, o volume é dado por

$$V = \iint_R (4 - 4x - 2y)\, dA$$

A região $R$ é limitada pelo eixo $x$, pelo eixo $y$ e pela reta $y = 2 - 2x$ [faça $z = 0$ em (5)], então, considerando $R$ como uma região do tipo I, temos

$$\begin{aligned}V &= \iint_R (4 - 4x - 2y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (4 - 4x - 2y)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left[4y - 4xy - y^2\right]_{y=0}^{2-2x} dx = \int_0^1 (4 - 8x + 4x^2)\, dx = \frac{4}{3}\end{aligned}$$ ◄

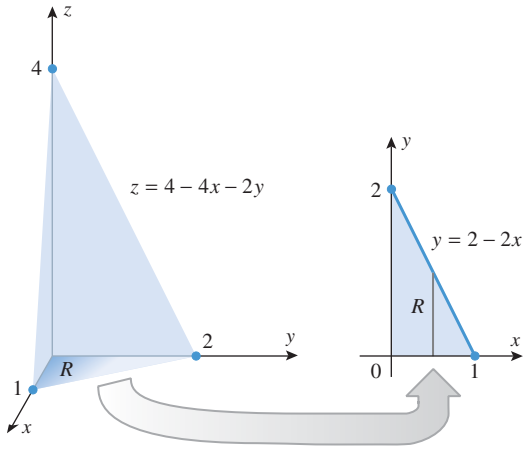



**Figura 14.2.10**

► **Exemplo 6** Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e os planos $y + z = 4$ e $z = 0$.

***Solução*** O sólido mostrado na Figura 14.2.11 é limitado acima pelo plano $z = 4 - y$ e abaixo pela região $R$ contida no círculo $x^2 + y^2 = 4$. O volume é dado por

$$V = \iint_R (4 - y)\, dA$$

Considerando $R$ como uma região do tipo I, obtemos

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \left[ 4y - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 8\sqrt{4 - x^2}\, dx = 8(2\pi) = 16\pi$$

Ver Fórmula (3) na Seção 7.4, no Volume 1 ◄

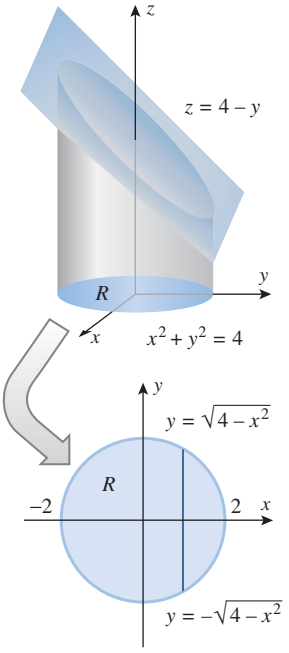



**Figura 14.2.11**

## INVERSÃO DA ORDEM DE INTEGRAÇÃO

Às vezes, o cálculo de uma integral iterada pode ser simplificado invertendo-se a ordem de integração. O próximo exemplo ilustra como isso é feito.

► **Exemplo 7** Como não há antiderivada elementar de $e^{x^2}$, a integral

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dx\, dy$$

não pode ser calculada integrando primeiro em relação a $x$. Calcule essa integral expressando-a como uma integral iterada equivalente com ordem de integração invertida.

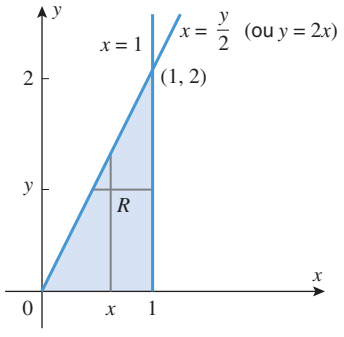


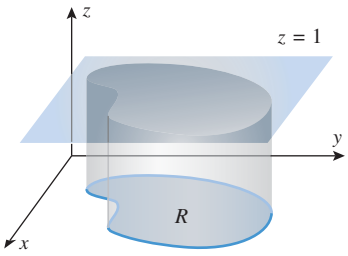

**Figura 14.2.12**

***Solução*** Na integração interna, $y$ é fixado e $x$ varia entre as retas $x = y/2$ e $x = 1$ (Figura 14.2.12). Na integração externa, $y$ varia de 0 a 2, de modo que a integral iterada dada é igual à integral dupla na região triangular $R$ da Figura 14.2.12.

Para inverter a ordem de integração, consideramos $R$ como uma região do tipo I, o que nos permite escrever a integral dada como

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dx\, dy = \iint_R e^{x^2}\, dA = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \left[ e^{x^2} y \right]_{y=0}^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 2x e^{x^2}\, dx = e^{x^2} \Big]_0^1 = e - 1 \quad ◄$$




Cilindro com base $R$ e altura 1

**Figura 14.2.13**

## ÁREA CALCULADA COMO UMA INTEGRAL DUPLA

Apesar de as integrais duplas terem surgido no contexto do cálculo de volumes, elas também podem ser usadas para calcular áreas. Para ver isso, lembre-se de que um *cilindro reto* é um sólido gerado quando uma região do plano é transladada ao longo de uma reta perpendicular à região. Na Fórmula (2) da Seção 6.2, no Volume 1, afirmamos que o volume $V$ de um cilindro reto com área da seção transversal $A$ e altura $h$ é

$$V = A \cdot h \tag{6}$$

Agora, suponha que estejamos interessados em calcular a área de uma região $R$ do plano $xy$. Se transladarmos a região $R$ uma unidade para cima, o sólido resultante será um cilindro reto que tem área da seção transversal $A$, base $R$ e o plano $z = 1$ como topo (Figura 14.2.13). Desse modo, segue de (6) que

$$\iint_R 1 \, dA = (\text{área de } R) \cdot 1$$

o que pode ser reescrito como

$$\text{área de } R = \iint_R 1 \, dA = \iint_R dA \tag{7}$$

A Fórmula (7) pode gerar confusão porque iguala uma área e um volume; a fórmula pretende equacionar somente os *valores numéricos* da área e do volume, e não as unidades de medida, que, naturalmente, devem ser diferentes.

**▶ Exemplo 8** Use uma integral dupla para calcular a área da região $R$ compreendida pela parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ e a reta $y = 2x$.

***Solução*** A região $R$ pode ser considerada igualmente como do tipo I (Figura 14.2.14*a*) ou do tipo II (Figura 14.2.14*b*). Considerando $R$ como do tipo I, obtemos

$$\begin{aligned}\text{área de } R &= \iint_R dA = \int_0^4 \int_{x^2/2}^{2x} dy\, dx = \int_0^4 [y]_{y=x^2/2}^{2x} \, dx \\ &= \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_0^4 = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

Considerando $R$ como do tipo II, obtemos

$$\begin{aligned}\text{área de } R &= \iint_R dA = \int_0^8 \int_{y/2}^{\sqrt{2y}} dx\, dy = \int_0^8 [x]_{x=y/2}^{\sqrt{2y}} \, dy \\ &= \int_0^8 \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{2}y\right) dy = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2} - \frac{y^2}{4}\right]_0^8 = \frac{16}{3}\end{aligned}$$ ◀

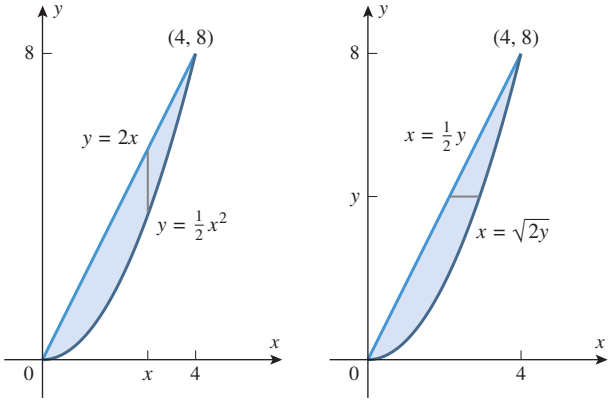



**Figura 14.2.14**

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.2 (Ver página 1018 para respostas.)

**1.** Preencha as lacunas com o integrando e os extremos de integração que faltam.

(a) $\displaystyle\int_1^5 \int_2^{y/2} 6x^2 y\,dx\,dy = \int_{\square}^{\square} _____\,dy$

(b) $\displaystyle\int_1^5 \int_2^{x/2} 6x^2 y\,dy\,dx = \int_{\square}^{\square} _____\,dx$

**2.** Seja $R$ a região triangular de vértices (0, 0), (3, 0) e (0, 4) do plano $xy$. Preencha as lacunas das integrais.

(a) Tratando $R$ como uma região do tipo I,

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,_____$$

(b) Tratando $R$ como uma região do tipo II,

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,_____$$

**3.** Seja $R$ a região triangular de vértices (0, 0), (3, 3) e (0, 4) do plano $xy$. Expressa como uma integral iterada dupla, a área de $R$ é $A(R) =$ _____.

**4.** A reta $y = 2 - x$ e a parábola $y = x^2$ intersectam nos pontos $(-2, 4)$ e $(1, 1)$. Se $R$ denotar a região englobada por $y = 2 - x$ e $y = x^2$, então

$$\iint_R (1 + 2y)\,dA = _____$$

## EXERCÍCIOS 14.2 Recurso Gráfico C CAS

**1-8** Calcule as integrais iteradas. ■

**1.** $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2\,dy\,dx$

**2.** $\displaystyle\int_1^{3/2} \int_y^{3-y} y\,dx\,dy$

**3.** $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} y\,dx\,dy$

**4.** $\displaystyle\int_{1/4}^1 \int_{x^2}^{x} \sqrt{\frac{x}{y}}\,dy\,dx$

**5.** $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^3} \operatorname{sen}\frac{y}{x}\,dy\,dx$

**6.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - y)\,dy\,dx$

**7.** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x y\sqrt{x^2 - y^2}\,dy\,dx$

**8.** $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{y^2} e^{x/y^2}\,dx\,dy$

### ENFOCANDO CONCEITOS

**9.** Seja $R$ a região dada na figura a seguir. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,dy\,dx$

(b) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,dx\,dy$

**10.** Seja $R$ a região dada na figura a seguir. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,dy\,dx$

(b) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,dx\,dy$

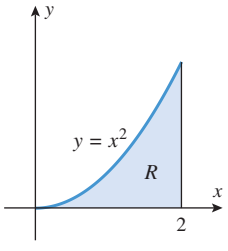



**Figura Ex-9**

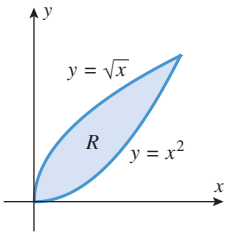



**Figura Ex-10**

**11.** Seja $R$ a região dada na figura a seguir. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\,dA = \int_1^2 \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,dy\,dx + \int_2^4 \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,dy\,dx + \int_4^5 \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,dy\,dx$

(b) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,dx\,dy$

**12.** Seja $R$ a região dada na figura a seguir. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,dy\,dx$

(b) $\displaystyle\iint_R f(x, y)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\,dx\,dy$

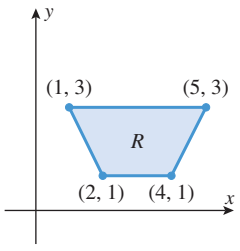



**Figura Ex-11**

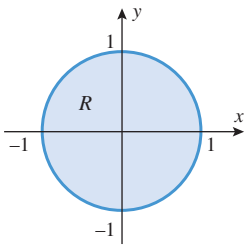



**Figura Ex-12**

**13.** Calcule $\displaystyle\iint_R xy\,dA$, onde $R$ é a região no

(a) Exercício 9 (b) Exercício 11

**14.** Calcule $\iint_R (x + y)\,dA$, onde $R$ é a região no

(a) Exercício 10 (b) Exercício 12

**15-18** Calcule as integrais duplas de duas maneiras usando integrais iteradas: (a) tratando $R$ como uma região do tipo I e (b) tratando $R$ como uma região do tipo II. ■

**15.** $\iint_R x^2\,dA$; $R$ é a região delimitada por $y = 16/x$, $y = x$ e $x = 8$.

**16.** $\iint_R xy^2\,dA$; $R$ é a região compreendida por $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$ e $y = x$.

**17.** $\iint_R (3x - 2y)\,dA$; $R$ é a região compreendida pelo círculo $x^2 + y^2 = 1$.

**18.** $\iint_R y\,dA$; $R$ é a região do primeiro quadrante compreendida pelo círculo $x^2 + y^2 = 25$ e a reta $x + y = 5$.

**19-24** Calcule as integrais duplas. ■

**19.** $\iint_R x(1 + y^2)^{-1/2}\,dA$; $R$ é a região do primeiro quadrante compreendida por $y = x^2$, $y = 4$ e $x = 0$.

**20.** $\iint_R x \cos y\,dA$; $R$ é a região triangular delimitada pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = \pi$.

**21.** $\iint_R xy\,dA$; $R$ é a região compreendida por $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ e $y = 0$.

**22.** $\iint_R x\,dA$; $R$ é a região compreendida por $y = \operatorname{arc\,sen} x$, $x = 1/\sqrt{2}$ e $y = 0$.

**23.** $\iint_R (x - 1)\,dA$; $R$ é a região do primeiro quadrante compreendida por $y = x$ e $y = x^3$.

**24.** $\iint_R x^2\,dA$; $R$ é a região do primeiro quadrante compreendida por $xy = 1$, $y = x$ e $y = 2x$.

**25.** Calcule $\iint_R \operatorname{sen}(y^3)\,dA$, onde $R$ é a região limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e $x = 0$. [Sugestão: Escolha a ordem de integração com cuidado.]

**26.** Calcule $\iint_R x\,dA$, onde R é a região limitada por $x = \ln y$, $x = 0$ e $y = e$.

**27.** (a) Trace à mão livre, ou com a ajuda de um recurso gráfico, um esboço da região $R$ compreendida pelas curvas $y = x + 2$ e $y = e^x$.
(b) Obtenha uma estimativa das interseções das curvas em (a).
(c) Tratando $R$ como uma região do tipo I, dê uma estimativa de $\iint_R x\,dA$.
(d) Tratando $R$ como uma região do tipo II, dê uma estimativa de $\iint_R x\,dA$.

**28.** (a) Trace à mão livre, ou com a ajuda de um recurso gráfico, um esboço da região $R$ compreendida pelas curvas $y = 4x^3 - x^4$ e $y = 3 - 4x + 4x^2$.
(b) Encontre as interseções das curvas da parte (a).
(c) Calcule $\iint_R x\,dA$.

**29-32** Use integração dupla para calcular a área da região plana compreendida pelas curvas dadas. ■

**29.** $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, para $0 \le x \le \pi/4$

**30.** $y^2 = -x$ e $3y - x = 4$.

**31.** $y^2 = 9 - x$ e $y^2 = 9 - 9x$.

**32.** $y = \cosh x$, $y = \operatorname{senh} x$, $x = 0$ e $x = 1$.

**33-36 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

**33.** $\int_0^1 \int_{x^2}^{2x} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{x^2}^{2x} \int_0^1 f(x, y)\,dx\,dy$

**34.** Se uma região $R$ for delimitada abaixo por $y = g_1(x)$ e acima por $y = g_2(x)$ com $a \le x \le b$, então

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx$$

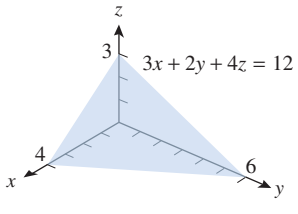
**35.** Se $R$ for a região do plano $xy$ delimitada por $y = x^2$ e $y = 1$, então

$$\iint_R f(x, y)\,dA = 2\int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x, y)\,dy\,dx$$

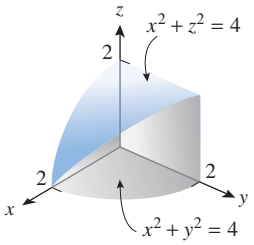
**36.** A área de uma região $R$ do plano $xy$ é dada por $\iint_R xy\,dA$.

**37-38** Use integração dupla para calcular o volume do sólido. ■

**37.**




**38.**



**39-44** Use integração dupla para calcular o volume do sólido. ■

**39.** O sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 0$ e $z = 3 - x$

**40.** O sólido no primeiro octante limitado acima pelo paraboloide $z = x^2 + 3y^2$, abaixo pelo plano $z = 0$ e lateralmente por $y = x^2$ e $y = x$.

**41.** O sólido limitado acima pelo paraboloide $z = 9x^2 + y^2$, abaixo pelo plano $z = 0$ e lateralmente pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$ e $y = 2$.

**42.** O sólido compreendido por $y^2 = x$, $z = 0$ e $x + z = 1$

**43.** A cunha seccionada do cilindro $4x^2 + y^2 = 9$ pelos planos $z = 0$ e $z = y + 3$.

**44.** O sólido no primeiro octante limitado acima por $z = 9 - x^2$, abaixo por $z = 0$ e lateralmente por $y^2 = 3x$.

C **45-46** Use uma integral dupla e um CAS para calcular o volume do sólido. ■

**45.** O sólido limitado acima pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e abaixo pelo plano $xy$.

**46.** O sólido no primeiro octante limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos coordenados.

**47-52** Expresse a integral como uma integral equivalente com a ordem de integração invertida. ■

**47.** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx$ **48.** $\displaystyle\int_0^4 \int_{2y}^8 f(x, y)\, dx\, dy$

**49.** $\displaystyle\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x, y)\, dx\, dy$ **50.** $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$

**51.** $\displaystyle\int_0^1 \int_{\text{arc sen } y}^{\pi/2} f(x, y)\, dx\, dy$ **52.** $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy$

**53-56** Calcule a integral invertendo antes a ordem de integração. ■

**53.** $\displaystyle\int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2}\, dy\, dx$ **54.** $\displaystyle\int_0^2 \int_{y/2}^1 \cos(x^2)\, dx\, dy$

**55.** $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\, dx\, dy$ **56.** $\displaystyle\int_1^3 \int_0^{\ln x} x\, dy\, dx$

C **57.** Tente calcular a integral com um CAS usando a ordem de integração indicada e, depois, invertendo a ordem de integração.

(a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \operatorname{sen} \pi y^3\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\text{arc sen } y}^{\pi/2} \sec^2(\cos x)\, dx\, dy$

**58.** Use a fórmula de Wallis apropriada (ao final do livro) para calcular o volume do sólido compreendido entre o paraboloide circular $z = x^2 + y^2$, o cilindro circular reto $x^2 + y^2 = 4$ e o plano $xy$ (veja o corte na figura a seguir).

**59.** Calcule $\displaystyle\iint_R xy^2\, dA$ na região $R$ mostrada na figura a seguir.

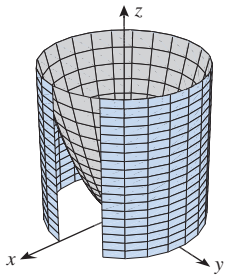



**Figura Ex-58**

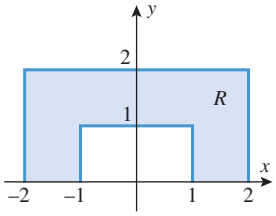



**Figura Ex-59**

**60.** Dê um argumento geométrico para mostrar que

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \frac{\pi}{6}$$

**61-62** O ***valor médio*** de uma função contínua $f(x, y)$ em uma região $R$ do plano $xy$ é definido como

$$f_{\text{m}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

onde $A(R)$ é a área da região $R$ (comparar com a definição anterior ao Exercício 35 da Seção 14.1). Use essa definição nestes exercícios. ■

**61.** Calcule o valor médio de $1/(1 + x^2)$ na região triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

**62.** Calcule o valor médio de $f(x, y) = x^2 - xy$ na região compreendida por $y = x$ e $y = 3x - x^2$.

**63.** Suponha que a temperatura em graus Celsius em um ponto $(x, y)$ de uma lâmina de metal plana seja $T(x, y) = 5xy + x^2$, onde $x$ e $y$ estão dados em metros. Encontre a temperatura média da porção da lâmina em forma de diamante determinada por $|2x + y| \le 4$ e $|2x - y| \le 4$.

**64.** Uma lente circular de raio de 2 polegadas tem uma espessura de $1 - (r^2/4)$ polegadas em todos pontos a $r$ polegadas do centro da lente. Encontre a espessura média da lente.

C **65.** Use um CAS para a aproximar as interseções das curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x/2$ e depois aproxime o volume do sólido no primeiro octante que está abaixo da superfície $z = \sqrt{1 + x + y}$ e acima da região do plano $xy$ que é compreendido pelas curvas.

**66.** **Texto** Descreva os passos que você daria para encontrar os limites de integração que expressam uma integral dupla numa região não retangular como uma integral dupla iterada. Ilustre sua discussão com um exemplo.

**67.** **Texto** Descreva os passos que você daria para inverter a ordem de integração de uma integral dupla iterada. Ilustre sua discussão com um exemplo.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.2

**1.** (a) $\displaystyle\int_1^5 \left(\frac{1}{4}y^4 - 16y\right) dy$ (b) $\displaystyle\int_1^5 \left(\frac{3}{4}x^4 - 12x^2\right) dx$ **2.** (a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{-\frac{4}{3}x+4} f(x, y)\, dy\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{-\frac{3}{4}y+3} f(x, y)\, dx\, dy$

**3.** $\displaystyle\int_0^3 \int_x^{-\frac{1}{3}x+4} dy\, dx$ **4.** $\displaystyle\int_{-2}^1 \int_{x^2}^{2-x} (1 + 2y)\, dy\, dx = 18{,}9$

## 14.3 INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES

*Nesta seção, estudaremos integrais duplas nas quais o integrando e a região de integração são expressos em coordenadas polares. Tais integrais são importantes por duas razões: primeiro, elas surgem naturalmente em muitas aplicações e, segundo, muitas integrais duplas em coordenadas retangulares podem ser calculadas mais facilmente se convertidas para coordenadas polares.*

### ■ REGIÕES POLARES SIMPLES

Algumas integrais duplas são mais fáceis de calcular se a região de integração for expressa em coordenadas polares. Isso é geralmente verdadeiro se a região for limitada por uma cardioide, uma rosácea, uma espiral ou, mais geralmente, por qualquer curva cuja equação seja mais simples em coordenadas polares do que em coordenadas retangulares. Por exemplo, o quarto de disco na Figura 14.3.1 é descrito por

$$0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \le x \le 2$$

em coordenadas retangulares, mas em coordenadas polares essa região é dada mais simplesmente por

$$0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$$

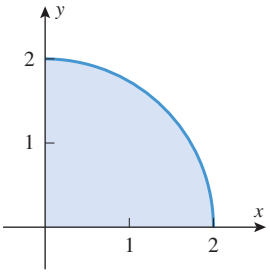
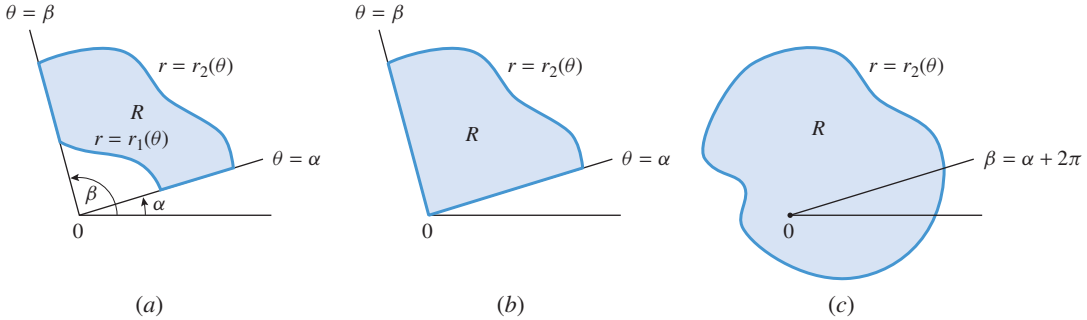



**Figura 14.3.1**

Além disso, as integrais duplas cujos integrandos envolvem $x^2 + y^2$ também tendem a ser mais fáceis de calcular em coordenadas polares, pois essa soma é igual a $r^2$ quando são aplicadas as fórmulas de conversão $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

Uma visão geral de coordenadas polares pode ser encontrada na Seção 10.2

A Figura 14.3.2*a* mostra uma região $R$ em um sistema de coordenadas polares que é delimitada por dois raios, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e duas curvas polares $r = r_1(\theta)$ e $r = r_2(\theta)$. Se, como mostrado na figura, as funções $r_1(\theta)$ e $r_2(\theta)$ forem contínuas e seus gráficos não se intersectarem, então a região $R$ é chamada *região polar simples*. Se $r_1(\theta)$ for identicamente nula, então a fronteira $r = r_1(\theta)$ reduz-se a um ponto (a origem) e a região assume a forma geral mostrada




Regiões polares simples

**Figura 14.3.2**

na Figura 14.3.2*b*. Se, além disso, $\beta = \alpha + 2\pi$, então os raios coincidem e a região assume a forma mostrada na Figura 14.3.2*c*. A seguinte definição expressa algebricamente essas ideias geométricas.

**14.3.1 DEFINIÇÃO** Uma ***região polar simples*** em um sistema de coordenadas polares é uma região delimitada por dois raios, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$, e duas curvas polares contínuas, $r = r_1(\theta)$ e $r = r_2(\theta)$, onde as equações dos raios e das curvas polares satisfazem as seguintes condições:

(i) $\alpha \le \beta$ (ii) $\beta - \alpha \le 2\pi$ (iii) $0 \le r_1(\theta) \le r_2(\theta)$

**OBSERVAÇÃO**

As condições (i) e (ii), em conjunto, implicam que o raio $\theta = \beta$ pode ser obtido pela rotação em sentido anti-horário do raio $\theta = \alpha$ em um ângulo que é, no máximo, de $2\pi$ radianos. Isso é consistente com a Figura 14.3.2. A condição (iii) implica que as curvas de fronteira $r = r_1(\theta)$ e $r = r_2(\theta)$ podem se tocar, mas não podem cruzar uma sobre a outra (por quê?). Assim, de acordo com a Figura 14.3.2, é apropriado descrever $r = r_1(\theta)$ como a ***fronteira interna*** da região e $r = r_2(\theta)$ como a ***fronteira externa***.

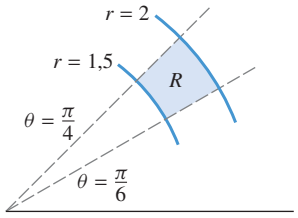



**Figura 14.3.3**

Um ***retângulo polar*** é uma região polar simples em que as curvas polares que a delimitam são arcos circulares. Por exemplo, a Figura 14.3.3 mostra o retângulo polar $R$ dado por

$$1{,}5 \le r \le 2, \quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

## INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES

A seguir, consideraremos a versão polar do Problema 14.1.1.

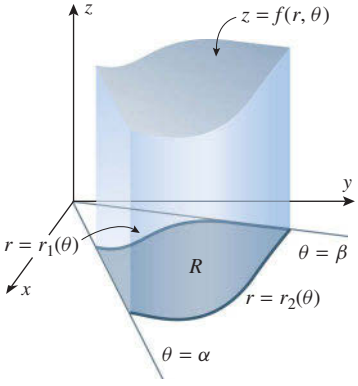



**Figura 14.3.4**

**14.3.2 O PROBLEMA DO VOLUME EM COORDENADAS POLARES** Dada uma função $f(r, \theta)$, contínua e não negativa em uma região polar simples $R$, calcule o volume do sólido delimitado pela região $R$ e a superfície cuja equação, em coordenadas cilíndricas, é $z = f(r, \theta)$ (Figura 14.3.4).

Para motivar uma fórmula para o volume $V$ do sólido da Figura 14.3.4, usaremos um processo de limite semelhante ao usado para obter a Fórmula (2) da Seção 14.1, exceto que aqui vamos usar arcos de círculo e raios para subdividir a região $R$ em retângulos polares. Como mostrado na Figura 14.3.5, excluiremos das considerações todos os retângulos polares que tenham pontos fora de $R$, deixando somente os retângulos polares que são subconjuntos de $R$. Suponha que haja $n$ desses retângulos polares e denote a área do $k$-ésimo retângulo polar por $\Delta A_k$. Seja $(r_k^*, \theta_k^*)$ qualquer ponto desse retângulo polar. Como mostrado na Figura 14.3.6, o produto $f(r_k^*, \theta_k^*)\Delta A_k$ é o volume de um sólido com área da base $\Delta A_k$ e altura $f(r_k^*, \theta_k^*)$, portanto a soma

$$\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*)\Delta A_k$$

pode ser vista como uma aproximação do volume $V$ do sólido inteiro.

Agora, se aumentarmos o número de subdivisões de tal maneira que as dimensões dos retângulos polares tendam para zero, parece plausível que os erros das aproximações tendam para zero e que o volume exato do sólido seja

$$V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*)\Delta A_k \tag{1}$$

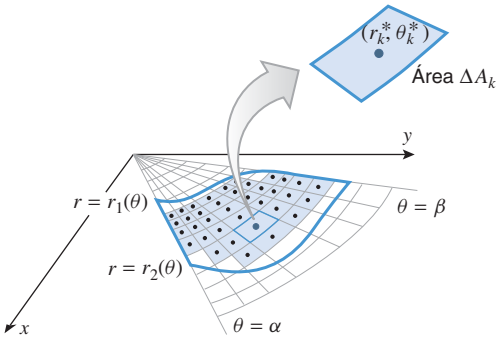



**Figura 14.3.5**

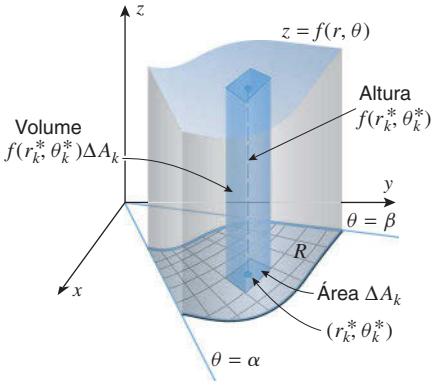



**Figura 14.3.6**

Se $f(r, \theta)$ for contínua em $R$ e tiver tanto valores positivos como negativos, então o limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k \tag{2}$$

representa o volume líquido com sinal entre a região $R$ e a superfície $z = f(r, \theta)$ (como no caso das integrais duplas em coordenadas retangulares). As somas em (2) são chamadas de ***somas de Riemann polares***, e o limite das somas de Riemann polares é denotado por

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k \tag{3}$$

que é denominada ***integral dupla polar*** de $f(r, \theta)$ em $R$. Se $f(r, \theta)$ for contínua e não negativa em $R$, então o volume da Fórmula (1) pode ser expresso como

$$V = \iint_R f(r, \theta)\, dA \tag{4}$$

As integrais duplas polares também são chamadas de ***integrais duplas em coordenadas polares*** para distingui-las das integrais duplas em regiões no plano $xy$, que são chamadas de ***integrais duplas em coordenadas retangulares***. As integrais duplas em coordenadas polares têm as propriedades usuais das integrais, como as enunciadas pelas Fórmulas (9), (10) e (11) da Seção 14.1.

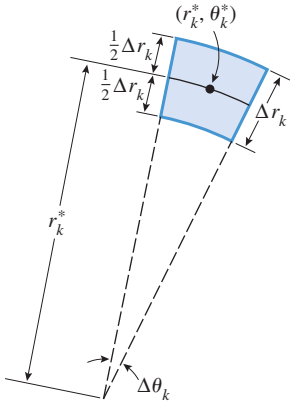



**Figura 14.3.7**

## CÁLCULO DE INTEGRAIS DUPLAS POLARES

Nas Seções 14.1 e 14.2, calculamos integrais duplas em coordenadas retangulares expressando-as como integrais iteradas. As integrais duplas polares são calculadas da mesma maneira. Para motivar a fórmula que exprime a integral dupla polar como uma integral iterada, vamos supor que $f(r, \theta)$ seja não negativa, de modo que possamos interpretar (3) como um volume. Entretanto, os resultados que iremos obter também são aplicáveis se $f$ tomar valores negativos. Para iniciar, vamos escolher o ponto arbitrário $(r_k^*, \theta_k^*)$ de (3) como sendo o "centro" do $k$-ésimo retângulo polar, como mostra a Figura 14.3.7. Suponhamos, também, que esse retângulo polar tenha um ângulo central $\Delta\theta_k$ e uma "espessura radial" $\Delta r_k$. Assim, o raio interno desse retângulo polar é $r_k^* - \frac{1}{2}\Delta r_k$ e o raio externo é $r_k^* + \frac{1}{2}\Delta r_k$. Interpretando a área $\Delta A_k$ desse retângulo polar como a diferença de área entre dois setores, obtemos

$$\Delta A_k = \tfrac{1}{2}\left(r_k^* + \tfrac{1}{2}\Delta r_k\right)^2 \Delta\theta_k - \tfrac{1}{2}\left(r_k^* - \tfrac{1}{2}\Delta r_k\right)^2 \Delta\theta_k$$

que simplifica para

$$\Delta A_k = r_k^* \Delta r_k \Delta\theta_k \tag{5}$$

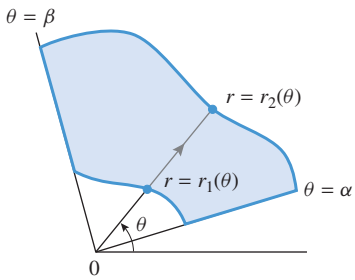



**Figura 14.3.8**

Assim, de (3) e (4)

$$V = \iint_R f(r, \theta)\, dA = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*) r_k^* \Delta r_k \Delta \theta_k$$

o que sugere que o volume $V$ possa ser expresso como a integral iterada

$$V = \iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r \, dr \, d\theta \tag{6}$$

em que os limites de integração são escolhidos para cobrir a região $R$; isto é, com $\theta$ fixado entre $\alpha$ e $\beta$, o valor de $r$ varia de $r_1(\theta)$ a $r_2(\theta)$ (Figura 14.3.8).

Apesar de termos suposto $f(r, \theta)$ como não negativa na dedução da Fórmula (6), pode-se provar que a relação entre a integral dupla polar e a integral iterada nesta fórmula também é verificada se $f$ tomar valores negativos. Aceitando-se isso, obtemos o seguinte teorema, que enunciamos sem prova formal.

Observe o fator adicional de $r$ que aparece no integrando quando escrevemos uma integral dupla polar como uma integral iterada em coordenadas polares.

**14.3.3 TEOREMA** *Se $R$ for uma região polar simples cujos limites são os raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e as curvas $r = r_1(\theta)$ e $r = r_2(\theta)$ mostrados na Figura 14.3.8 e se $f(r, \theta)$ for contínua em $R$, então*

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r \, dr \, d\theta \tag{7}$$

Para aplicar esse teorema, precisamos saber como encontrar os raios e as curvas que formam a fronteira da região $R$, uma vez que eles definem os limites de integração da integral iterada. Isso é feito da seguinte maneira:

***Determinação dos Limites de Integração de uma Integral Dupla Polar: Região Polar Simples***

**Passo 1** Como $\theta$ é mantido fixo na primeira integração, trace uma reta radial, com ponto inicial na origem, através da região $R$ e ângulo fixo $\theta$ (Figura 14.3.9*a*). Essa reta cruza a fronteira de $R$, no máximo, duas vezes. O ponto de interseção mais interno está na fronteira interna $r = r_1(\theta)$ e o ponto mais externo está na fronteira externa $r = r_2(\theta)$. Essas interseções determinam os limites de integração de $r$ em (7).

**Passo 2** Imagine girar o eixo $x$ positivo uma revolução inteira no sentido anti-horário em torno da origem. O menor ângulo em que esse raio intersecta a região $R$ é $\theta = \alpha$ e o maior ângulo é $\theta = \beta$ (Figura 14.3.9*b*). Isso determina os limites de integração de $\theta$.

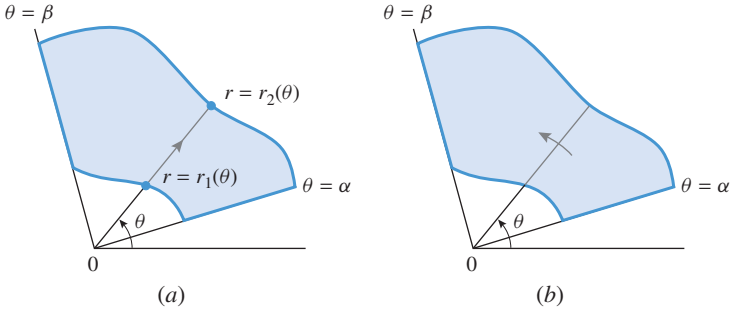



**Figura 14.3.9**

**▶ Exemplo 1** Calcule

$$\iint_R \operatorname{sen}\theta \, dA$$

onde $R$ é a região no primeiro quadrante fora do círculo $r = 2$ e dentro da cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

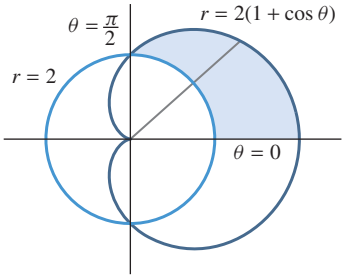



**Figura 14.3.10**

***Solução*** A região $R$ está esboçada na Figura 14.3.10. Seguindo os dois passos descritos acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_R \operatorname{sen}\theta \, dA &= \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos\theta)} (\operatorname{sen}\theta) r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}\theta \right]_{r=2}^{2(1+\cos\theta)} d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta] \, d\theta \\
&= 2 \left[ -\frac{1}{3}(1 + \cos\theta)^3 + \cos\theta \right]_0^{\pi/2} \\
&= 2 \left[ -\frac{1}{3} - \left( -\frac{5}{3} \right) \right] = \frac{8}{3} \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

**▶ Exemplo 2** A esfera de raio $a$ com centro na origem é expressa em coordenadas retangulares como $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e, portanto, sua equação em coordenadas cilíndricas é $r^2 + z^2 = a^2$. Use essa equação e uma integral dupla polar para calcular o volume da esfera.

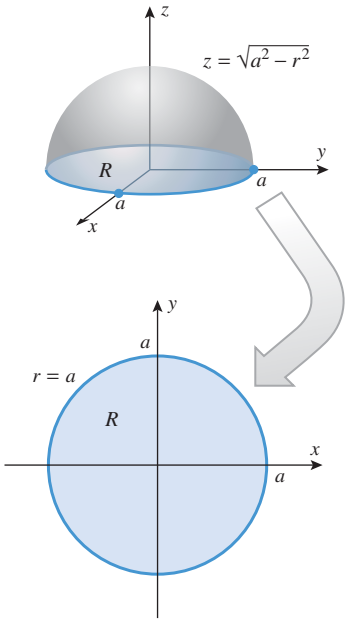



**Figura 14.3.11**

***Solução*** Em coordenadas cilíndricas, o hemisfério superior é dado pela equação

$$z = \sqrt{a^2 - r^2}$$

de modo que o volume de toda a esfera é

$$V = 2 \iint_R \sqrt{a^2 - r^2} \, dA$$

onde $R$ é a região circular mostrada na Figura 14.3.11. Assim,

$$\begin{aligned}
V = 2 \iint_R \sqrt{a^2 - r^2} \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} (2r) \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{2}{3}(a^2 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^a d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} a^3 \, d\theta \\
&= \left[ \frac{2}{3} a^3 \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi a^3 \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

## ■ CÁLCULO DE ÁREAS USANDO INTEGRAIS DUPLAS POLARES

Lembre-se que, pela Fórmula (7) da Seção 14.2, a área de uma região $R$ do plano $xy$ pode ser expressa como

$$\text{área de } R = \iint_R 1 \, dA = \iint_R dA \tag{8}$$

O raciocínio feito para deduzir esse resultado também pode ser usado para mostrar que a fórmula aplica-se às integrais duplas polares em regiões dadas em coordenadas polares.

**▶ Exemplo 3** Use uma integral dupla polar para calcular a área compreendida pela rosácea de três pétalas $r = \operatorname{sen} 3\theta$.

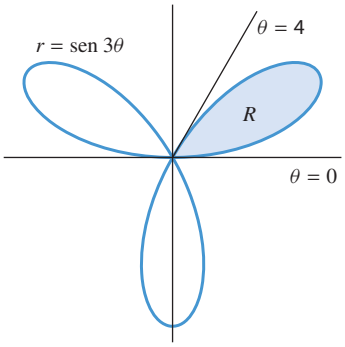



Figura 14.3.12

***Solução*** A rosácea está esboçada na Figura 14.3.12. Usaremos a Fórmula (8) para calcular a área da pétala $R$ no primeiro quadrante e multiplicaremos por três.

$$A = 3\iint_R dA = 3\int_0^{\pi/3}\int_0^{\operatorname{sen} 3\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 3\theta\,d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/3}(1-\cos 6\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 6\theta}{6}\right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{4}\pi \quad \blacktriangleleft$$

## CONVERSÃO DE INTEGRAIS DUPLAS DE COORDENADAS RETANGULARES PARA POLARES

Às vezes, uma integral dupla difícil de calcular em coordenadas retangulares pode ser calculada mais facilmente em coordenadas polares, fazendo a substituição $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ e expressando a região de integração em forma polar; isto é, reescrevendo a integral dupla em coordenadas retangulares como

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,dA = \iint_{\substack{\text{limites}\\ \text{apropriados}}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\,dr\,d\theta \quad (9)$$

**▶ Exemplo 4** Use coordenadas polares para calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx$.

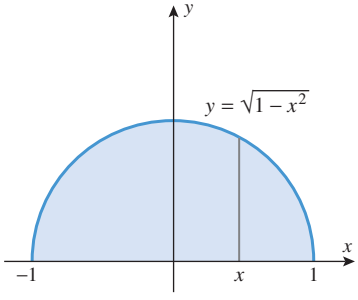



Figura 14.3.13

***Solução*** Neste problema, começamos com uma integral iterada em coordenadas retangulares em vez de uma integral dupla; portanto, antes que possamos fazer a conversão para coordenadas polares temos que identificar a região de integração. Para isso, observamos que, com $x$ fixo, os limites de integração de $y$ são $y = 0$ e $y = \sqrt{1-x^2}$, o que nos diz que o limite inferior da região está no eixo dos $x$ e o limite superior é um semicírculo de raio 1 com centro na origem. Pela integração em $x$, vemos que $x$ varia de $-1$ a 1 e concluímos, então, que a região de integração é como mostra a Figura 14.3.13. Em coordenadas polares, essa é a região varrida quando $r$ varia entre 0 e 1 e $\theta$ varia entre 0 e $\pi$. Assim,

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx = \iint_R (x^2+y^2)^{3/2}\,dA$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^1 (r^3) r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{5}\,d\theta = \frac{\pi}{5} \quad \blacktriangleleft$$

**OBSERVAÇÃO** A conversão para coordenadas polares funcionou bem nesse exemplo porque a substituição $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ reduziu a soma $x^2 + y^2$ a um único termo $r^2$, simplificando, pois, o integrando. Sempre que encontrarmos uma expressão envolvendo $x^2 + y^2$ no integrando, devemos considerar a possibilidade de converter para coordenadas polares.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.3 (Ver página 1025 para respostas.)

**1.** A região polar dento do círculo $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ e fora do círculo $r = 1$ é uma região polar simples dada pelas desigualdades

_____ $\le r \le$ _____ e _____ $\le \theta \le$ _____.

**2.** Seja $R$ a região do primeiro quadrante delimitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 9$ e $x^2 + y^2 = 100$. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} f(r,\theta) r\,dr\,d\theta$$

**3.** Seja $V$ o volume do sólido limitado acima pelo hemisfério $z = \sqrt{1 - r^2}$ e abaixo pelo disco compreendido pelo círculo $r = \operatorname{sen} \theta$. Expressado como uma integral dupla em coordenadas polares, $V =$ _____.

**4.** Expresse a integral iterada como uma integral dupla em coordenadas polares.

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) dy\,dx = _____$$

## EXERCÍCIOS 14.3

**1-6** Calcule a integral iterada. ■

**1.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r\cos\theta\,dr\,d\theta$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

**3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\operatorname{sen}\theta} r^2\,dr\,d\theta$

**4.** $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_0^{\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta$

**5.** $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1-\operatorname{sen}\theta} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$

**6.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta$

**7-10** Use uma integral dupla em coordenadas polares para calcular a área da região descrita. ■

**7.** A região compreendida pela cardioide $r = 1 - \cos\theta$.

**8.** A região compreendida pela rosácea $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

**9.** A região do primeiro quadrante limitada por $r = 1$ e $r = \operatorname{sen} 2\theta$, com $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$

**10.** A região no interior do círculo $x^2 + y^2 = 4$ e à direita da reta $x = 1$.

### ENFOCANDO CONCEITOS

**11-12** Seja $R$ a região descrita. Esboce a região $R$ e preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

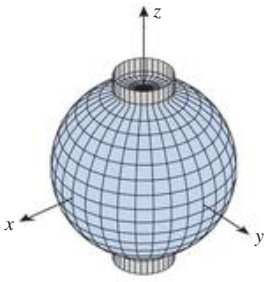
$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} f(r,\theta) r\,dr\,d\theta$$ ■

**11.** A região no interior do círculo $r = 4 \operatorname{sen}\theta$ e fora do círculo $r = 2$.

**12.** A região no interior do círculo $r = 1$ e fora da cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

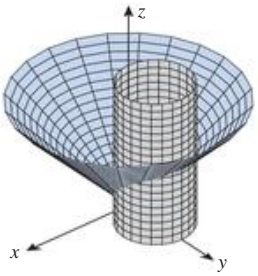
**13-16** Expresse o volume do sólido descrito como uma integral dupla em coordenadas polares. ■

**13.**



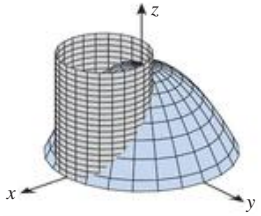

Dentro de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
Fora de $x^2 + y^2 = 1$

**14.**



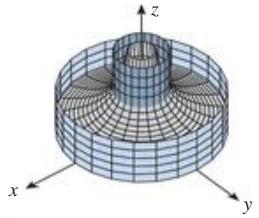

Abaixo de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
Dentro de $x^2 + y^2 = 2y$
Acima de $z = 0$

**15.**




Abaixo de $z = 1 - x^2 - y^2$
Dentro de $x^2 + y^2 - x = 0$
Acima de $z = 0$

**16.**




Abaixo de $z = (x^2 + y^2)^{-1/2}$
Fora de $x^2 + y^2 = 1$
Dentro de $x^2 + y^2 = 9$
Acima de $z = 0$

**17-20** Encontre o volume do sólido descrito no exercício indicado ■

**17.** Exercício 13. **18.** Exercício 14.

**19.** Exercício 15. **20.** Exercício 16.

**21.** Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado acima pela superfície $z = r \operatorname{sen}\theta$, abaixo pelo plano $xy$ e lateralmente pelo plano $x = 0$ e a superfície $r = 3 \operatorname{sen}\theta$.

**22.** Encontre o volume do sólido contido na superfície $r^2 + z^2 = 4$ e fora da superfície $r = 2\cos\theta$.

**23-26** Use coordenadas polares para calcular a integral dupla. ■

**23.** $\iint_R \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dA$, onde $R$ é a região contida no círculo $x^2+y^2=9$.

**24.** $\iint_R \sqrt{9-x^2-y^2}\,dA$, onde $R$ é a região do primeiro quadrante contida no círculo $x^2+y^2=9$.

**25.** $\iint_R \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\,dA$, onde $R$ é o setor do primeiro quadrante limitado por $y=0$, $y=x$ e $x^2+y^2=4$.

**26.** $\iint_R 2y\,dA$, onde $R$ é a região do primeiro quadrante limitada acima pelo círculo $(x-1)^2+y^2=1$ e abaixo pela reta $y=x$.

**27-34** Calcule a integral iterada convertendo para coordenadas polares. ■

**27.** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$

**28.** $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

**29.** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

**30.** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$

**31.** $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy\,dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \quad (a>0)$

**32.** $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

**33.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$

**34.** $\displaystyle\int_{-4}^{0} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} 3x\,dy\,dx$

**35-38 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**35.** O disco de raio 2 centrado na origem é um retângulo polar.

**36.** Se $f$ for contínua e não negativa em uma região polar simples $R$, então o volume do sólido delimitado entre $R$ e o gráfico da superfície $z=f(r,\theta)$ será dado por

$$\iint_R f(r,\theta)r\,dA$$

**37.** Se $R$ for a região do primeiro quadrante delimitada pelos círculos $r=1$ e $r=2$ e se $f$ for contínua em $R$, então

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 f(r,\theta)\,dr\,d\theta$$

**38.** A área englobada pelo círculo $r=\operatorname{sen}\theta$ é dada por

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r\,dr\,d\theta$$

**39.** Use uma integral dupla em coordenadas polares para calcular o volume de um cilindro de raio $a$ e altura $h$.

**40.** Suponha que um gêiser, com centro na origem de um sistema de coordenadas polares, esguiche água em um padrão circular de tal maneira que a profundidade $D$ da água que atinge um ponto a uma distância de $r$ pés da origem em uma hora é $D=ke^{-r}$. Calcule o volume total de água que o gêiser esguicha em um círculo de raio $R$ com centro na origem.

**41.** Calcule $\iint_R x^2\,dA$ na região $R$ mostrada na figura a seguir.

**42.** Mostre que a área sombreada da figura a seguir é $a^2\phi - \frac{1}{2}a^2\operatorname{sen}2\phi$.

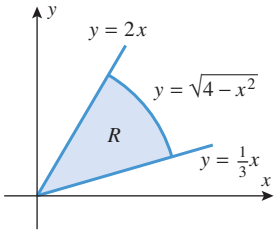



**Figura Ex-41**

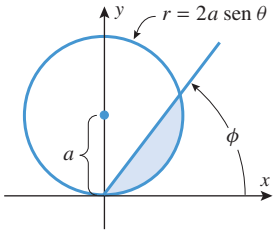



**Figura Ex-42**

**43.** (a) Use uma integral dupla em coordenadas polares para calcular o volume do esferoide oblato

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (0<c<a)$$

(b) Use o resultado da parte (a) e o Sistema Geodésico Mundial de 1984 (WGS-84) discutido no Exercício 54 da Seção 11.7 para calcular o volume da Terra em metros cúbicos.

**44.** Use coordenadas polares para calcular o volume do sólido acima do plano $xy$, no interior do cilindro $x^2+y^2-ay=0$ e contido no elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

**45.** Calcule a área da região compreendida pela lemniscata $r^2=2a^2\cos 2\theta$.

**46.** Calcule a área do primeiro quadrante contida no interior do círculo $r=4\operatorname{sen}\theta$ e fora da lemniscata $r^2=8\cos 2\theta$.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.3

**1.** $1\le r\le 2\operatorname{sen}\theta,\quad \pi/6\le\theta\le 5\pi/6$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_3^{10} f(r,\theta)r\,dr\,d\theta$ **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta$ **4.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_1^{\sec\theta}\frac{1}{r}\,dr\,d\theta$

# 14.4 ÁREA DE SUPERFÍCIE; SUPERFÍCIES PARAMÉTRICAS

*Em seções anteriores, mostramos como encontrar a área de superfície de uma superfície de revolução. Nesta seção, deduziremos fórmulas da área de superfície de superfícies de equações da forma $z = f(x, y)$ e de superfícies que são representadas por equações paramétricas.*

## ÁREA DE SUPERFÍCIE DE SUPERFÍCIES DA FORMA $z = f(x, y)$

Em seções anteriores, vimos que a expressão

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

dá a área da superfície que é obtida girando a parte da curva $y = f(x)$ acima de $[a, b]$ em torno do eixo $x$, supondo que $f$ seja uma função lisa e não negativa no intervalo. Agora, obteremos uma fórmula da área de superfície $S$ de uma superfície da forma $z = f(x, y)$.

Considere uma superfície $\sigma$ da forma $z = f(x, y)$ definida acima de uma região $R$ do plano $xy$ (Figura 14.4.1*a*). Vamos supor que $f$ tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas nos pontos interiores de $R$. (Geometricamente, isso significa que a superfície tem um plano tangente não vertical em cada ponto interior de $R$). Começamos subdividindo $R$ em regiões retangulares com retas paralelas aos eixos $x$ e $y$ e descartando qualquer porção não retangular que contenha pontos da fronteira de $R$. Suponha que sobrem $n$ retângulos, denotados por $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

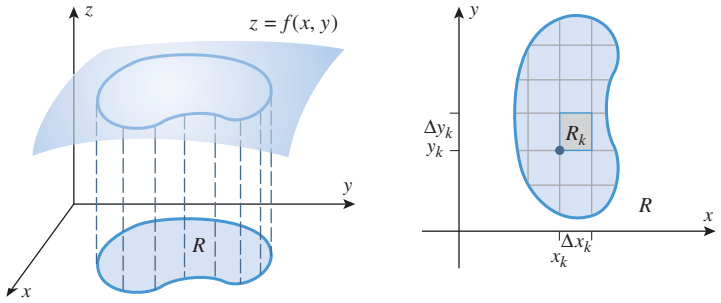



Figura 14.4.1 (*a*) (*b*)

Seja $(x_k, y_k)$ o canto inferior esquerdo do $k$-ésimo retângulo $R_k$ e suponha que esse retângulo tenha área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$, em que $\Delta x_k$ e $\Delta y_k$ são as dimensões de $R_k$ (Figura 14.4.1*b*). A porção de $\sigma$ que fica acima de $R_k$ será uma *porção curvilínea* da superfície que tem um vértice em $P_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$; denotemos a área dessa porção por $\Delta S_k$ (Figura 14.4.2*a*). Para obter uma aproximação de $\Delta S_k$, vamos substituir $\sigma$ pelo plano tangente a $\sigma$ em $P_k$. A equação desse plano tangente é

$$z = f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k)(x - x_k) + f_y(x_k, y_k)(y - y_k)$$

(ver Teorema 13.7.2). A parte do plano tangente que fica acima de $R_k$ será um paralelogramo $\tau_k$. Esse paralelogramo terá um vértice em $P_k$ e lados adjacentes determinados pelos vetores

$$\mathbf{q}_k = \left\langle \Delta x_k, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x_k \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_k = \left\langle 0, \Delta y_k, \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y_k \right\rangle$$

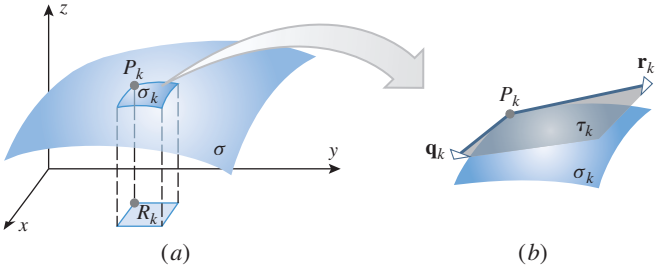



Figura 14.4.2 (*a*) (*b*)

conforme ilustrado na Figura 14.4.2*b*. [Aqui usamos $\partial z/\partial x$ para representar $f_x(x_k, y_k)$ e $\partial z/\partial y$ para representar $f_y(x_k, y_k)$.]

Se as dimensões de $R_k$ forem pequenas, então $\tau_k$ deverá fornecer uma aproximação boa da porção curvilínea $\sigma_k$. Pelo Teorema 11.4.5(*b*), a área do paralelogramo $\tau_k$ é o comprimento do produto vetorial de $\mathbf{q}_k$ e $\mathbf{r}_k$. Assim, é de se esperar que

$$\Delta S_k \approx \text{área } \tau_k = \|\mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_k\|$$

seja uma aproximação boa se $\Delta x_k$ e $\Delta y_k$ forem pequenos. Calculando o produto vetorial, obtemos

$$\|\mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_k\| = \begin{Vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y_k \end{Vmatrix} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)\Delta x_k \Delta y_k$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \Delta S_k &\approx \left\|\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)\Delta x_k \Delta y_k\right\| = \left\|-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right\| \Delta x_k \Delta y_k \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,\Delta A_k \end{aligned} \tag{1}$$

Segue que a área de superfície da superfície inteira pode se aproximada por

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,\Delta A_k$$

Supondo que os erros das aproximações tendam a zero quando $n$ cresce de tal forma que as dimensões dos retângulos tendam a zero, então é plausível que o valor exato de $S$ seja

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,\Delta A_k$$

ou, equivalentemente,

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA \tag{2}$$

► **Exemplo 1** Encontre a área da parte da superfície $z = \sqrt{4 - x^2}$ que fica acima do retângulo $R$ do plano $xy$ cujas coordenadas satisfazem $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 4$.

***Solução*** Como mostrado na Figura 14.4.13, a superfície é uma parte do cilindro $x^2 + z^2 = 4$. Por (2), temos que a área de superfície é

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA \\ &= \iint_R \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1}\,dA = \int_0^4 \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx\,dy \\ &= 2\int_0^4 \left[\text{arc sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_{x=0}^{1} dy = 2\int_0^4 \frac{\pi}{6}\,dy = \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

Fórmula 21 da Seção 7.1, no Volume 1

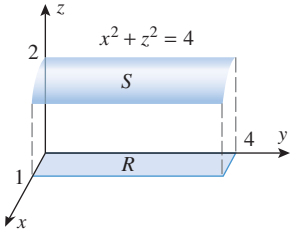



**Figura 14.4.3**

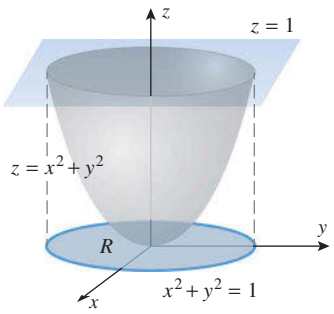



Figura 14.4.4

**► Exemplo 2** Encontre a área de superfície da porção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$.

***Solução*** A superfície $z = x^2 + y^2$ é o paraboloide circular mostrado na Figura 14.4.4. O traço do paraboloide no plano $z = 1$ projeta-se no círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano $xy$, e a porção do paraboloide que fica abaixo do plano $z = 1$ projeta-se na região $R$ que é envolta por esse círculo. Assim, pela Fórmula (2), segue que a área de superfície é

$$S = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

A expressão $4x^2 + 4y^2 + 1 = 4(x^2 + y^2) + 1$ no integrando sugere que se calcule a integral em coordenadas polares. De acordo com a Fórmula (9) da Seção 14.3, substituimos $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$ no integrando, $dA$ por $r\,dr\,d\theta$ e determinamos os limites de integração expressando a região $R$ em coordenadas polares. Desse modo, obtemos

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2}\right]_{r=0}^{1} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 1)\, d\theta = \frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5} - 1) \quad \blacktriangleleft$$

Algumas superfícies podem não ser convenientemente descritas em termos de funções $z = f(x, y)$, e uma abordagem mais simples pode ser oferecida por uma descrição paramétrica. Vamos fazer uma pausa para uma discussão de superfícies representadas parametricamente, com o objetivo final de obter uma fórmula para a área de uma dessas superfícies paramétricas.

## REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DE SUPERFÍCIES

Vimos que curvas no espaço tridimensional podem ser representadas por três equações envolvendo um parâmetro, digamos

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

As superfícies no espaço tridimensional podem ser representadas parametricamente por três equações envolvendo dois parâmetros, digamos

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{3}$$

Para vizualizar por que tais equações representam uma superfície, imagine $(u, v)$ como um ponto que varia em alguma região de um plano $uv$. Se $u$ for mantido constante, então $v$ é o único parâmetro variável em (3), e as três equações representam uma curva do espaço tridimensional. Chamamos essa curva de ***curva de u constante*** (Figura 14.4.5). Analogamente, se $v$ for mantido constante, então $u$ é o único parâmetro variável em (3) e, de novo, essas três equações representam uma curva do espaço tridimensional. Chamamos essa curva de ***curva de v constante***. Variando as constantes, geramos uma família de curvas de $u$ e uma família de curvas de $v$ que, juntas, formam uma superfície.

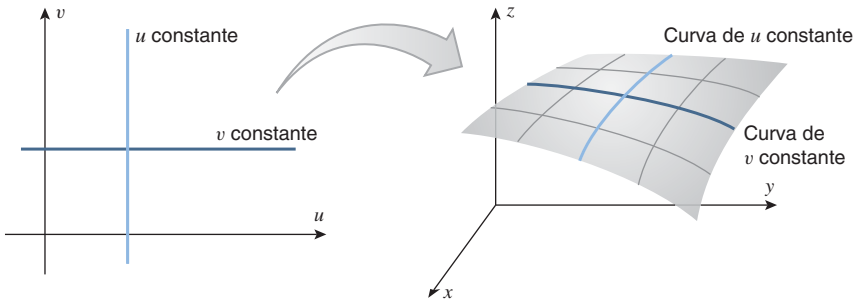
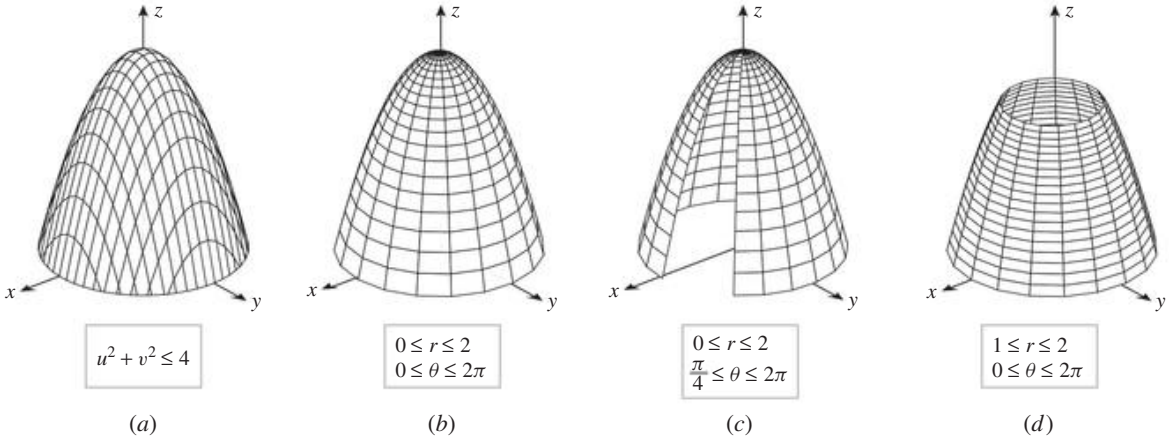



Figura 14.4.5

► **Exemplo 3** Considere o paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$. Uma maneira de parametrizar essa superfície é tomar $x = u$ e $y = v$ como os parâmetros, caso em que a superfície é representada pelas equações paramétricas

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 4 - u^2 - v^2 \tag{4}$$

A Figura 14.4.6*a* mostra um gráfico dessa superfície gerado em computador. As curvas de $u$ constante correspondem a valores constantes de $x$ e, portanto, aparecem na superfície como traços paralelos ao plano $yz$. Analogamente, as curvas de $v$ constante correspondem a valores constantes de $y$ e, portanto, aparecem na superfície como traços paralelos ao plano $xz$. ◄




(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

**Figura 14.4.6**

► **Exemplo 4** O paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, considerado no Exemplo 3, também pode ser parametrizado expressando, antes, a equação em coordenadas cilíndricas. Para isso, fazemos a substituição $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, o que dá $z = 4 - r^2$. Assim, o paraboloide pode ser representado parametricamente em função de $r$ e $\theta$ como

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta, \quad z = 4 - r^2 \tag{5}$$

A Figura 14.4.6*b* mostra um gráfico dessa superfície gerado em computador, com $0 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. As curvas de $r$ constante correspondem a valores constantes de $z$ e, então, aparecem na superfície como traços paralelos ao plano $xy$. As curvas de $\theta$ constante aparecem na superfície como traços de planos verticais que passam pela origem, com ângulos variáveis em relação ao eixo dos $x$. As partes (*c*) e (*d*) da Figura 14.4.6 mostram o efeito de restrições nos parâmetros $r$ e $\theta$. ◄

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Se o leitor dispuser de um recurso gráfico que possa gerar superfícies paramétricas, leia a documentação pertinente e tente gerar as superfícies da Figura 14.4.6.

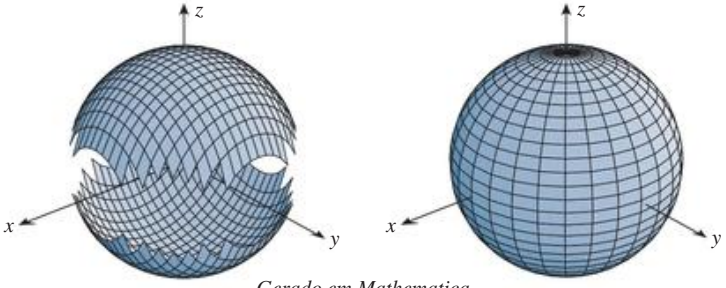
► **Exemplo 5** Uma das maneiras de gerar a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com um recurso gráfico é traçar os hemisférios superior e inferior

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

na mesma tela. Essa prática, no entanto, cria, em geral, uma esfera fragmentada (Figura 14.4.7*a*) porque, esporadicamente, o erro de arredondamento produz valores negativos sob o radical quando $1 - x^2 - y^2$ está próximo de zero. Pode ser gerado um gráfico melhor expressando a esfera, primeiramente, em coordenadas esféricas como $\rho = 1$ e, depois, usando as fórmulas de conversão de coordenadas esféricas para retangulares da Tabela 11.8.1 para obter as equações paramétricas

$$x = \text{sen}\,\phi\cos\theta, \quad y = \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \quad z = \cos\phi$$

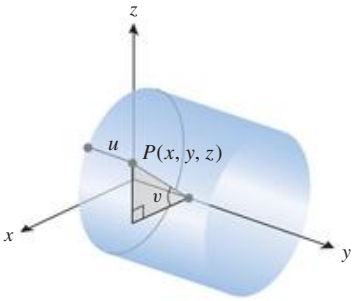
com parâmetros $\theta$ e $\phi$. A Figura 14.4.7*b* mostra o gráfico dessa superfície paramétrica com $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le \phi \le \pi$. Na linguagem dos cartógrafos, as curvas de $\phi$ constante são as ***linhas de latitude*** e as curvas de $\theta$ constante são as ***linhas de longitude***. ◄



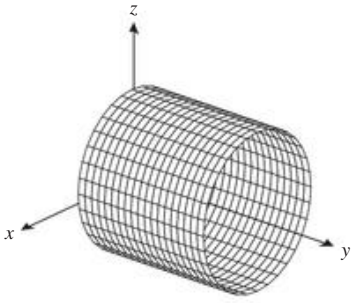

Gerado em Mathematica

(*a*) (*b*)

**Figura 14.4.7**




(*a*)




(*b*)

**Figura 14.4.8**

► **Exemplo 6** Encontre equações paramétricas da parte do cilindro circular reto

$$x^2 + z^2 = 9 \quad \text{no qual} \quad 0 \le y \le 5$$

em função dos parâmetros $u$ e $v$ mostrados na Figura 14.4.8*a*. O parâmetro $u$ é a ordenada $y$ de um ponto $P(x, y, z)$ da superfície, e $v$ é o ângulo mostrado na figura.

***Solução*** O raio do cilindro é 3, de modo que é evidente da figura que $y = u$, $x = 3 \cos v$ e $z = 3 \operatorname{sen} v$. Então, a superfície pode ser representada parametricamente como

$$x = 3 \cos v, \quad y = u, \quad z = 3 \operatorname{sen} v$$

Para obter a parte da superfície de $y = 0$ a $y = 5$, deixamos o parâmetro $u$ variar no intervalo $0 \le u \le 5$ e, para garantir que toda a superfície lateral seja coberta, fazemos o parâmetro $v$ variar no intervalo $0 \le v \le 2\pi$. A Figura 14.4.8*b* mostra um gráfico da superfície gerado em computador, no qual $u$ e $v$ variam nesses intervalos. As curvas de $u$ constante aparecem como traços circulares paralelos ao plano $xz$, e as curvas de $v$ constante aparecem como retas paralelas ao eixo $y$. ◄

## REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DAS SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

A ideia básica do Exemplo 6 pode ser adaptada para obter equações paramétricas das superfícies de revolução. Suponha, por exemplo, que queiramos determinar as equações paramétricas da superfície gerada pela revolução da curva plana $y = f(x)$ em torno do eixo $x$. A Figura 14.4.9 sugere que a superfície possa ser representada parametricamente como

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v, \quad z = f(u) \operatorname{sen} v \tag{6}$$

onde $v$ é o ângulo mostrado.

Nos exercícios, discutiremos fórmulas análogas a (6) para superfícies de revolução em torno de outros eixos.

► **Exemplo 7** Obtenha equações paramétricas da superfície gerada pela revolução da curva $y = 1/x$ em torno do eixo $x$.

***Solução*** Por (6), essa superfície pode ser representada parametricamente como

$$x = u, \quad y = \frac{1}{u} \cos v, \quad z = \frac{1}{u} \operatorname{sen} v$$

Um princípio geral para a representação paramétrica de superfícies de revolução é tomar $u$ como a variável do eixo em torno do qual gira a curva e as outras variáveis como $f(u) \cos v$ e $f(x) \operatorname{sen} v$.

A Figura 14.4.10 mostra um gráfico da superfície, gerado em computador, com $0{,}7 \le u \le 5$ e $0 \le v \le 2\pi$. Essa superfície é uma parte da corneta de Gabriel, discutida no Exercício 55 da Seção 7.8, no Volume 1. ◄

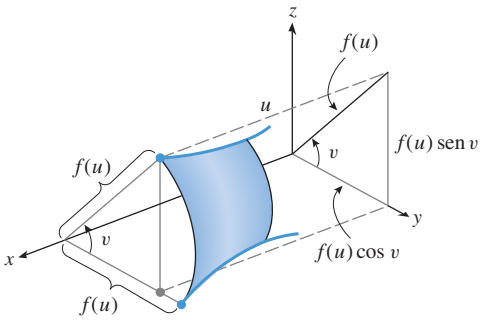



Figura 14.4.9

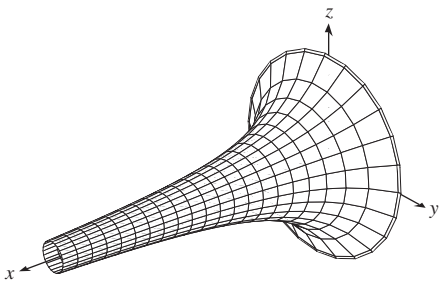



Figura 14.4.10

## FUNÇÕES VETORIAIS DE DUAS VARIÁVEIS

Lembre-se de que as equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

podem ser dadas sob forma vetorial como

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ é o vetor posição e $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ é uma função vetorial de uma variável. Analogamente, as equações paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

podem ser dadas sob forma vetorial como

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

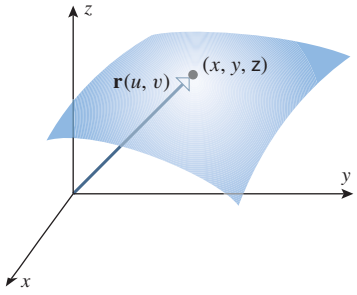



Figura 14.4.11

Aqui, a função $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ é uma ***função vetorial de duas variáveis***. Definimos o ***gráfico*** de $\mathbf{r}(u, v)$ como o gráfico correspondente às equações paramétricas. Geometricamente, podemos interpretar $\mathbf{r}$ como um vetor da origem a um ponto $(x, y, z)$ que se move sobre a superfície $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, quando $u$ e $v$ variam (Figura 14.4.11). Como nas funções vetoriais de uma variável, dizemos que $\mathbf{r}(u, v)$ é ***contínua*** se cada componente for contínuo.

► **Exemplo 8** O paraboloide do Exemplo 3 foi dado parametricamente como

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 4 - u^2 - v^2$$

Essas equações podem ser dadas sob forma vetorial como

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

## DERIVADAS PARCIAIS DE FUNÇÕES VETORIAIS

As derivadas parciais de funções vetoriais de duas varáveis são obtidas tomando-se as derivadas parciais dos componentes. Por exemplo, se

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

então

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

Essas derivadas podem ser escritas como $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ ou $\mathbf{r}_u(u, v)$ e $\mathbf{r}_v(u, v)$ e podem ser obtidas como os limites

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta u} = \lim_{w \to u} \frac{\mathbf{r}(w, v) - \mathbf{r}(u, v)}{w - u} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta v} = \lim_{w \to v} \frac{\mathbf{r}(u, w) - \mathbf{r}(u, v)}{w - v} \tag{8}$$

**► Exemplo 9** Obtenha as derivadas parciais da função vetorial $\mathbf{r}$ do Exemplo 8.

***Solução***

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}[u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}] = \mathbf{i} - 2u\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}[u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - u^2 - v^2)\mathbf{k}] = \mathbf{j} - 2v\mathbf{k} \quad ◄$$

## PLANOS TANGENTES A SUPERFÍCIES PARAMÉTRICAS

Nosso próximo objetivo é mostrar como encontrar planos tangentes a superfícies paramétricas. Seja $\sigma$ uma superfície paramétrica no espaço tridimensional e seja $P_0$ um ponto de $\sigma$. Dizemos que um plano é ***tangente*** a $\sigma$ em $P_0$ se, dada qualquer reta pelo ponto $P_0$, essa reta está no plano se, e somente se, é a reta tangente em $P_0$ a alguma curva contida em $\sigma$. Na Seção 13.7, mostramos que se $z = f(x, y)$, então o gráfico de $f$ tem um plano tangente em um ponto se $f$ for diferenciável nesse ponto. Está fora do objetivo deste livro determinar as condições precisas sob as quais uma superfície paramétrica possui um plano tangente em um ponto, portanto simplesmente passamos a admitir a existência de planos tangentes nos pontos que nos interessam e nos ocuparemos com a determinação de suas equações.

Suponhamos que a superfície paramétrica $\sigma$ seja o gráfico da função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ e que estejamos interessados no plano tangente no ponto $(x_0, y_0, z_0)$ da superfície que corresponde aos valores dos parâmetros $u = u_0$ e $v = v_0$; isto é

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

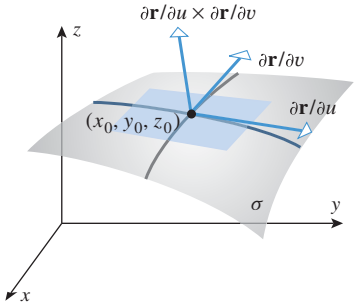


**Figura 14.4.12**

Se $v = v_0$ for mantido fixo e $u$ puder variar, então $\mathbf{r}(u, v_0)$ é uma função vetorial de uma variável, cujo gráfico é a curva de $v$ constante que passa pelo ponto $(u_0, v_0)$; similarmente, se $u = u_0$ for mantido fixo e $v$ puder variar, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ é uma função vetorial de uma variável, cujo gráfico é a curva de $u$ constante que passa pelo ponto $(u_0, v_0)$. Além do mais, segue da interpretação geométrica da derivada, desenvolvida na Seção 12.2, que se $\partial\mathbf{r}/\partial u \neq \mathbf{0}$ em $(u_0, v_0)$, então esse vetor é tangente à curva de $v$ constante no ponto $(u_0, v_0)$; e se $\partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ em $(u_0, v_0)$, então esse vetor é tangente à curva de $u$ constante no ponto $(u_0, v_0)$ (Figura 14.4.12). Assim, se $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ em $(u_0, v_0)$, então o vetor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{9}$$

é ortogonal a ambos os vetores tangentes no ponto $(u_0, v_0)$ e, portanto, é normal ao plano tangente e à superfície nesse ponto (Figura 14.4.12). Em vista disso, temos a seguinte definição.

**14.4.1 DEFINIÇÃO** Se uma superfície paramétrica $\sigma$ for o gráfico de $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ e se $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ em um ponto da superfície, então o ***vetor normal unitário principal*** à superfície naquele ponto será denotado por $\mathbf{n}$ ou $\mathbf{n}(u, v)$ e definido por

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \tag{10}$$

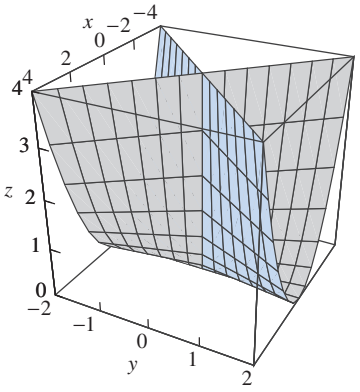



**Figura 14.4.13**

**► Exemplo 10** Encontre uma equação do plano tangente à superfície paramétrica

$$x = uv, \quad y = u, \quad z = v^2$$

no ponto em que $u = 2$ e $v = -1$. Essa superfície, denominada ***guarda-chuva de Whitney***, é um exemplo de superfície paramétrica que se autointersecta (Figura 14.4.13).

***Solução*** Começamos escrevendo as equações sob a forma vetorial

$$\mathbf{r} = uv\mathbf{i} + u\,\mathbf{j} + v^2\mathbf{k}$$

As derivadas parciais de $\mathbf{r}$ são

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) = v\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = u\mathbf{i} + 2v\mathbf{k}$$

e, em $u = 2$ e $v = -1$, essas derivadas parciais são

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(2, -1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(2, -1) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$$

Assim, por (9) e (10), uma normal à superfície nesse ponto é

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(2, -1) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(2, -1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Convença-se de que o resultado obtido no Exemplo 10 é consistente com a Figura 14.4.13.

Como qualquer normal é suficiente para determinar o plano tangente, faz sentido multiplicar o vetor por $-\frac{1}{2}$ e usar a normal mais simples $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Segue das equações paramétricas dadas que o ponto da superfície correspondente a $u = 2$ e $v = -1$ é $(-2, 2, 1)$, de modo que o plano tangente nesse ponto pode ser dado sob a forma ponto-normal como

$$(x + 2) + (y - 2) + (z - 1) = 0 \quad \text{ou} \quad x + y + z = 1 \quad \blacktriangleleft$$

**► Exemplo 11** A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pode ser descrita em coordenadas esféricas como $\rho = a$, e as fórmulas de conversão de coordenadas esféricas para retangulares da Tabela 11.8.1 podem, então, ser usadas para descrever a esfera como o gráfico da função vetorial

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen}\phi \cos\theta\mathbf{i} + a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + a\cos\phi\mathbf{k}$$

onde $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (verifique). Use essa função para mostrar que, em cada ponto da esfera, o plano tangente é perpendicular ao vetor posição.

***Solução*** Mostraremos que em cada ponto da esfera o vetor normal unitário $\mathbf{n}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{r}$ (e portanto, é paralelo a $\mathbf{r}$). Temos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\,\operatorname{sen}\theta & -a\operatorname{sen}\phi \\ -a\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & a\operatorname{sen}\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + a^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + a^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

e, portanto,

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{a^4\operatorname{sen}^4\phi\cos^2\theta + a^4\operatorname{sen}^4\phi\operatorname{sen}^2\theta + a^4\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4\operatorname{sen}^4\phi + a^4\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi}$$

$$= a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = a^2|\operatorname{sen}\phi| = a^2\operatorname{sen}\phi$$

Se $\phi \neq 0$ ou $\pi$, segue de (10) que

$$\mathbf{n} = \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} = \frac{1}{a}\mathbf{r}$$

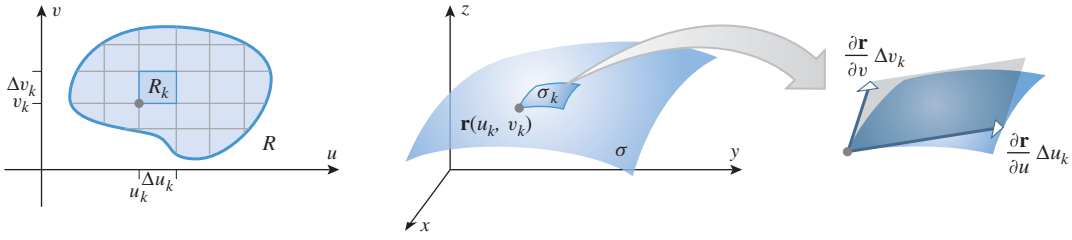
Além disso, os planos tangentes com $\phi = 0$ ou $\pi$ são horizontais e, com esses, $\mathbf{r} = \pm a\mathbf{k}$ certamente é normal. ◀

## ÁREA DE SUPERFÍCIE DE SUPERFÍCIES PARAMÉTRICAS

Agora, passamos à obtenção de uma fórmula para a área de superfície $S$ de uma superfície paramétrica $\sigma$. Seja $\sigma$ uma superfície paramétrica de equação vetorial

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

Nossa discussão é análoga à do caso de superfícies da forma $z = f(x, y)$. Aqui, $R$ será uma região do plano $uv$ que subdividimos em $n$ regiões retangulares conforme mostra a Figura 14.4.14*a*. Seja $R_k$ a $k$-ésima região retangular e denotemos sua área por $\Delta A_k$. A porção $\sigma_k$ é a imagem de $R_k$ por $\sigma$. A porção terá um vértice em $\mathbf{r}(u_k, v_k)$; denotemos a área de $\sigma_k$ por $\Delta S_k$ (Figura 14.4.14*b*).




(*a*) (*b*) (*c*)

**Figura 14.4.14**

Lembre que no caso $z = f(x, y)$ aproximamos a área da porção pela área de um paralelogramo no plano tangente à superfície. No caso paramétrico, esse paralelogramo é gerado pelos vetores tangentes

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u_k \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v_k$$

em que as derivadas parciais são calculadas em $(u_k, v_k)$ (Figura 14.4.14*c*). Assim,

$$\Delta S_k \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u_k \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v_k \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u_k \Delta v_k = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta A_k \qquad (11)$$

A área de superfície da superfície inteira é a soma das áreas $\Delta S_k$. Supondo que os erros das aproximações em (11) tendam para zero quando $n$ aumenta de tal maneira que as dimensões dos retângulos $R_k$ tendam para zero, então é plausível que o valor exato de $S$ seja

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta A_k$$

ou, de maneira equivalente,

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA \qquad (12)$$

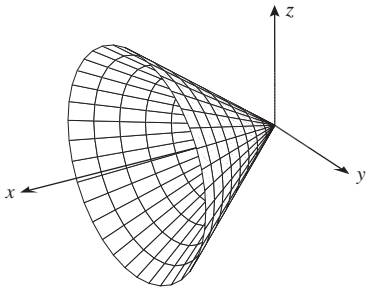


**Figura 14.4.15**

► **Exemplo 12** Segue de (6) que as equações paramétricas

$$x = u, \quad y = u\cos v, \quad z = u \operatorname{sen} v$$

representam o cone que resulta quando a reta $y = x$ do plano $xy$ é girada em torno do eixo $x$. Use a Fórmula (12) para determinar a área de superfície da parte do cone com a qual $0 \le u \le 2$ e $0 \le v \le 2\pi$ (Figura 14.4.15).

***Solução*** A superfície pode ser representada em forma vetorial como

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + u\cos v\mathbf{j} + u \operatorname{sen} v\mathbf{k} \quad (0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi)$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + \cos v\mathbf{j} + \operatorname{sen} v\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\cos v\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & \cos v & \operatorname{sen} v \\ 0 & -u \operatorname{sen} v & u\cos v \end{vmatrix} = u\mathbf{i} - u\cos v\mathbf{j} - u \operatorname{sen} v\mathbf{k}$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{u^2 + (-u\cos v)^2 + (-u \operatorname{sen} v)^2} = |u|\sqrt{2} = u\sqrt{2}$$

Então, por (12),

$$S = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{2}u \, du \, dv = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} dv = 4\pi\sqrt{2} \quad ◄$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.4 (*Ver página 1039 para respostas.*)

**1.** A área de superfície de uma superfície da forma $z = f(x, y)$ sobre a região $R$ do plano $xy$ é dada por

$$S = \iint_R _____ \, dA$$

**2.** Considere a superfície representada parametricamente por

$$x = 1 - u$$
$$y = (1 - u)\cos v \qquad (0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi)$$
$$z = (1 - u) \operatorname{sen} v$$

(a) Descreva as curvas de $u$ constante.
(b) Descreva as curvas de $v$ constante.

**3.** Se

$$\mathbf{r}(u, v) = (1 - u)\mathbf{i} + [(1 - u)\cos v]\mathbf{j} + [(1 - u)\operatorname{sen} v]\mathbf{k}$$

então

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = _____ \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = _____$$

**4.** Se

$$\mathbf{r}(u, v) = (1 - u)\mathbf{i} + [(1 - u)\cos v]\mathbf{j} + [(1 - u)\operatorname{sen} v]\mathbf{k}$$

então o vetor normal unitário principal ao gráfico de $\mathbf{r}$ no ponto em que $u = 1/2$ e $v = \pi/6$ é dado por _____.

**5.** Seja $\sigma$ a superfície paramétrica de equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

Se $\sigma$ não tem autointerseções e é lisa em uma região $R$ do plano $uv$, então a área de superfície de $\sigma$ é dada por

$$S = \iint_R _____ \, dA$$

## EXERCÍCIOS 14.4 Recurso Gráfico C CAS

**1-4** Expresse a área da superfície dada como uma integral dupla iterada e, depois, encontre a área de superfície. ■

**1.** A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está acima do retângulo $R = \{(x, y): 0 \le x \le 2, -3 \le y \le 3\}$.

**2.** A parte do plano $2x + 2y + z = 8$ no primeiro octante.

**3.** A parte do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ que está acima da região do primeiro quadrante limitada pela reta $y = x$ e a parábola $y = x^2$.

**4.** A parte da superfície $z = 2x + y^2$ acima da região triangular de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$.

**5-10** Expresse a área da superfície dada como uma integral dupla iterada em coordenadas polares e, depois, encontre a área de superfície. ■

**5.** A parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

**6.** A parte do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano $xy$.

**7.** A parte da superfície $z = xy$ que fica acima do setor do primeiro quadrante delimitado pelas retas $y = x/\sqrt{3}$, $y = 0$ e o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

**8.** A parte do paraboloide $2z = x^2 + y^2$ que fica dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 8$.

**9.** A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que fica entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

**10.** A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ que fica dentro do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**11-12** Faça um esboço da superfície paramétrica. ■

**11.** (a) $x = u,\ y = v,\ z = \sqrt{u^2 + v^2}$
(b) $x = u,\ y = \sqrt{u^2 + v^2},\ z = v$
(c) $x = \sqrt{u^2 + v^2},\ y = u,\ z = v$

**12.** (a) $x = u, \quad y = v, \quad z = u^2 + v^2$
(b) $x = u, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = v$
(c) $x = u^2 + v^2, \quad y = u, \quad z = v$

**13-14** Determine uma representação paramétrica da superfície em termos dos parâmetros $u = x$ e $v = y$. ■

**13.** (a) $2z - 3x + 4y = 5$ (b) $z = x^2$

**14.** (a) $z + zx^2 - y = 0$ (b) $y^2 - 3z = 5$

**15.** (a) Encontre equações paramétricas para a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 5$ compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = 1$.
(b) Encontre equações paramétricas para a parte do cilindro $x^2 + z^2 = 4$ compreendida entre os planos $y = 1$ e $y = 3$.

**16.** (a) Encontre equações paramétricas para a parte do plano $x + y = 1$ compreendida entre os planos $z = -1$ e $z = 1$.
(b) Encontre equações paramétricas para a parte do plano $y - 2z = 5$ compreendida entre os planos $x = 0$ e $x = 3$.

**17.** Encontre equações paramétricas para a superfície gerada pela revolução da curva $y = \operatorname{sen} x$ em torno do eixo $x$.

**18.** Encontre equações paramétricas para a superfície gerada pela revolução da curva $y - e^x = 0$ em torno do eixo $x$.

**19-24** Determine uma representação paramétrica da superfície em função dos parâmetros $r$ e $\theta$, onde $(r, \theta, z)$ são as coordenadas cilíndricas de um ponto na superfície. ■

**19.** $z = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ **20.** $z = e^{-(x^2+y^2)}$

**21.** $z = 2xy$ **22.** $z = x^2 - y^2$

**23.** A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ sobre ou acima do plano $z = 2$.

**24.** A parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre ou abaixo do plano $z = 3$.

**25.** Determine uma representação paramétrica do cone

$$z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$$

em função dos parâmetros $\rho$ e $\theta$, onde $(\rho, \theta, \phi)$ são as coordenadas esféricas de um ponto na superfície.

**26.** Descreva o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ em função dos parâmetros $\theta$ e $\phi$, onde $(\rho, \theta, \phi)$ são as coordenadas esféricas de um ponto na superfície.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**27-32** Elimine os parâmetros para obter uma equação em coordenadas retangulares e descreva a superfície. ■

**27.** $x = 2u + v, y = u - v, z = 3v$ para $-\infty < u < +\infty$ e $-\infty < v < +\infty$.

**28.** $x = u \cos v, y = u^2, z = u \operatorname{sen} v$ para $0 \le u \le 2$ e $0 \le v < 2\pi$.

**29.** $x = 3 \operatorname{sen} u, y = 2 \cos u, z = 2v$ para $0 \le u < 2\pi$ e $1 \le v \le 2$.

**30.** $x = \sqrt{u} \cos v, y = \sqrt{u} \operatorname{sen} v, z = u$ para $0 \le u \le 4$ e $0 \le v < 2\pi$.

**31.** $\mathbf{r}(u, v) = 3u \cos v\mathbf{i} + 4u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$ para $0 \le u \le 1$ e $0 \le v < 2\pi$.

**32.** $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + 3 \cos u\mathbf{k}$ para $0 \le u \le \pi$ e $0 \le v < 2\pi$.

**33.** A figura a seguir mostra os gráficos de duas representações paramétricas do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $0 \le z \le 2$.

(a) Encontre equações paramétricas que produzam duplicatas razoáveis dessas superfícies.

(b) Use um recurso gráfico para verificar sua resposta da parte (a).

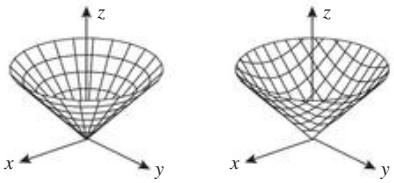



**Figura Ex-33**

**34.** A figura abaixo mostra os gráficos de duas representações paramétricas do paraboloide $z = x^2 + y^2$ para $0 \le z \le 2$.

(a) Encontre equações paramétricas que produzam duplicatas razoáveis dessas superfícies.

(b) Use um recurso gráfico para verificar sua resposta da parte (a).

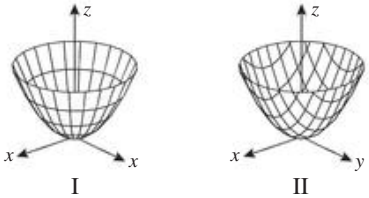
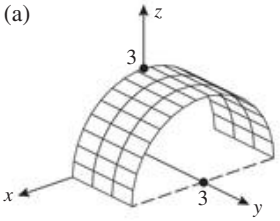


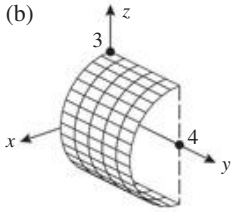

**Figura Ex-34**

**35.** Em cada parte, a figura mostra uma porção da superfície paramétrica $x = 3 \cos v, y = u, z = 3 \operatorname{sen} v$. Encontre restrições de $u$ e $v$ que produzam a superfície e verifique sua resposta com um recurso gráfico

(a)

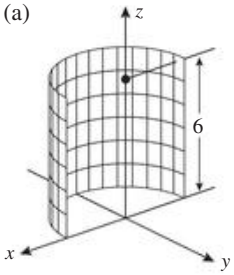



(b)

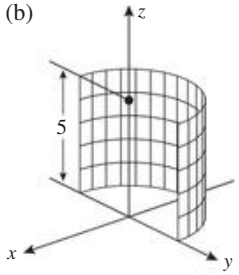



**36.** Em cada parte, a figura mostra uma porção da superfície paramétrica $x = 3 \cos v, y = 3 \operatorname{sen} v, z = u$. Encontre restrições de $u$ e $v$ que produzam a superfície e verifique sua resposta com um recurso gráfico.

(a)

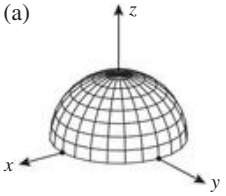



(b)

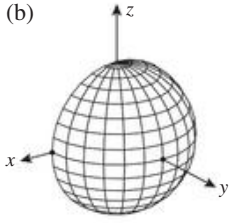



**37.** Em cada parte, a figura mostra um hemisfério que é parte da esfera $x = \operatorname{sen} \phi \cos \theta, y = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, z = \cos \phi$. Encontre restrições de $\phi$ e $\theta$ que produzam o hemisfério e verifique sua resposta com um recurso gráfico.

(a)

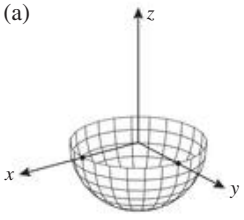



(b)

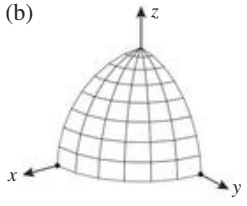



**38.** Em cada parte, a figura mostra uma parte da esfera $x = \operatorname{sen} \phi \cos \theta, y = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, z = \cos \phi$. Encontre restrições de $\phi$ e $\theta$ que produzam a superfície e verifique sua resposta com um recurso gráfico.

(a)




(b)



**39-44** Encontre uma equação para o plano tangente da superfície paramétrica no ponto dado. ■

**39.** $x = u,\ y = v,\ z = u^2 + v^2$; (1, 2, 5)

**40.** $x = u^2,\ y = v^2,\ z = u + v$; (1, 4, 3)

**41.** $x = 3v \operatorname{sen} u,\ y = 2v \cos u,\ z = u^2$; (0, 2, 0)

**42.** $\mathbf{r} = uv\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + (u + v)\mathbf{k};\ u = 1, v = 2$

**43.** $\mathbf{r} = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + v\mathbf{k};\ u = 1/2, v = \pi/4$

**44.** $\mathbf{r} = uv\mathbf{i} + ue^v\mathbf{j} + ve^u\mathbf{k};\ u = \ln 2, v = 0$

**45-46** Encontre a área da superfície dada. ■

**45.** A parte do paraboloide

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$$

para a qual $1 \le u \le 2, 0 \le v \le 2\pi$.

**46.** A parte do cone

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

para a qual $0 \le u \le 2v, 0 \le v \le \pi/2$.

**47-50 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**47.** Se $f$ tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas no interior de uma região $R$ do plano $xy$, então a área de superfície da superfície $z = f(x, y)$ sobre $R$ será

$$\iint_R \sqrt{[f(x, y)]^2 + 1}\, dA$$

**48.** Suponha que $z = f(x, y)$ tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas no interior de uma região $R$ do plano $xy$ e denote $\mathbf{q} = \langle 1, 0, \partial z/\partial x\rangle$ e $\mathbf{r} = \langle 0, 1, \partial z/\partial y\rangle$. Então a área de superfície da superfície $z = f(x, y)$ sobre $R$ é

$$\iint_R \|\mathbf{q} \times \mathbf{r}\|\, dA$$

**49.** Se $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ for tal que $\partial\mathbf{r}/\partial u$ e $\partial\mathbf{r}/\partial v$ sejam vetores não nulos em $(u_0, v_0)$, então

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

é normal ao gráfico de $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ em $(u_0, v_0)$.

**50.** Para a função $f(x, y) = ax + by$, a área da superfície $z = f(x, y)$ sobre um retângulo $R$ do plano $xy$ é o produto de $\|\langle 1, 0, a\rangle \times \langle 0, 1, b\rangle\|$ pela área de $R$.

**51.** Use equações paramétricas para deduzir a fórmula da área da superfície de uma esfera de raio $a$.

**52.** Use equações paramétricas para deduzir a fórmula da área da superfície lateral de um cilindro circular reto de raio $r$ e altura $h$.

**53.** A parte da superfície

$$z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \quad (a, h > 0)$$

entre o plano $xy$ e plano $z = h$ é um cone circular reto de altura $h$ e raio $a$. Use uma integral dupla para mostrar que a área da superfície lateral desse cone é $S = \pi a\sqrt{a^2 + h^2}$.

**54.** A figura abaixo mostra o ***toro*** gerado pela revolução do círculo

$$(x - a)^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < b < a)$$

do plano $xz$ em torno do eixo $z$.

(a) Mostre que esse toro pode ser expresso parametricamente como

$$x = (a + b \cos v) \cos u$$
$$y = (a + b \cos v) \operatorname{sen} u$$
$$z = b \operatorname{sen} v$$

onde $u$ e $v$ são os parâmetros mostrados na figura e $0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 2\pi$.

(b) Use um recurso gráfico para gerar um toro.

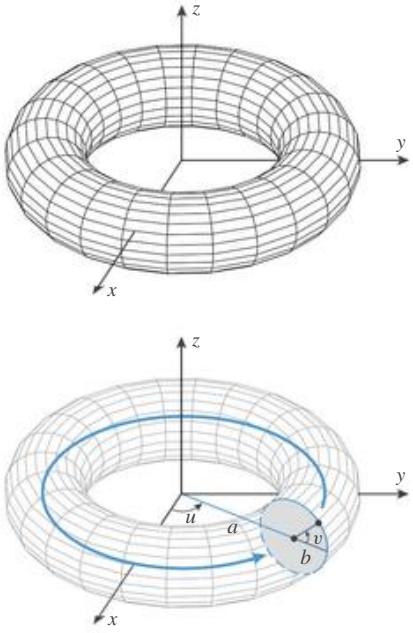



**Figura Ex-54**

**55.** Calcule a área da superfície do toro do Exercício 54(a).

**56.** Use um CAS para gerar o gráfico do ***helicoide***

$$x = u \cos v,\ y = u \operatorname{sen} v,\ z = v$$

com $0 \le u \le 5$ e $0 \le v \le 4\pi$ (ver figura a seguir) e depois use a operação de integração dupla numérica do CAS para aproximar a área da superfície.

**57.** Use um CAS para gerar o gráfico da ***pseudoesfera***

$$x = \cos u \operatorname{sen} v$$
$$y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$
$$z = \cos v + \ln\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2}\right)$$

com $0 \le u \le 2\pi$ e $0 < v < \pi$ (ver figura a seguir) e depois use a operação de integração dupla numérica do CAS para aproximar a área da superfície compreendida pelos planos $z = -1$ e $z = 1$.

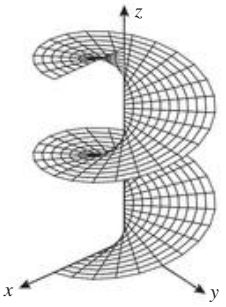



Figura Ex-56

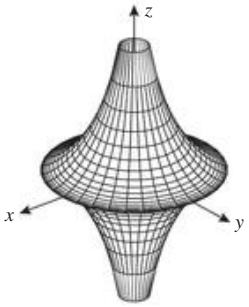



Figura Ex-57

**58.** (a) Obtenha equações paramétricas para a superfície de revolução gerada pela revolução da curva $z = f(x)$ do plano $xz$ em torno do eixo $z$.

(b) Use o resultado obtido na parte (a) para determinar equações paramétricas para a superfície de revolução gerada pela revolução da curva $z = 1/x^2$ do plano $xz$ em torno do eixo $z$.

(c) Use um recurso computacional gráfico para verificar seu trabalho traçando o gráfico da superfície paramétrica.

**59-61** As equações paramétricas nestes exercícios representam uma superfície quadrática com valores positivos de $a$, $b$ e $c$. Identifique o tipo de superfície eliminando os parâmetros $u$ e $v$. Verifique sua conclusão escolhendo valores específicos para as constantes e gerando a superfície com um recurso gráfico. ■

**59.** $x = a \cos u \cos v,\ y = b \operatorname{sen} u \cos v,\ z = c \operatorname{sen} v$

**60.** $x = a \cos u \cosh v,\ y = b \operatorname{sen} u \cosh v,\ z = c \operatorname{senh} v$

**61.** $x = a \operatorname{senh} v,\ y = b \operatorname{senh} u \cosh v,\ z = c \cosh u \cosh v$

**62.** **Texto** Antigamente, uma abordagem popular para a definição de área de superfície era tomar o limite de áreas de superfícies de poliedros inscritos, mas, em 1890, H. A. Schwartz publicou um exemplo em que essa abordagem falha. No artigo "Área de Superfície e o Paradoxo da Área do Cilindro" (em inglês) da revista *Two Year College Mathematics Journal*, Vol 8, No 4, Setembro 1977, p. 207-2011, a autora Frieda Zames discute o exemplo de Schwartz. Leia o artigo e escreva uma resenha sobre ele.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.4

**1.** $\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$ **2.** (a) As curvas de $u$ constante são círculos de raio $1 - u$ centrados em $(1 - u, 0, 0)$ e paralelos ao plano $xy$

(b) As curvas de $v$ constante são segmentos de reta ligando os pontos $(1, \cos v, \operatorname{sen} v)$ e $(0, 0, 0)$.

**3.** $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -\mathbf{i} - (\cos v)\mathbf{j} - (\operatorname{sen} v)\mathbf{k};\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -[(1-u)\operatorname{sen} v]\mathbf{j} + [(1-u)\cos v]\mathbf{k}$ **4.** $\dfrac{1}{\sqrt{8}}(-2\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + \mathbf{k})$ **5.** $\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|$

# 14.5 INTEGRAIS TRIPLAS

*Nas seções anteriores, definimos e discutimos as propriedades das integrais duplas para funções de duas variáveis. Nesta seção, definiremos as integrais triplas para funções de três variáveis.*

## ■ DEFINIÇÃO DE UMA INTEGRAL TRIPLA

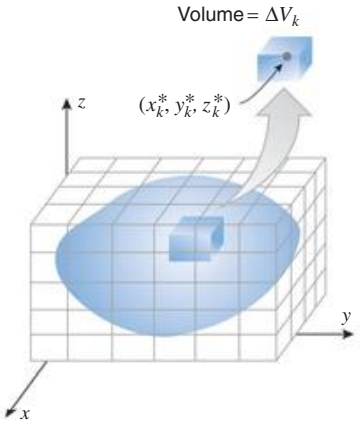



Figura 14.5.1

Uma integral simples de uma função $f(x)$ é definida em um intervalo fechado finito do eixo $x$, e uma integral dupla de uma função $f(x, y)$ é definida em uma região fechada finita $R$ do plano $xy$. Nosso primeiro objetivo, nesta seção, é definir qual o significado da *integral tripla* de $f(x, y, z)$ em uma região sólida fechada $G$ de um sistema de coordenadas $xyz$. Para assegurar que $G$ não se estenda indefinidamente em alguma direção, vamos supor que ela possa ser abarcada por uma caixa apropriadamente grande, cujos lados sejam paralelos aos planos coordenados (Figura 14.5.1). Nesse caso, dizemos que $G$ é um ***sólido finito***.

Para definir a integral tripla de $f(x, y, z)$ em $G$, primeiro dividimos a caixa em $n$ "subcaixas" por meio de planos paralelos aos planos coordenados. Depois, descartamos as subcaixas que contenham quaisquer pontos fora de $G$ e escolhemos um ponto arbitrário em cada uma das subcaixas restantes. Como mostrado na Figura 14.5.1, denotamos o volume da $k$-ésima subcaixa restante por $\Delta V_k$ e o ponto selecionado na $k$-ésima subcaixa por $(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$. Em seguida, formamos o produto

$$f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

para cada subcaixa, depois somamos os produtos para todas as subcaixas para obter a ***soma de Riemann***

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

Finalmente, repetimos esse processo com cada vez mais subdivisões, de tal maneira que o comprimento, a largura e a altura de cada subcaixa tendam para zero e $n$ tenda para $+\infty$. O limite

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k \tag{1}$$

é denominado ***integral tripla*** de $f(x, y, z)$ na região $G$. As condições sob as quais existe a integral tripla são estudadas em Cálculo avançado. Entretanto, para os nossos propósitos, é suficiente dizer que a existência é assegurada quando $f$ for contínua em $G$ e a região $G$ não for muito "complicada".

## PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS TRIPLAS

As integrais triplas gozam de muitas das propriedades das integrais simples e duplas:

$$\iiint_G cf(x, y, z)\, dV = c \iiint_G f(x, y, z)\, dV \quad (c \text{ uma constante})$$

$$\iiint_G [f(x, y, z) + g(x, y, z)]\, dV = \iiint_G f(x, y, z)\, dV + \iiint_G g(x, y, z)\, dV$$

$$\iiint_G [f(x, y, z) - g(x, y, z)]\, dV = \iiint_G f(x, y, z)\, dV - \iiint_G g(x, y, z)\, dV$$

Além disso, se a região $G$ for subdividida em duas sub-regiões $G_1$ e $G_2$ (Figura 14.5.2), então

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint_{G_2} f(x, y, z)\, dV$$

Omitimos as provas.

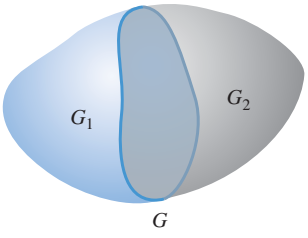



**Figura 14.5.2**

## CÁLCULO DE INTEGRAIS TRIPLAS EM CAIXAS RETANGULARES

Assim como as integrais duplas podem ser calculadas por duas integrações simples sucessivas, as integrais triplas podem ser calculadas por três integrações sucessivas. O seguinte teorema, que enunciamos sem demonstrar, é o análogo do Teorema 14.1.3.

**14.5.1 TEOREMA** (***Teorema de Fubini****) *Seja $G$ a caixa retangular definida pelas desigualdades*

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \quad k \le z \le l$$

*Se $f$ for contínua na região $G$, então*

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx \tag{2}$$

*Além disso, a integral iterada do membro direito pode ser substituída por qualquer uma das outras cinco integrais iteradas resultantes da alteração da ordem de integração.*

Há duas ordens de integração possíveis para as integrais iteradas no Teorema 14.1.3:

$$dx\, dy, \quad dy\, dx$$

Para as integrais iteradas do Teorema 14.5.1 existem seis ordens de integração possíveis:

$$dx\, dy\, dz, \quad dy\, dz\, dx, \quad dz\, dx\, dy,$$
$$dx\, dz\, dy, \quad dz\, dy\, dx, \quad dy\, dx\, dz$$

* Ver biografia de Fubini à p. 1005.

**► Exemplo 1** Calcule a integral tripla

$$\iiint_G 12xy^2z^3\,dV$$

na caixa retangular $G$ definida pelas desigualdades $-1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 2$.

***Solução*** Dentre as seis possíveis integrais iteradas que podemos usar, escolhemos a que aparece em (2). Assim, primeiramente integramos em relação a $z$, mantendo $x$ e $y$ fixados, depois em relação a $y$, mantendo $x$ fixado e, finalmente, em relação a $x$.

$$\begin{aligned}\iiint_G 12xy^2z^3\,dV &= \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}\int_{0}^{2} 12xy^2z^3\,dz\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}\left[3xy^2z^4\right]_{z=0}^{2}\,dy\,dx = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3} 48xy^2\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{2}\left[16xy^3\right]_{y=0}^{3}\,dx = \int_{-1}^{2} 432x\,dx \\ &= 216x^2\Big]_{-1}^{2} = 648 \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

## ■ CÁLCULO DE INTEGRAIS TRIPLAS EM REGIÕES MAIS GERAIS

Consideraremos a seguir como calcular integrais triplas em sólidos que não são caixas retangulares. Por enquanto, vamos limitar nossa discussão aos sólidos do tipo mostrado na Figura 14.5.3. Especificamente, supomos que o sólido $G$ seja limitado acima por uma superfície $z = g_2(x, y)$ e abaixo por uma superfície $z = g_1(x, y)$ e que a projeção do sólido no plano $xy$ seja uma região $R$ do tipo I ou do tipo II (ver Definição 14.2.1). Além disso, vamos supor que $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ sejam contínuas em $R$ e que $g_1(x, y) \le g_2(x, y)$ em $R$. Geometricamente, isso significa que as superfícies podem se tocar, mas não podem se intersectar. Chamamos um sólido desse tipo de ***sólido simples em xy***.

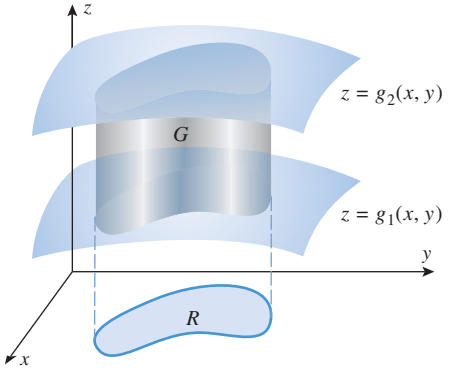



**Figura 14.5.3**

O seguinte teorema, que apresentamos sem prova, permite-nos calcular integrais triplas em sólidos simples em $xy$.

**14.5.2 TEOREMA** *Seja $G$ um sólido simples em $xy$ com superfície superior $z = g_2(x, y)$ e superfície inferior $z = g_1(x, y)$, e seja $R$ a projeção de $G$ no plano $xy$. Se $f(x, y, z)$ for contínua em $G$, então*

$$\iiint_G f(x, y, z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right] dA \tag{3}$$

Em (3), a primeira integração é em relação a $z$, restando, assim, uma função de $x$ e $y$. Essa função de $x$ e $y$ é, então, integrada na região $R$ do plano $xy$. Para aplicar (3), é útil começar com um esboço tridimensional do sólido $G$. Os limites de integração podem ser obtidos a partir do esboço como segue:

***Determinação dos Limites de Integração: Sólido Simples em xy***

**Passo 1** Encontre uma equação $z = g_2(x, y)$ para a superfície superior e uma equação $z = g_1(x, y)$ para a superfície inferior de $G$. As funções $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ determinam os limites de integração inferior e superior de $z$.

**Passo 2** Faça um esboço bidimensional da projeção $R$ do sólido no plano $xy$. Neste esboço, determine os limites de integração para a integral dupla em $R$ de (3).

**▶ Exemplo 2** Seja $G$ a cunha no primeiro octante seccionada do sólido cilíndrico $y^2 + z^2 \leq 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 0$. Calcule

$$\iiint_G z\,dV$$

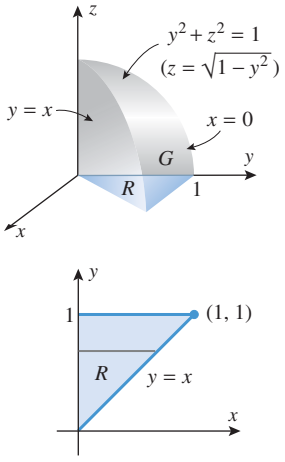



**Figura 14.5.4**

***Solução*** O sólido $G$ e sua projeção $R$ no plano $xy$ são mostrados na Figura 14.5.4. A superfície superior do sólido é formada pelo cilindro e a superfície inferior, pelo plano $xy$. Como a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que fica acima do plano $xy$ tem por equação $z = \sqrt{1 - y^2}$ e a equação do plano $xy$ é $z = 0$, segue de (3) que

$$\iiint_G z\,dV = \iint_R \left[ \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\,dz \right] dA \tag{4}$$

Para a integral dupla em $R$, as integrações em $x$ e $y$ podem ser feitas em qualquer ordem, visto que $R$ é uma região tanto do tipo I como do tipo II. Integremos, primeiramente, em relação a $x$. Com essa escolha, segue de (4) que:

$$\iiint_G z\,dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\,dz\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2}z^2 \Big]_{z=0}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2}(1 - y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - y^2)x \Big]_{x=0}^{y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y - y^3)\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{1}{8} \quad ◀$$

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

A maioria dos sistemas algébricos computacionais possui uma capacidade integrada para calcular integrais triplas iteradas. Se o leitor dispuser de um CAS, leia a documentação pertinente e use o CAS para conferir os Exemplos 1 e 2.

## VOLUME CALCULADO COMO UMA INTEGRAL TRIPLA

As integrais triplas têm muitas interpretações físicas, algumas das quais consideraremos na Seção 14.8. Entretanto, no caso especial em que $f(x, y, z) = 1$, a Fórmula (1) dá

$$\iiint_G dV = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

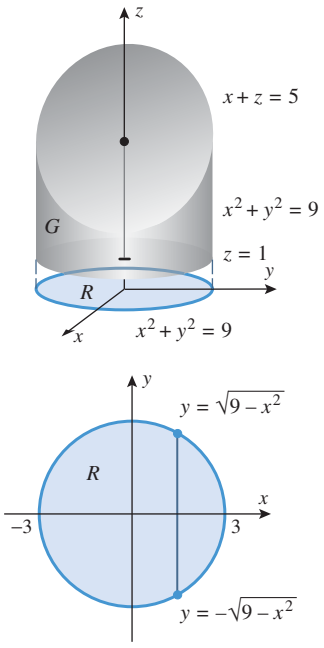



**Figura 14.5.5**

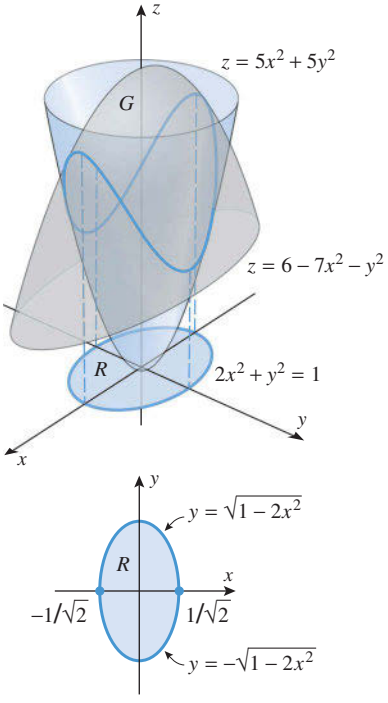



**Figura 14.5.6**

que a Figura 14.5.1 sugere ser o volume de $G$; isto é,

$$\text{volume de } G = \iiint_G dV \tag{5}$$

► **Exemplo 3** Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido contido no cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e entre os planos $z = 1$ e $x + z = 5$.

***Solução*** O sólido $G$ e sua projeção $R$ no plano $xy$ são mostrados na Figura 14.5.5. A superfície inferior do sólido é o plano $z = 1$ e a superfície superior é o plano $x + z = 5$ ou, de modo equivalente, $z = 5 - x$. Assim, de (3) e (5)

$$\text{volume de } G = \iiint_G dV = \iint_R \left[ \int_1^{5-x} dz \right] dA \tag{6}$$

Para a integral dupla em $R$, integraremos, primeiramente, em relação a $y$. Assim, segue de (6) que

$$\text{volume de } G = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_1^{5-x} dz\, dy\, dx = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} z \Big]_{z=1}^{5-x} dy\, dx$$

$$= \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (4 - x)\, dy\, dx = \int_{-3}^{3} (8 - 2x)\sqrt{9 - x^2}\, dx$$

$$= 8 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx - \int_{-3}^{3} 2x\sqrt{9 - x^2}\, dx$$

Para a primeira integral, ver Fórmula (3) da Seção 7.4, no Volume 1.

$$= 8\left(\frac{9}{2}\pi\right) - \int_{-3}^{3} 2x\sqrt{9 - x^2}\, dx$$

A segunda integral é nula porque é uma função ímpar.

$$= 8\left(\frac{9}{2}\pi\right) - 0 = 36\pi \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 4** Calcule o volume do sólido delimitado pelos paraboloides

$$z = 5x^2 + 5y^2 \quad \text{e} \quad z = 6 - 7x^2 - y^2$$

***Solução*** O sólido $G$ e sua projeção $R$ no plano $xy$ são mostrados na Figura 14.5.6. A projeção $R$ é obtida resolvendo as equações dadas simultaneamente para determinar onde os paraboloides se intersectam. Obtemos

$$5x^2 + 5y^2 = 6 - 7x^2 - y^2$$

ou

$$2x^2 + y^2 = 1 \tag{7}$$

que nos diz que os paraboloides se intersectam em uma curva no cilindro elíptico dado por (7).

A projeção dessa interseção no plano $xy$ é uma elipse com a mesma equação. Portanto,

$$\text{Volume de } G = \iiint_G dV = \iint_R \left[ \int_{5x^2+5y^2}^{6-7x^2-y^2} dz \right] dA$$

$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} \int_{5x^2+5y^2}^{6-7x^2-y^2} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} (6 - 12x^2 - 6y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \Big[ 6(1 - 2x^2)y - 2y^3 \Big]_{y=-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} dx$$

$$= 8 \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1 - 2x^2)^{3/2}\, dx = \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta\, d\theta = \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \quad \blacktriangleleft$$

Tome $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \theta$.

Use a fórmula do cosseno de Wallis ao final do livro.

## INTEGRAÇÃO EM OUTRAS ORDENS

Na Fórmula (3) para integração no sólido simples em $xy$, foi efetuada, primeiramente, a integração em $z$. Entretanto, há situações em que é preferível integrar em uma ordem diferente. Por exemplo, a Figura 14.5.7*a* mostra um ***sólido simples em xz***, e a Figura 14.5.7*b* mostra um ***sólido simples em yz***. Para um sólido simples em $xz$, geralmente é melhor integrar em relação a $y$ primeiro; e para um sólido simples em $yz$, geralmente é melhor integrar em relação a $x$ primeiro:

$$\underset{\substack{G \\ \text{sólido simples em } xz}}{\iiint} f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[ \int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA \tag{8}$$

$$\underset{\substack{G \\ \text{sólido simples em } yz}}{\iiint} f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[ \int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA \tag{9}$$

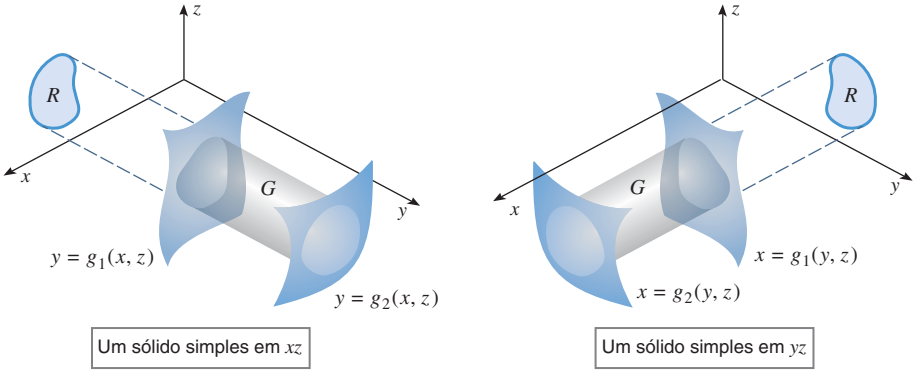



**Figura 14.5.7**

Às vezes, um sólido $G$ pode ser interpretado como um sólido simples em $xy$, $xz$ e $yz$ e, nesse caso, podemos escolher a ordem de integração de modo a simplificar os cálculos.

► **Exemplo 5** No Exemplo 2, calculamos

$$\iiint_G z\,dV$$

na cunha da Figura 14.5.4 integrando, primeiramente, em relação a $z$. Calcule essa integral integrando, primeiramente, em relação a $x$.

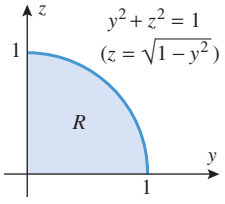



**Figura 14.5.8**

***Solução*** O sólido é limitado atrás pelo plano $x = 0$ e na frente pelo plano $x = y$, portanto

$$\iiint_G z\,dV = \iint_R \left[\int_0^y z\,dx\right] dA$$

onde $R$ é a projeção de $G$ no plano $yz$ (Figura 14.5.8). A integração em $R$ pode ser feita, primeiramente, em relação a $z$ e depois em relação a $y$ ou vice-versa. Efetuando, primeiramente a integração em $z$, obtemos

$$\iiint_G z\,dV = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^y z\,dx\,dz\,dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} zx\Big]_{x=0}^{y} dz\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} zy\,dz\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}z^2 y\Big]_{z=0}^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-y^2)y\,dy = \frac{1}{8}$$

o que está de acordo com o resultado do Exemplo 2. ◄

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.5 (*Ver página 1048 para respostas.*)

**1.** A integral iterada

$$\int_1^5 \int_2^4 \int_3^6 f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$$

integra $f$ na caixa retangular definida por

_____ $\le x \le$ _____, _____ $\le y \le$ _____, _____ $\le z \le$ _____.

**2.** Seja $G$ o sólido no primeiro octante limitado abaixo pela superfície $z = y + x^2$ e acima pelo plano $z = 4$. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

(a) $\displaystyle\iiint_G f(x, y, z)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{y+x^2}^{4} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$

(b) $\displaystyle\iiint_G f(x, y, z)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{y+x^2}^{4} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$

(c) $\displaystyle\iiint_G f(x, y, z)\,dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx$

**3.** O volume do sólido $G$ do Exercício 2 é _____.

## EXERCÍCIOS 14.5 C CAS

**1-8** Calcule a integral iterada. ■

**1.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$

**2.** $\displaystyle\int_{1/3}^{1/2} \int_0^{\pi} \int_0^1 zx \operatorname{sen} xy\,dz\,dy\,dx$

**3.** $\displaystyle\int_0^2 \int_{-1}^{y^2} \int_{-1}^{z} yz\,dx\,dz\,dy$

**4.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^1 \int_0^{x^2} x \cos y\,dz\,dx\,dy$

**5.** $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^x xy\,dy\,dx\,dz$

**6.** $\displaystyle\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} xe^y\,dy\,dz\,dx$

**7.** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-5+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2} x\,dz\,dy\,dx$

**8.** $\displaystyle\int_1^2 \int_z^2 \int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz$

**9-12** Calcule a integral tripla. ■

**9.** $\iiint_G xy \operatorname{sen} yz\, dV$, onde $G$ é a caixa retangular definida pelas desigualdades $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le \pi/6$.

**10.** $\iiint_G y\, dV$, onde $G$ é o sólido compreendido pelo plano $z = y$, o plano $xy$ e o cilindro parabólico $y = 1 - x^2$.

**11.** $\iiint_G xyz\, dV$, onde $G$ é o sólido do primeiro octante limitado pelo cilindro parabólico $z = 2 - x^2$ e os planos $z = 0$, $y = x$ e $y = 0$.

**12.** $\iiint_G \cos(z/y)\, dV$, onde $G$ é o sólido definido pelas desigualdades $\pi/6 \le y \le \pi/2$, $y \le x \le \pi/2$, $0 \le z \le xy$.

C **13.** Use a operação de integração tripla numérica de um CAS para aproximar

$$\iiint_G \frac{\sqrt{x + z^2}}{y}\, dV$$

onde $G$ é a caixa retangular definida pelas desigualdades $0 \le x \le 3$, $1 \le y \le 2$, $-2 \le z \le 1$.

C **14.** Use a operação de integração tripla numérica de um CAS para aproximar

$$\iiint_G e^{-x^2-y^2-z^2}\, dV$$

onde $G$ é a região esférica $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

**15-18** Use uma integral tripla para encontrar o volume do sólido. ■

**15.** O sólido do primeiro octante limitado pelos planos coordenados e o plano $3x + 6y + 4z = 12$.

**16.** O sólido limitado pela superfície $z = \sqrt{y}$ e os planos $x + y = 1$, $x = 0$ e $z = 0$.

**17.** O sólido limitado pela superfície $y = x^2$ e os planos $y + z = 4$ e $z = 0$.

**18.** A cunha do primeiro octante seccionada do cilindro $y^2 + z^2 \le 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 0$.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**19.** Seja $G$ o sólido delimitado pelas superfícies da figura a seguir. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

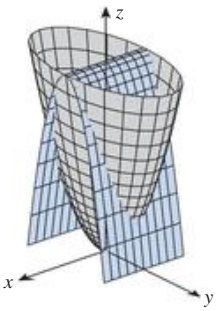
(a) $\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

(b) $\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

**20.** Seja $G$ o sólido delimitado pelas superfícies da figura a seguir. Preencha as lacunas com os extremos de integração que faltam.

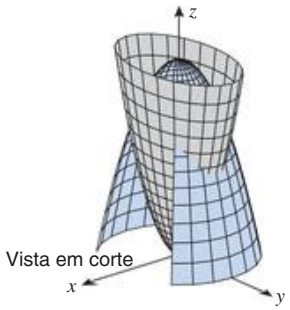
(a) $\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

(b) $\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$




$z = 4x^2 + y^2$
$z = 4 - 3y^2$

**Figura Ex-19**




$z = 3x^2 + y^2$
$z = 8 - x^2 - y^2$

**Figura Ex-20**

**21-24** Monte (mas não calcule) uma integral tripla iterada para o volume do sólido compreendido pelas superfícies dadas. ■

**21.** A superfície do Exercício 19.

**22.** A superfície do Exercício 20.

**23.** O cilindro elíptico $x^2 + 9y^2 = 9$ e os planos $z = 0$ e $z = x + 3$.

**24.** Os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.

**25-26** Faça um esboço do sólido cujo volume é dado pela integral. ■

**25.** (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{y+1} dz\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{9} \int_{0}^{y/3} \int_{0}^{\sqrt{y^2-9x^2}} dz\, dx\, dy$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{2} dy\, dz\, dx$

**26.** (a) $\displaystyle\int_{0}^{3} \int_{x^2}^{9} \int_{0}^{2} dz\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \int_{0}^{2-y} \int_{0}^{2-x-y} dz\, dx\, dy$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-y^2} \int_{0}^{2} dx\, dz\, dy$

**27-30 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**27.** Se $G$ for o sólido retangular definido por $1 \le x \le 3$, $2 \le y \le 5$, $-1 \le z \le 1$ e se $f(x, y, z)$ for contínua em $G$, então

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_1^3 \int_{-1}^1 \int_2^5 f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

**28.** Se $G$ for um sólido simples $xy$ e se $f(x, y, z)$ for contínua em $G$, então a integral tripla de $f$ em $G$ poderá ser expressa como uma integral iterada cuja integral mais externa é efetuada em relação a $z$.

**29.** Se $G$ for a porção da esfera unitária que está no primeiro octante, então

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

**30.** Se $G$ for um sólido simples $xy$ e se

$$\text{volume de } G = \iiint_G f(x, y, z)\, dV$$

então $f(x, y, z) = 1$ em cada ponto de $G$.

**31.** Seja $G$ a caixa retangular definida pelas desigualdades $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $k \le z \le l$. Mostre que

$$\iiint_G f(x)g(y)h(z)\, dV = \left[\int_a^b f(x)\, dx\right]\left[\int_c^d g(y)\, dy\right]\left[\int_k^l h(z)\, dz\right]$$

**32.** Use o resultado do Exercício 31 para calcular

(a) $\iiint_G xy^2 \operatorname{sen} z\, dV$, onde $G$ é o conjunto de pontos que satisfaz $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le \pi/2$.

(b) $\iiint_G e^{2x+y-z}\, dV$, onde $G$ é o conjunto de pontos que satisfaz $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \ln 3$, $0 \le z \le \ln 2$.

**33-36** O ***valor médio*** de uma função contínua $f(x, y, z)$ em um sólido $G$ é definido por

$$f_m = \frac{1}{V(G)} \iiint_G f(x, y, z)\, dV$$

onde $V(G)$ é o volume do sólido (compare com a definição anterior ao Exercício 61 da Seção 14.2). Use essa definição nestes exercícios. ■

**33.** Encontre o valor médio de $f(x, y, z) = x + y + z$ no tetraedro mostrado na figura.

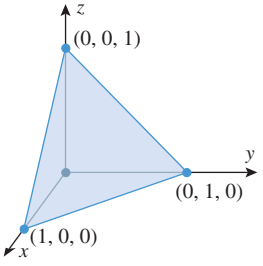



**Figura Ex-33**

**34.** Calcule o valor médio de $f(x, y, z) = xyz$ na região esférica $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

C **35.** Use a operação de integração tripla numérica de um CAS para aproximar a distância média da origem a um ponto do sólido no Exemplo 4.

C **36.** Seja $d(x, y, z)$ a distância do ponto $(z, z, z)$ ao ponto $(x, y, 0)$. Use a operação de integração tripla numérica de um CAS para aproximar o valor médio de $d$ com $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ e $0 \le z \le 1$. Redija um texto curto explicando por que esse valor pode ser considerado a distância média entre um ponto da diagonal de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ e um ponto da face no plano $xy$ do cubo unitário $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ e $0 \le z \le 1$.

**37.** Seja $G$ o tetraedro do primeiro octante limitado pelos planos coordenados e o plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

(a) Relacione seis integrais iteradas diferentes que representem o volume de $G$.

(b) Calcule qualquer uma das seis para mostrar que o volume de $G$ é $\frac{1}{6}abc$.

**38.** Use uma integral tripla para deduzir a fórmula do volume do elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

## ENFOCANDO CONCEITOS

**39-40** Expresse cada integral como uma integral equivalente em que a integração em $z$ é a primeira a ser feita, a em $y$ é a segunda e a em $x$ é a última. ■

**39.** (a) $\displaystyle\int_0^5 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

(b) $\displaystyle\int_0^9 \int_0^{3-\sqrt{x}} \int_0^z f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \int_y^{8-y} \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

**40.** (a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{\sqrt{9-y^2-z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

(b) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^2 \int_0^{x/2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{4-y} \int_0^{\sqrt{z}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

**41.** **Texto** Os primeiros passos iniciais seguintes podem ser usados para expressar uma integral tripla em um sólido $G$ como uma integral tripla iterada. Inicialmente, projete $G$ sobre um dos planos coordenados para obter uma região $R$ e, então, projete $R$ sobre um dos eixos coordenados. Descreva como esses passos poderiam ser usados para encontrar os limites de integração. Ilustre sua discussão com um exemplo.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.5

**1.** $3 \le x \le 6, 1 \le y \le 5, 2 \le z \le 4$ **2.** (a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \int_{y+x^2}^4 f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_{y+x^2}^4 f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{z-x^2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$ **3.** $\dfrac{128}{15}$

## 14.6 INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

*Vimos, na Seção 14.3, que algumas integrais duplas são mais fáceis de calcular em coordenadas polares do que em coordenadas retangulares. Analogamente, algumas integrais triplas são mais fáceis de calcular em coordenadas cilíndricas ou esféricas do que em coordenadas retangulares. Nesta seção, estudaremos as integrais triplas nesses sistemas de coordenadas.*

### INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Lembre-se de que, em coordenadas retangulares, a integral tripla de uma função contínua $f$ em uma região sólida $G$ é definida como

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$$

onde $\Delta V_k$ denota o volume de um paralelepípedo retangular no interior de $G$ e $(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ é um ponto desse paralelepípedo (ver Figura 14.5.1). As integrais triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas são definidas de maneira análoga, exceto que a região $G$ é dividida não em paralelepípedos retangulares, mas em regiões mais apropriadas a esses sistemas de coordenadas.

Em coordenadas cilíndricas, as equações mais simples são da forma

$$r = \text{constante}, \quad \theta = \text{constante}, \quad z = \text{constante}$$

A primeira equação representa um cilindro circular reto centrado no eixo $z$, a segunda, um semiplano vertical articulado no eixo $z$, e a terceira, um plano horizontal. (Ver Figura 11.8.3.) Essas superfícies podem ser combinadas para determinar sólidos chamados de ***cunhas cilíndricas*** ou ***elementos cilíndricos de volume***. Para sermos precisos, uma cunha cilíndrica é um sólido compreendido entre seis superfícies da seguinte forma:

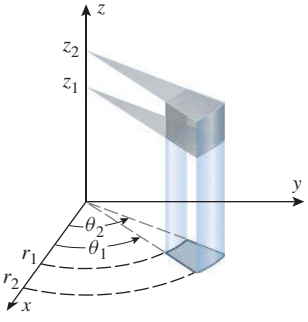



**Figura 14.6.1**

| | | |
|---|---|---|
| dois cilindros | $r = r_1, \quad r = r_2$ | $(r_1 < r_2)$ |
| dois semiplanos (verticais) | $\theta = \theta_1, \quad \theta = \theta_2$ | $(\theta_1 < \theta_2)$ |
| dois planos (horizontais) | $z = z_1, \quad z = z_2$ | $(z_1 < z_2)$ |

(Figura 14.6.1). As dimensões $\theta_2 - \theta_1$, $r_2 - r_1$ e $z_2 - z_1$ são chamadas de ***ângulo central***, ***espessura*** e ***altura*** da cunha.

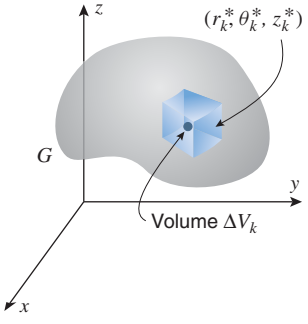



**Figura 14.6.2**

Para definir a integral tripla em $G$ de uma função $f(r, \theta, z)$ em coordenadas cilíndricas, procedemos da seguinte maneira:

- Subdivida $G$ em pedaços com um reticulado tridimensional consistindo em cilindros circulares concêntricos centrados no eixo $z$, semiplanos articulados no eixo $z$ e planos horizontais. Exclua da consideração todas as partes que contenham qualquer ponto fora de $G$, deixando, desse modo, somente cunhas cilíndricas que sejam subconjuntos de $G$.
- Suponha que haja $n$ tais cunhas cilíndricas e denote o volume da $k$-ésima cunha cilíndrica por $\Delta V_k$. Como indicado na Figura 14.6.2, seja $(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*)$ um ponto qualquer da $k$-ésima cunha cilíndrica.

- Repita esse processo para cada vez mais subdivisões de modo que, à medida que $n$ crescer, a altura, a espessura e o ângulo central das cunhas cilíndricas aproximem-se de zero. Defina

$$\iiint_G f(r,\theta,z)\,dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*,\theta_k^*,z_k^*)\Delta V_k \tag{1}$$

Para fins computacionais, é conveniente expressar (1) como uma integral iterada. Para isso, note que o volume $\Delta V_k$ da $k$-ésima cunha cilíndrica pode ser expresso como

$$\Delta V_k = [\text{área da base}] \cdot [\text{altura}] \tag{2}$$

Se denotarmos a espessura, o ângulo central e a altura dessa cunha por $\Delta r_k$, $\Delta\theta_k$ e $\Delta z_k$ e se escolhermos o ponto arbitrário $(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*)$ para ficar acima do "centro" da base (Figuras 14.3.6 e 14.6.3), segue-se, então, de (5) da Seção 14.3, que a base tem área $\Delta A_k = r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k$. Então, (2) pode ser escrita como

$$\Delta V_k = r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k\Delta z_k = r_k^*\Delta z_k\Delta r_k\Delta\theta_k$$

Substituindo essa expressão em (1), obtemos

$$\iiint_G f(r,\theta,z)\,dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*,\theta_k^*,z_k^*)r_k^*\Delta z_k\Delta r_k\Delta\theta_k$$

que sugere que a integral tripla em coordenadas cilíndricas possa ser calculada como uma integral iterada da forma

$$\iiint_G f(r,\theta,z)\,dV = \iiint_{\substack{\text{limites}\\ \text{apropriados}}} f(r,\theta,z)r\,dz\,dr\,d\theta \tag{3}$$

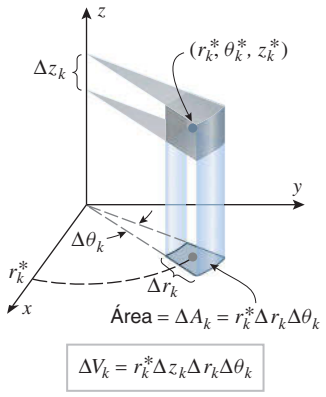



**Figura 14.6.3**

Observe o fator extra de $r$ que aparece no integrando na conversão da integral tripla para a integral iterada em coordenadas cilíndricas.

Nessa fórmula, a integração em relação a $z$ é feita primeiro, depois em relação a $r$ e, por fim, em relação a $\theta$, porém qualquer ordem de integração é permissível.

O seguinte teorema, que enunciamos sem provar, torna as ideias precedentes mais precisas.

**14.6.1 TEOREMA** *Seja $G$ um sólido cuja superfície superior tem equação $z = g_2(r,\theta)$ e cuja superfície inferior tem equação $z = g_1(r,\theta)$ em coordenadas cilíndricas. Se $R$ for a projeção do sólido no plano $xy$ e se $f(r,\theta,z)$ for contínua em $G$, então*

$$\iiint_G f(r,\theta,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,dz\right] dA \tag{4}$$

*em que a integral dupla em $R$ é calculada em coordenadas polares. Em particular, se a projeção de $R$ for como mostrado na Figura 14.6.4, então (4) pode ser escrita como*

$$\iiint_G f(r,\theta,z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)r\,dz\,dr\,d\theta \tag{5}$$

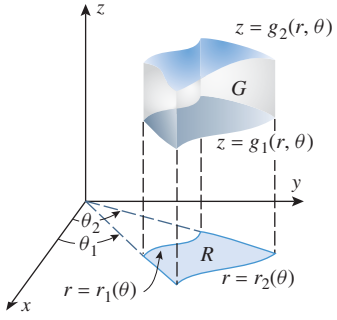



**Figura 14.6.4**

O tipo de sólido ao qual se aplica a Fórmula (5) é ilustrado na Figura 14.6.4. Para aplicar (4) e (5), é melhor começar com um esboço tridimensional do sólido $G$, do qual podem ser obtidos os limites de integração como segue:

***Determinação dos Limites de Integração: Coordenadas Cilíndricas***

**Passo 1** Identifique as superfícies superior $z = g_2(r, \theta)$ e inferior $z = g_1(r, \theta)$ do sólido. As funções $g_1(r, \theta)$ e $g_2(r, \theta)$ determinam os limites de integração em $z$. (Se as superfícies superior e inferior forem dadas em coordenadas retangulares, converta-as para coordenadas cilíndricas.)

**Passo 2** Faça um esboço bidimensional da projeção $R$ do sólido no plano $xy$. Os limites de integração $r$ e $\theta$ podem ser obtidos desse esboço exatamente como no caso das integrais duplas em coordenadas polares.

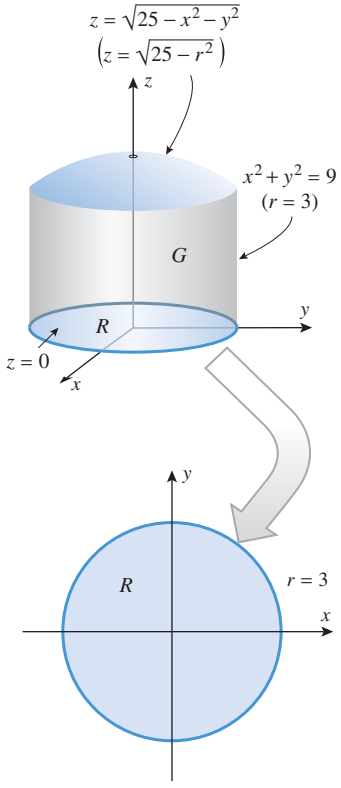



**Figura 14.6.5**

▶ **Exemplo 1** Use integração tripla em coordenadas cilíndricas para calcular o volume do sólido $G$ que é limitado acima pelo hemisfério $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, abaixo pelo plano $xy$ e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

***Solução*** O sólido $G$ e sua projeção $R$ no plano $xy$ são mostrados na Figura 14.6.5. Em coordenadas cilíndricas, a superfície superior de $G$ é o hemisfério $z = \sqrt{25 - r^2}$, e a superfície inferior é o plano $z = 0$. Assim, por (4), o volume de $G$ é

$$V = \iiint_G dV = \iint_R \left[ \int_0^{\sqrt{25-r^2}} dz \right] dA$$

Para a integral dupla em $R$, usamos coordenadas polares:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \left[ rz \right]_{z=0}^{\sqrt{25-r^2}} dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r\sqrt{25 - r^2}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{3}(25 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{3} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{61}{3}\, d\theta = \frac{122}{3}\pi \quad \blacktriangleleft$$

$u = 25 - r^2$
$du = -2r\, dr$

## ■ CONVERSÃO DE INTEGRAIS TRIPLAS DE COORDENADAS RETANGULARES PARA CILÍNDRICAS

Às vezes, uma integral tripla difícil de integrar em coordenadas retangulares pode ser calculada mais facilmente fazendo-se a substituição $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$ para convertê-la em uma integral em coordenadas cilíndricas. Com essa substituição, uma integral tripla retangular pode ser expressa como uma integral iterada em coordenadas cilíndricas por

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \iiint_{\substack{\text{limites} \\ \text{apropriados}}} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta \tag{6}$$

A ordem de integração no lado direito de (6) pode ser alterada, desde que os limites de integração sejam convenientemente ajustados.

▶ **Exemplo 2** Use coordenadas cilíndricas para calcular

$$\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2\, dz\, dy\, dx$$

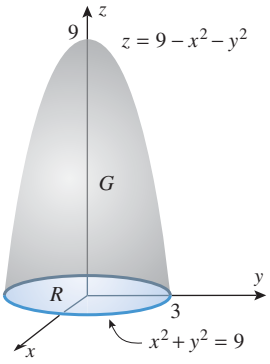



**Figura 14.6.6**

***Solução*** Em problemas desse tipo, é conveniente esboçar a região de integração $G$ e sua projeção $R$ no plano $xy$. Pelos limites de integração em $z$, a superfície superior de $G$ é o paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, e a superfície inferior é o plano $xy$ de equação $z = 0$. Pelos limites de integração em $x$ e $y$, a projeção $R$ é a região do plano $xy$ delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$ (Figura 14.6.6). Assim,

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2\,dz\,dy\,dx = \iiint_G x^2\,dV$$

$$= \iint_R \left[\int_0^{9-r^2} r^2\cos^2\theta\,dz\right] dA = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} (r^2\cos^2\theta)r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} r^3\cos^2\theta\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left[zr^3\cos^2\theta\right]_{z=0}^{9-r^2} dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (9r^3 - r^5)\cos^2\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{9r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\cos^2\theta\right]_{r=0}^{3} d\theta$$

$$= \frac{243}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{243}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{243\pi}{4} \quad \blacktriangleleft$$

## INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Em coordenadas esféricas, as equações mais simples são da forma

$$\rho = \text{constante}, \quad \theta = \text{constante}, \quad \phi = \text{constante}$$

Como indicado na Figura 11.8.4, a primeira equação representa uma esfera centrada na origem, a segunda, um semiplano articulado no eixo $z$ e a terceira, uma folha de um cone circular reto com seu vértice na origem e sua reta de simetria ao longo do eixo $z$ para $\phi \neq \pi/2$ e o plano $xy$ para $\phi = \pi/2$. Por uma ***cunha esférica*** ou ***elemento esférico de volume*** entendemos um sólido compreendido entre seis superfícies da seguinte forma:

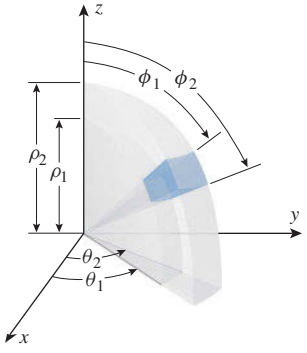



**Figura 14.6.7**

| | | | |
|---|---|---|---|
| duas esferas | $\rho = \rho_1$, | $\rho = \rho_2$ | $(\rho_1 < \rho_2)$ |
| dois semiplanos (verticais) | $\theta = \theta_1$, | $\theta = \theta_2$ | $(\theta_1 < \theta_2)$ |
| duas folhas de dois cones circulantes retos | $\phi = \phi_1$, | $\phi = \phi_2$ | $(\phi_1 < \phi_2)$ |

(Figura 14.6.7). Vamos referir-nos aos números $\rho_2 - \rho_1$, $\theta_2 - \theta_1$ e $\theta_2 - \theta_1$ como as ***dimensões*** de uma cunha esférica.

Se $G$ for uma região sólida no espaço tridimensional, então a integral tripla em $G$ de uma função contínua $f(\rho, \theta, \phi)$ em coordenadas esféricas é definida analogamente à integral tripla em coordenadas cilíndricas, exceto que o sólido $G$ é dividido em cunhas *esféricas* por um reticulado tridimensional consistindo em esferas com centro na origem, semiplanos articulados no eixo $z$ e folhas de cones circulares retos com vértices na origem e retas de simetria ao longo do eixo $z$ (Figura 14.6.8).

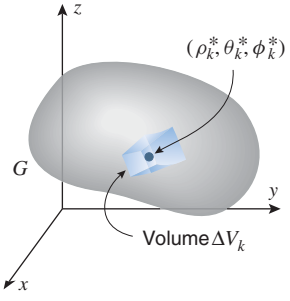



**Figura 14.6.8**

A equação que define uma integral tripla em coordenadas esféricas é

$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\,dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\rho_k^*,\theta_k^*,\phi_k^*)\Delta V_k \tag{7}$$

onde $\Delta V_k$ é o volume da $k$-ésima cunha esférica que está no interior de $G$, $(\rho_k^*, \theta_k^*, \phi_k^*)$ é um ponto arbitrário dessa cunha e $n$ cresce de tal maneira que as dimensões de cada cunha esférica interna tendam para zero.

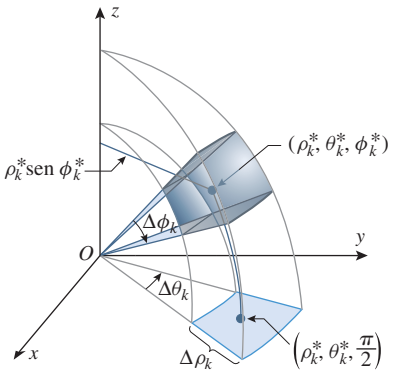



**Figura 14.6.9**

Observe o fator adicional de $\rho^2 \operatorname{sen} \phi$ que aparece no integrando quando convertemos uma integral tripla para uma integral tripla iterada em coordenadas esféricas. Isso é análogo ao fator adicional de $r$ que aparece na integral tripla em coordenadas cilíndricas.

É preferível expressar a integral de (7) como uma integral iterada, para finalidades computacionais. Nos exercícios, orientamos o leitor a mostrar que se o ponto $(\rho_k^*, \theta_k^*, \phi_k^*)$ for escolhido adequadamente, então o volume $\Delta V_k$ em (7) pode ser escrito como

$$\Delta V_k = \rho_k^{*2} \operatorname{sen} \phi_k^* \Delta\rho_k \Delta\phi_k \Delta\theta_k \tag{8}$$

onde $\Delta\rho_k$, $\Delta\phi_k$ e $\Delta\theta_k$ são as dimensões da cunha (Figura 14.6.9). Substituindo isso em (7), obtemos

$$\iiint_G f(\rho, \theta, \phi)\, dV = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\rho_k^*, \theta_k^*, \phi_k^*) \rho_k^{*2} \operatorname{sen} \phi_k^* \Delta\rho_k \Delta\phi_k \Delta\theta_k$$

o que sugere que uma integral tripla em coordenadas esféricas pode ser calculada como uma integral iterada da forma

$$\iiint_G f(\rho, \theta, \phi)\, dV = \iiint_{\substack{\text{limites} \\ \text{apropriados}}} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \tag{9}$$

O análogo do Teorema 14.6.1 para integrais triplas em coordenadas esféricas é de enunciado cansativo, portanto, em vez disso, vamos dar alguns exemplos que ilustram as técnicas para obter os limites de integração. Em todos os nossos exemplos, usaremos a mesma ordem de integração – primeiro em relação a $\rho$, depois $\phi$ e, por fim, $\theta$. Uma vez que as ideias básicas tenham sido dominadas, não deve haver qualquer problema para se usar outras ordens de integração.

Suponha que queiramos integrar $f(\rho, \theta, \phi)$ no sólido esférico $G$ contido na esfera $\rho = \rho_0$. A ideia básica é escolher os limites de integração de tal modo que cada ponto do sólido seja incluído no processo de integração. A Figura 14.6.10 ilustra uma das maneiras de fazer isso. Mantendo $\theta$ e $\phi$ fixados na primeira integração, deixamos $\rho$ variar entre 0 e $\rho_0$, o que cobre uma reta radial da origem à superfície da esfera. A seguir, mantendo $\theta$ fixado, deixamos $\phi$ variar de 0 a $\pi$ de modo que a reta radial varra uma região em forma de leque. Finalmente, deixamos $\theta$ variar de 0 a $2\pi$, de modo que a região em forma de leque faça uma revolução completa, varrendo, portanto, a esfera inteira. Assim, a integral tripla de $f(\rho, \theta, \phi)$ no sólido esférico $G$ pode ser calculada escrevendo

$$\iiint_G f(\rho, \theta, \phi)\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho_0} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

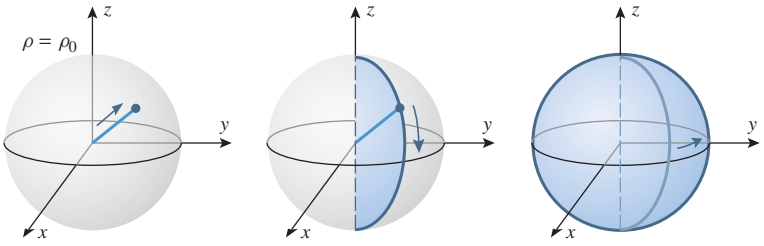



**Figura 14.6.10**

A Tabela 14.6.1 sugere como os limites de integração em coordenadas esféricas podem ser obtidos para outros sólidos comuns.

**Tabela 14.6.1**

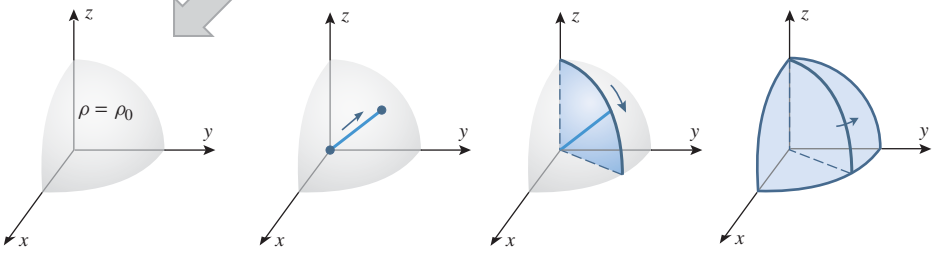
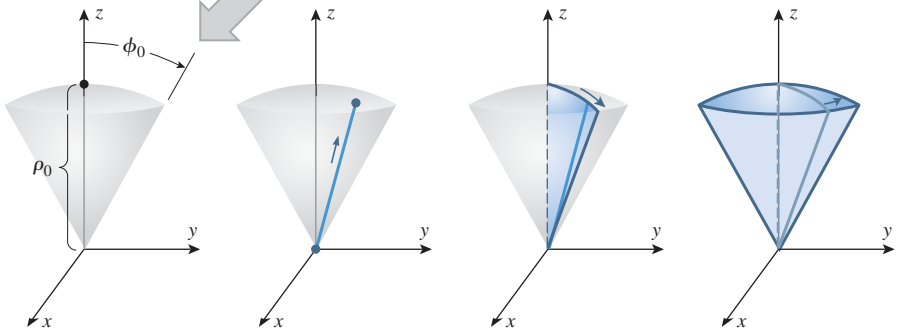
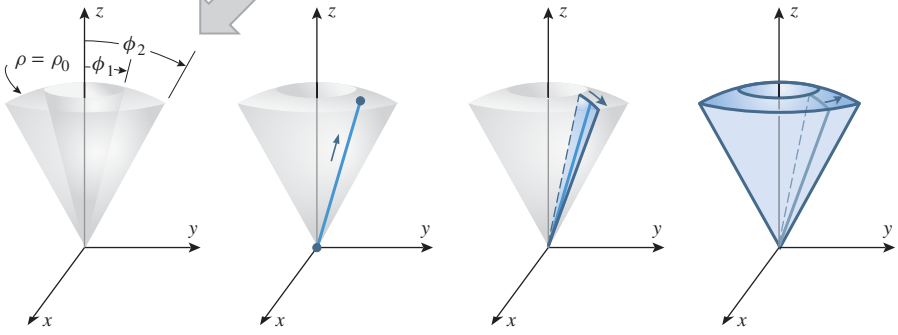
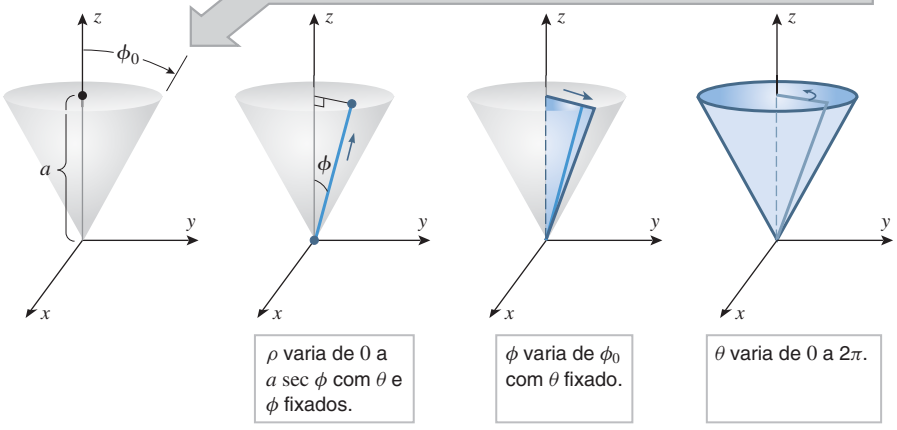
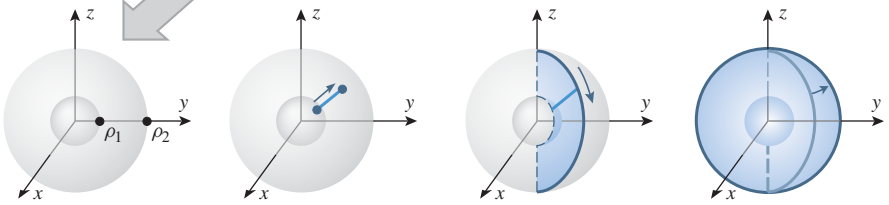
| DETERMINAÇÃO DOS LIMITES | INTEGRAL |
|---|---|
| Esta é a parte da esfera de raio $\rho_0$ localizada no primeiro octante.<br>  <br>$\rho$ varia de 0 a $\rho_0$ com $\theta$ e $\phi$ fixados.<br>$\phi$ varia de 0 a $\pi/2$ com $\theta$ fixados.<br>$\theta$ varia de 0 a $\pi/2$. | $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\rho_0} f(\rho,\theta,\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$ |
| Este sólido tipo casquinha de sorvete é cortado da esfera de raio $\rho_0$ pelo cone $\phi = \phi_0$.<br>  <br>$\rho$ varia de 0 a $\rho_0$ com $\theta$ e $\phi$ fixados.<br>$\phi$ varia de 0 a $\phi_0$ com $\theta$ fixados.<br>$\theta$ varia de 0 a $2\pi$. | $\int_0^{2\pi}\int_0^{\phi_0}\int_0^{\rho_0} f(\rho,\theta,\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$ |
| Este sólido é cortado da esfera de raio $\rho_0$ por dois cones, $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$, onde $\phi_1 < \phi_2$.<br>  <br>$\rho$ varia de 0 a $\rho_0$ com $\theta$ e $\phi$ fixados.<br>$\phi$ varia de $\phi_1$ a $\phi_2$ com $\theta$ fixados.<br>$\theta$ varia de 0 a $2\pi$. | $\int_0^{2\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_0^{\rho_0} f(\rho,\theta,\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$ |

**Tabela 14.6.1** (*continuação*)

| DETERMINAÇÃO DOS LIMITES | INTEGRAL |
|---|---|
| Este sólido é envolvido lateralmente pelo cone $\phi = \phi_0$ com $0 < \phi_0 < \pi/2$ em cima pelo plano horizontal $z = a$.   $\rho$ varia de 0 a $a \sec \phi$ com $\theta$ e $\phi$ fixados. $\phi$ varia de $\phi_0$ com $\theta$ fixado. $\theta$ varia de 0 a $2\pi$. | $\int_0^{2\pi} \int_0^{\phi_0} \int_0^{a \sec \phi} f(\rho, \theta, \phi)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ |
| Este sólido está compreendido entre duas esferas concêntricas, $\rho = \rho_1$ e $\rho = \rho_2$, onde $\rho_1 < \rho_2$   $\rho$ varia de $\rho_1$ a $\rho_2$ com $\phi$ e $\theta$ fixados. $\pi$ varia de 0 a $\pi$ com $\theta$ fixado. $\theta$ varia de 0 a $2\pi$. | $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta, \phi)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ |

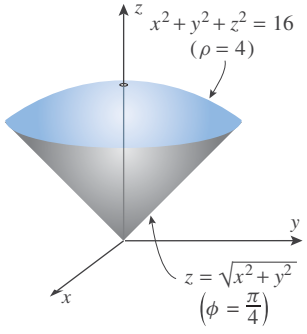



**Figura 14.6.11**

► **Exemplo 3** Use coordenadas esféricas para calcular o volume do sólido $G$ delimitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e abaixo pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

***Solução*** O esboço do sólido $G$ é mostrado na Figura 14.6.11. Em coordenadas esféricas, a equação da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ é $\rho = 4$, e a equação do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta}$$

que simplifica para

$$\rho \cos \phi = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Dividindo ambos os membros dessa equação por $\rho \cos \phi$, obtemos $\operatorname{tg} \phi = 1$, do que segue que

$$\phi = \pi/4$$

Assim, usando a segunda entrada na Tabela 14.6.1, o volume de $G$ é

$$\begin{aligned} V = \iiint_G dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^4 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^3}{3}\operatorname{sen}\phi\right]_{\rho=0}^4 d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{64}{3}\operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{64}{3}\int_0^{2\pi} [-\cos\phi]_{\phi=0}^{\pi/4} d\theta = \frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{64\pi}{3}(2-\sqrt{2}) \approx 39{,}26 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

## CONVERSÃO DE INTEGRAIS TRIPLAS DE COORDENADAS RETANGULARES PARA ESFÉRICAS

Utilizando a Tabela 11.8.1, podemos converter as integrais triplas de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas substituindo $x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\phi$. As duas integrais são relacionadas pela equação

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \iiint_{\substack{\text{limites}\\ \text{apropriados}}} f(\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \tag{10}$$

**► Exemplo 4** Use coordenadas esféricas para calcular

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dy\, dx$$

***Solução*** Em problemas desse tipo, é conveniente começar (quando possível) com um esboço da região de integração $G$. De acordo com os limites de integração em $z$, a superfície superior de $G$ é o hemisfério $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, e a superfície inferior é o plano $xy$ de equação $z = 0$. Pelos limites de integração em $x$ e $y$, a projeção do sólido $G$ no plano $xy$ é a região delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$. Com essas informações, obtemos o esboço de $G$ da Figura 14.6.12. Então,

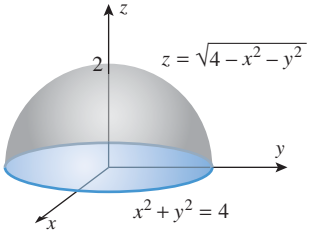



**Figura 14.6.12**

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dy\, dx \\ &= \iiint_G z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho^5\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{32}{3}\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{32}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_{\phi=0}^{\pi/2} d\theta = \frac{32}{9}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{64}{9}\pi \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.6 (Ver página 1058 para respostas.)

**1.** (a) A cunha cilíndrica $1 \le r \le 3$, $\pi/6 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le z \le 5$ tem volume $V =$ _____.
(b) A cunha esférica $1 \le \rho \le 3$, $\pi/6 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \phi \le \pi/3$ tem volume $V =$ _____.

**2.** Seja $G$ a região sólida dentro da esfera de raio 2 centrada na origem e acima do plano $z = 1$. Em cada parte, preencha as lacunas com o integrando e os extremos de integração que faltam nas integrais iteradas em coordenadas cilíndricas.
(a) O volume de $G$ é

$$\iiint_G dV = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} _____ \, dz\, dr\, d\theta$$

(b) $$\iiint_G \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dV = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} _____ \, dz\, dr\, d\theta$$

**3.** Seja $G$ a região sólida descrita no Exercício 2. Em cada parte, preencha as lacunas com o integrando e os extremos de integração que faltam nas integrais iteradas em coordenadas esféricas.
(a) O volume de $G$ é

$$\iiint_G dV = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} _____ \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

(b) $$\iiint_G \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\, dV = \int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square}\int_{\square}^{\square} _____ \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

## EXERCÍCIOS 14.6 C CAS

**1-4** Calcule a integral iterada. ■

**1.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} zr\, dz\, dr\, d\theta$

**2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{r^2} r \operatorname{sen}\theta\, dz\, dr\, d\theta$

**3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1} \rho^3 \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

**4.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \quad (a > 0)$

### ENFOCANDO CONCEITOS

**5.** Esboce a região $G$ e identifique a função $f$ tal que

$$\iiint_G f(r,\theta,z)\, dV$$

corresponda à integral iterada do Exercício 1.

**6.** Esboce a região $G$ e identifique a função $f$ tal que

$$\iiint_G f(r,\theta,z)\, dV$$

corresponda à integral iterada do Exercício 2.

**7.** Esboce a região $G$ e identifique a função $f$ tal que

$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\, dV$$

corresponda à integral iterada do Exercício 3.

**8.** Esboce a região $G$ e identifique a função $f$ tal que

$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\, dV$$

corresponda à integral iterada do Exercício 4.

**9-12** Use coordenadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido. ■

**9.** O sólido compreendido pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 9$.

**10.** O sólido limitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e abaixo pela folha de cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**11.** O sólido que está dentro da superfície $r^2 + z^2 = 20$ e abaixo da superfície $z = r^2$.

**12.** O sólido compreendido entre o cone $z = (hr)/a$ e o plano $z = h$.

**13-16** Use coordenadas esféricas para encontrar o volume do sólido. ■

**13.** O sólido limitado acima pela esfera $\rho = 4$ e abaixo pelo cone $\phi = \pi/3$.

**14.** O sólido no interior do cone $\phi = \pi/4$ e entre as esferas $\rho = 1$ e $\rho = 2$.

**15.** O sólido delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e os planos $z = 0$ e $z = a$.

**16.** O sólido dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, fora do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima do plano $xy$.

**17-20** Use coordenadas cilíndricas ou esféricas para calcular a integral. ■

**17.** $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a^2-x^2-y^2} x^2\,dz\,dy\,dx \quad (a>0)$

**18.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz\,dy\,dx$

**19.** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dx\,dy$

**20.** $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$

**21-24 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**21.** Uma integral tripla em coordenadas cartesianas pode ser expressa como uma integral iterada em coordenadas cilíndricas como

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\substack{\text{limites}\\ \text{apropriados}}} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)r^2\,dz\,dr\,d\theta$$

**22.** Se $0 \le \rho_1 < \rho_2$, $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 2\pi$ e $0 \le \phi_1 < \phi_2 \le \pi$, então o volume da cunha esférica limitada pelas esferas $\rho = \rho_1$ e $\rho = \rho_2$ e os semiplanos $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ e as folhas de cone $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$ será

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

**23.** Seja $G$ a região sólida do espaço tridimensional entre as esferas de raios 1 e 3 centradas na origem e acima do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$. O volume de $G$ é igual a

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_1^3 \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

**24.** Se $G$ for o sólido do Exercício 23 e se $f(x, y, z)$ for contínua em $G$, então

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_1^3 F(\rho,\theta,\phi)\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

onde $F(\rho, \theta, \phi) = f(\rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\cos\phi)$.

**C 25.** (a) Use um CAS para calcular

$$\int_{-2}^{2} \int_1^4 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{r\,\text{tg}^3\,\theta}{\sqrt{1+z^2}}\,d\theta\,dr\,dz$$

(b) Encontre uma função $f(x, y, z)$ e esboce uma região $G$ do espaço tridimensional tais que a integral tripla em coordenadas retangulares

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV$$

tenha o mesmo valor que a integral em coordenadas cilíndricas de (a).

**C 26.** Use um CAS para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\theta} \rho^{17}\cos\phi\cos^{19}\theta\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

**27.** Encontre o volume dentro de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ usando
(a) coordenadas cilíndricas;
(b) coordenadas esféricas.

**28.** Seja $G$ o sólido no primeiro octante limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e os planos coordenados. Calcule

$$\iiint_G xyz\,dV$$

(a) usando coordenadas retangulares;
(b) usando coordenadas cilíndricas;
(c) usando coordenadas esféricas.

**29.** Calcule o volume do sólido no primeiro octante limitado pela esfera $\rho = 2$, os planos coordenados e os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.

**30.** Neste exercício, vamos deduzir uma fórmula para o volume da cunha esférica ilustrada nas Figuras 14.6.7 e 14.6.9.
(a) Use uma integral tripla em coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado acima por uma esfera $\rho = \rho_0$, abaixo por um cone $\phi = \phi_0$ e dos lados por $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$ é

$$V = \tfrac{1}{3}\rho_0^3(1-\cos\phi_0)(\theta_2-\theta_1)$$

[*Sugestão*: Em coordenadas cilíndricas, a esfera tem equação $r^2 + z^2 = \rho_0^2$ e o cone tem equação $z = r\,\text{cotg}\,\phi_0$. Para simplificar, considere somente o caso $0 < \phi_0 < \pi/2$.]
(b) Subtraia os volumes apropriados e use o resultado da parte (a) para deduzir que o volume $\Delta V$ da cunha esférica é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Aplique o Teorema do Valor Médio às funções $\cos\phi$ e $\rho^3$ para concluir que a fórmula da parte (b) pode ser escrita como

$$\Delta V = \rho^{*2}\,\text{sen}\,\phi^*\,\Delta\rho\,\Delta\phi\,\Delta\theta$$

onde $\rho^*$ está entre $\rho_1$ e $\rho_2$, $\phi^*$ está entre $\phi_1$ e $\phi_2$ e $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

**31. Texto** Suponha que uma integral tripla seja expressa em coordenadas cilíndricas ou esféricas de tal modo que a variável de integração mais externa seja $\theta$ e nenhum dos limites de integração envolva $\theta$. Discuta o que isso diz sobre a região de integração da integral.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.6

**1.** (a) $\frac{20}{3}\pi$ (b) $\frac{13}{9}\pi$ **2.** (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} \frac{rz}{r^2+z^2}\,dz\,dr\,d\theta$

**3.** (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2} \rho\cos\phi\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

## 14.7 MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS; JACOBIANOS

*Nesta seção, discutiremos um método geral para calcular integrais duplas e triplas por substituição. A maioria dos resultados desta seção é de demonstração difícil, portanto a nossa abordagem será informal e motivacional. Nosso objetivo é oferecer um entendimento geométrico dos princípios básicos e uma exposição às técnicas computacionais.*

### MUDANÇA DE VARIÁVEL EM UMA INTEGRAL SIMPLES

Para motivar as técnicas de calcular integrais duplas e triplas por substituição, será útil considerar o efeito de uma substituição $x = g(u)$ em uma integral simples no intervalo $[a, b]$. Se $g$ for diferenciável e crescente ou decrescente, então $g$ é injetora e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)\,du$$

Nessa relação, $f(x)$ e $dx$ são dadas em função de $u$, e os limites de integração de $u$ resultam da resolução das equações

$$a = g(u) \quad \text{e} \quad b = g(u)$$

No caso de $g$ ser decrescente, temos $g^{-1}(b) < g^{-1}(a)$, que é contrário à nossa convenção usual de escrever as integrais definidas com limite de integração superior maior. Podemos contornar a situação invertendo os limites de integração e escrevendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f(g(u))g'(u)\,du = \int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f(g(u))|g'(u)|\,du$$

onde o valor absoluto resulta do fato de $g'(u)$ ser negativa. Assim, independentemente de $g$ ser crescente ou decrescente, podemos escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(u))|g'(u)|\,du \tag{1}$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são os limites de integração de $u$ e $\alpha < \beta$.

A expressão $g'(u)$ que aparece em (1) é denominada ***jacobiano*** da mudança de variável $x = g(u)$, em homenagem a C. G. J. Jacobi, que fez o primeiro estudo sério sobre a mudança de variáveis das integrais múltiplas em meados do século XIX. A Fórmula (1) revela três consequências da mudança de variável $x = g(u)$:

- O novo integrando torna-se $f(g(u))$ vezes o valor absoluto do jacobiano.
- $dx$ torna-se $du$.
- O intervalo de integração de $x$ transforma-se em um intervalo de integração de $u$.

Nosso objetivo, nesta seção, é mostrar que resultados análogos valem na mudança de variáveis em integrais duplas e triplas.

## TRANSFORMAÇÕES DO PLANO

Em seções anteriores, consideramos equações paramétricas de três espécies:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$ Uma curva no plano

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$ Uma curva no espaço tridimensional

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$ Uma superfície no espaço tridimensional

Consideraremos, agora, equações paramétricas da forma

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{2}$$

As equações paramétricas desse tipo associam pontos do plano $xy$ com pontos do plano $uv$. Essas equações podem ser escritas em forma vetorial como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ é um vetor posição no plano $xy$ e $\mathbf{r}(u, v)$ é uma função vetorial das variáveis $u$ e $v$.

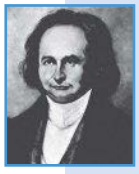
Também será conveniente, nesta seção, imaginar as equações paramétricas em (2) em termos de entradas e saídas. Se imaginarmos o par de números $(u, v)$ como uma entrada, então as duas equações, em conjunto, produzem uma única saída $(x, y)$ e, portanto, definem uma função $T$ que associa pontos do plano $xy$ com pontos do plano $uv$. Essa função é descrita pela fórmula

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Dizemos que $T$ é uma ***transformação*** do plano $uv$ para o plano $xy$, e $(x, y)$ é a ***imagem*** de $(u, v)$ pela transformação $T$. Dizemos, também, que $T$ **leva**, ou ***aplica***, $(u, v)$ em $(x, y)$. O conjunto $R$ de todas as imagens no plano $xy$ de um conjunto $S$ no plano $uv$ é chamado de ***imagem de S por T***. Se pontos distintos do plano $uv$ têm imagens distintas no plano $xy$, então se diz que $T$ é ***injetora***. Nesse caso, as equações (2) definem $u$ e $v$ como funções de $x$ e $y$, ou seja

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

Essas equações, que, muitas vezes, podem ser obtidas resolvendo (2) para $u$ e $v$ em função de $x$ e $y$, definem uma transformação do plano $xy$ no plano $uv$ que leva a imagem de $(u, v)$ por $T$ de volta para $(u, v)$. Essa transformação é denotada por $T^{-1}$ e é denominada ***inversa de T*** (Figura 14.7.1).



**Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)** Matemático alemão. Jacobi, filho de um banqueiro, foi criado em um ambiente de riqueza e cultura e mostrou brilhantismo na Matemática desde cedo. Resistiu ao estudo da Matemática mecanicamente, preferindo, em vez disso, aprender os princípios gerais dos trabalhos dos mestres, Euler e Lagrange. Entrou na Universidade de Berlim aos 16 anos, como estudante de Matemática e dos clássicos. Entretanto, compreendeu cedo que não podia estudar ambos e dedicou-se inteiramente à Matemática, com uma intensidade ardorosa que manteria durante toda a sua vida. Recebeu o diploma de Ph.D. em 1825 e foi capaz de assegurar uma posição de professor na Universidade de Berlim, desistindo do judaísmo e tornando-se cristão. No entanto, suas oportunidades de promoção permaneceram limitadas e ele mudou para a Universidade de Königsberg. Jacobi nasceu para lecionar – tinha uma personalidade dinâmica e dava suas aulas com uma clareza e um entusiasmo que frequentemente deixavam sua plateia fascinada. Apesar dos extensos compromissos letivos, foi capaz de publicar obras revolucionárias de pesquisa matemática que acabaram transformando-o em líder matemático europeu depois de Gauss. Seu campo de pesquisa principal foi na área das funções elípticas, um ramo da Matemática com aplicações importantes em Astronomia e em Física, bem como em outros campos da Matemática. Devido à riqueza de sua família, Jacobi não dependeu do seu salário de professor nos primeiros anos. Entretanto, seu mundo confortável acabou entrando em colapso. Em 1840, sua família faliu e ele, pessoalmente, perdeu tudo financeiramente. Em 1842, teve um colapso nervoso devido ao excesso de trabalho. Em 1843, ficou seriamente doente, de diabetes, e mudou-se para Berlim com a ajuda de uma subvenção governamental para custear suas despesas médicas. Em 1848, ele fez um comentário político imprudente que fez o governo retirar a subvenção, resultando na perda de sua residência. Sua saúde continuou a piorar e em 1851, por fim, ele sucumbiu a sucessivos ataques de gripe e varíola. Apesar de todos os problemas, Jacobi foi um trabalhador incansável até o fim. Quando um amigo demonstrou preocupação com o efeito do excesso de trabalho em sua saúde, Jacobi replicou: "Certamente, tenho arriscado minha saúde algumas vezes pelo excesso de trabalho, mas e daí? Somente os repolhos não têm nervos, nem preocupações. E o que conseguem com seu bem-estar perfeito?"

*[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Jacobi2.jpg]*

Como há quatro variáveis envolvidas, uma figura tridimensional não é muito útil para descrever geometricamente a transformação. A ideia é usar dois planos para conseguir as quatro dimensões necessárias.

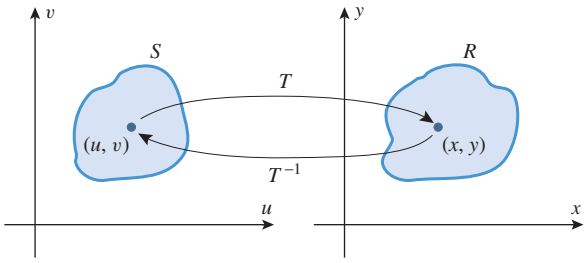



**Figura 14.7.1**

Uma maneira de visualizar o efeito geométrico de uma transformação $T$ é determinar as imagens no plano $xy$ de retas verticais e horizontais do plano $uv$. De acordo com o que vimos na Seção 14.4, os conjuntos de pontos do plano $xy$, que são imagens de retas horizontais ($v$ constante) são chamados de ***curvas de v constante***, e os conjuntos de pontos que são imagens de retas verticais ($u$ constante) são chamados de ***curvas de u constante*** (Figura 14.7.2).

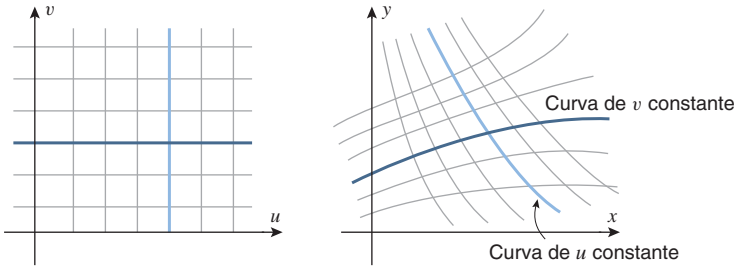



**Figura 14.7.2**

▶ **Exemplo 1** Seja $T$ a transformação do plano $uv$ para o plano $xy$ definida pelas equações

$$x = \tfrac{1}{4}(u + v), \quad y = \tfrac{1}{2}(u - v) \tag{3}$$

(a) Determine $T(1, 3)$.

(b) Esboce as curvas de $v$ constante correspondentes a $v = -2, -1, 0, 1, 2$.

(c) Esboce as curvas de $u$ constante correspondentes a $u = -2, -1, 0, 1, 2$.

(d) Esboce a imagem por $T$ da região quadrada do plano $uv$ limitada pelas retas $u = -2$, $u = 2$, $v = -2$ e $v = 2$.

***Solução (a)*** Substituindo $u = 1$ e $v = 3$ em (3), temos $T(1, 3) = (1, -1)$.

***Soluções (b) e (c)*** Nessas partes, será conveniente expressar as equações da transformação com $u$ e $v$ como funções de $x$ e $y$. Por (3)

$$4x = u + v, \quad 2y = u - v$$

Combinando essas equações, obtemos

$$4x + 2y = 2u, \quad 4x - 2y = 2v$$

ou

$$2x + y = u, \quad 2x - y = v$$

Assim, as curvas de $v$ constante correspondentes a $v = -2, -1, 0, 1$ e $2$ são

$$2x - y = -2, \quad 2x - y = -1, \quad 2x - y = 0, \quad 2x - y = 1, \quad 2x - y = 2$$

e as curvas de $u$ constante correspondentes a $u = -2, -1, 0, 1$ e $2$ são

$$2x + y = -2, \quad 2x + y = -1, \quad 2x + y = 0, \quad 2x + y = 1, \quad 2x + y = 2$$

Na Figura 14.7.3, as curvas de $v$ constante são mostradas em azul claro e as curvas de $u$ constante, em azul escuro.

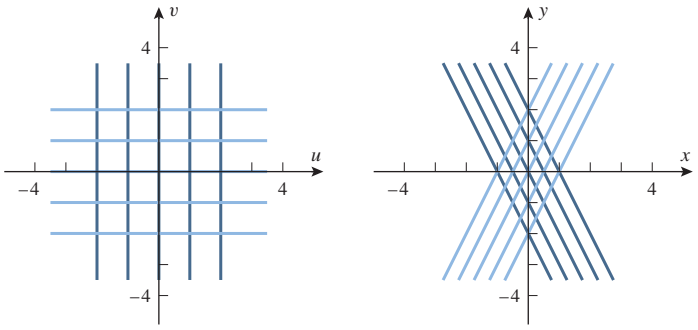



Figura 14.7.3

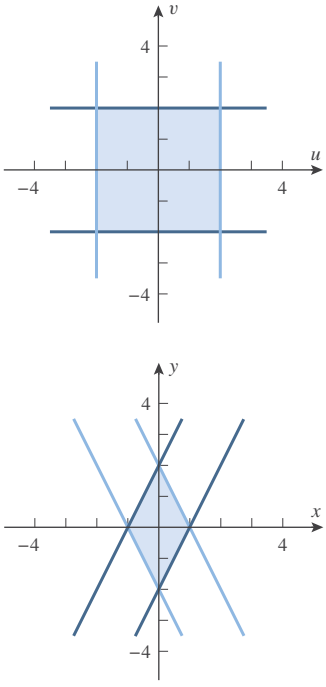



Figura 14.7.4

***Solução (d)*** A imagem de uma região pode, muitas vezes, ser obtida determinando-se a imagem de sua fronteira. Neste caso, as imagens das retas de fronteira $u = -2$, $u = 2$, $v = -2$ e $v = 2$ envolvem a região em forma de losango no plano $xy$, mostrada na Figura 14.7.4. ◀

## JACOBIANOS EM DUAS VARIÁVEIS

Para deduzir a fórmula da mudança de variável em integrais duplas, precisaremos entender a relação entre a área de uma região retangular *pequena* no plano $uv$ e a área de sua imagem no plano $xy$ pela transformação $T$ dada pelas equações

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

Para isso, suponha que $\Delta u$ e $\Delta v$ sejam positivos e considere uma região retangular $S$ no plano $uv$ envolvida pelas retas

$$u = u_0, \quad u = u_0 + \Delta u, \quad v = v_0, \quad v = v_0 + \Delta v$$

Se as funções $x(u, v)$ e $y(u, v)$ forem contínuas e se $\Delta u$ e $\Delta v$ não forem muito grandes, então a imagem de $S$ no plano $xy$ será uma região $R$ que parece um paralelogramo ligeiramente distorcido (Figura 14.7.5). Os lados de $R$ são as curvas de $u$ constante e de $v$ constante que correspondem aos lados de $S$.

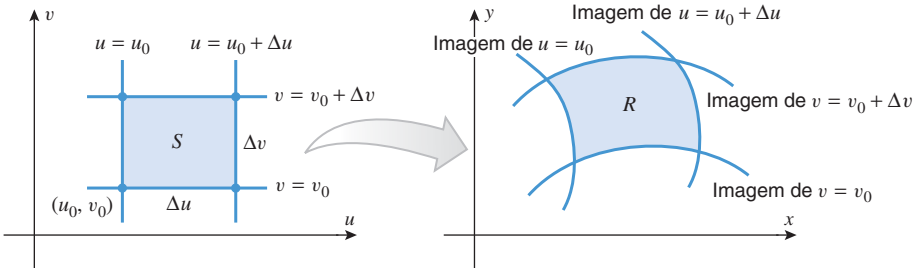



Figura 14.7.5

Se considerarmos

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}$$

como o vetor posição do ponto do plano $xy$ correspondente ao ponto $(u, v)$ do plano $uv$, então a curva de $v$ constante, correspondente a $v = v_0$ e de $u$ constante, correspondente a $u = u_0$, podem ser representadas em forma vetorial como

$$\mathbf{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\mathbf{i} + y(u, v_0)\mathbf{j} \qquad \boxed{\text{Curva de } v \text{ constante}}$$

$$\mathbf{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\mathbf{i} + y(u_0, v)\mathbf{j} \qquad \boxed{\text{Curva de } u \text{ constante}}$$

Como estamos supondo que $\Delta u$ e $\Delta v$ sejam pequenos, a região $R$ pode ser aproximada por um paralelogramo determinado pelos "vetores secante"

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \tag{4}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \tag{5}$$

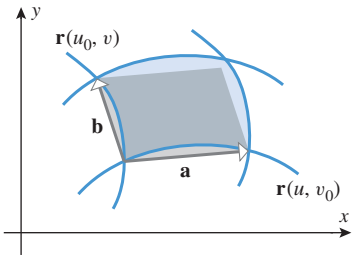



Figura 14.7.6

mostrados na Figura 14.7.6. Uma aproximação mais conveniente de $R$ pode ser obtida usando as Fórmulas (7) e (8) da Seção 14.4 para aproximar esses vetores secantes por vetores tangentes, como segue:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}\Delta u$$
$$\approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}\right)\Delta u$$
$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta v}\Delta v$$
$$\approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}\right)\Delta v$$

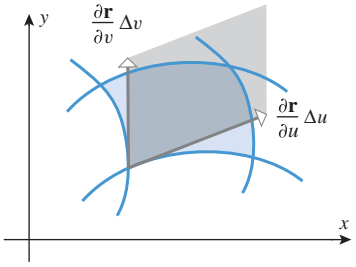



Figura 14.7.7

onde as derivadas parciais são calculadas em $(u_0, v_0)$ (Figura 14.7.7). Portanto, segue que a área da região $R$, que denotaremos por $\Delta A$, pode ser aproximada pela área do paralelogramo determinado por esses vetores. Assim, pelo Teorema 11.4.5($b$), temos

$$\Delta A \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u\, \Delta v \tag{6}$$

na qual as derivadas são calculadas em $(u_0, v_0)$. Calculando o produto vetorial, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} \tag{7}$$

O determinante de (7) é suficientemente importante para ter sua própria terminologia e notação.

**14.7.1 DEFINIÇÃO** Se $T$ for a transformação do plano $uv$ no plano $xy$ definida pelas equações $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, então o ***jacobiano de T*** será denotado por $J(u, v)$ ou $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ e definido por

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

Usando essa notação decorre de (6) e (7) que

$$\Delta A \approx \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{k} \right\| \Delta u\, \Delta v$$

ou, uma vez que $\mathbf{k}$ é um vetor unitário,

$$\Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u\, \Delta v \tag{8}$$

No ponto $(u_0, v_0)$, essa fórmula importante relaciona as áreas das regiões $R$ e $S$ da Figura 14.7.5: ela nos diz que *para valores pequenos de $\Delta u$ e $\Delta v$, a área de $R$ é aproximadamente o valor absoluto do jacobiano vezes a área de $S$*. Além disso, prova-se nos cursos de Cálculo avançado que o erro relativo na aproximação tende para zero quando $\Delta u \to 0$ e $\Delta v \to 0$.

## MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS DUPLAS

Nosso próximo objetivo é fornecer uma motivação geométrica para o seguinte resultado.

Um enunciado preciso das condições sob as quais a Fórmula (9) é verdadeira nos levaria além do escopo deste curso. É suficiente dizer que a fórmula vale se $T$ for uma transformação injetora, $f(x, y)$ for contínua em $R$, as derivadas parciais de $x(u, v)$ e $y(u, v)$ existirem e forem contínuas em $S$ e as regiões $S$ e $R$ não forem muito complicadas.

**14.7.2 FÓRMULA DA MUDANÇA DE VARIÁVEIS PARA INTEGRAIS DUPLAS** Se a transformação $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ levar a região $S$ do plano $uv$ na região $R$ do plano $xy$ e se o jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ for não nulo e não mudar de sinal em $S$, então, com restrições apropriadas na transformação e nas regiões, vale

$$\iint_R f(x, y)\, dA_{xy} = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dA_{uv} \tag{9}$$

onde acrescentamos índices aos $dA$ para ajudar a identificar as variáveis associadas.

Para motivar a Fórmula (9), procedemos como segue:

- Subdivida a região $S$ do plano $uv$ em retângulos por meio de retas paralelas aos eixos coordenados e exclua das considerações quaisquer retângulos que contenham pontos fora de $S$. Isso deixa somente regiões retangulares que são subconjuntos de $S$. Suponha que haja $n$ tais regiões e denote a $k$-ésima região por $S_k$. Suponha que $S_k$ tenha dimensões $\Delta u_k$ por $\Delta v_k$ e, como mostrado na Figura 14.7.8*a*, considere que $(u_k^*, v_k^*)$ seja seu "canto esquerdo inferior".
- Como mostrado na Figura 14.7.8*b*, a transformação $T$ definida pelas equações $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ leva $S_k$ no paralelogramo curvilíneo $R_k$ do plano $xy$ e aplica o ponto $(u_k^*, v_k^*)$ no ponto $(x_k^*, y_k^*) = (x(u_k^*, v_k^*),\ y(u_k^*, v_k^*))$ de $R_k$. Denote a área de $R_k$ por $\Delta A_k$.
- Em coordenadas retangulares, a integral dupla de $f(x, y)$ na região $R$ é definida como um limite de somas de Riemann nos quais $R$ é subdividida em sub-regiões retangulares. Nos cursos de Cálculo avançado, demonstra-se que sob condições apropriadas podem ser usadas subdivisões em paralelogramos curvilíneos. Aceitando isso como verdadeiro, podemos aproximar a integral dupla de $f(x, y)$ em $R$ por

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)\, dA_{xy} &\approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\, \Delta A_k \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta u_k\, \Delta v_k\end{aligned}$$

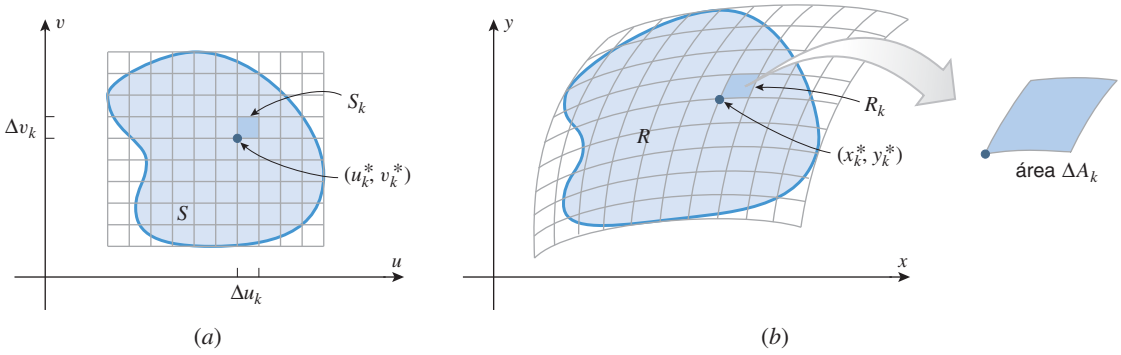
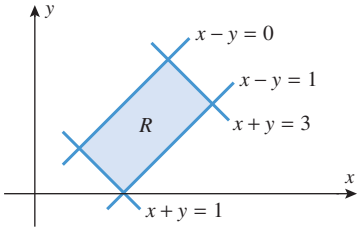



**Figura 14.7.8**

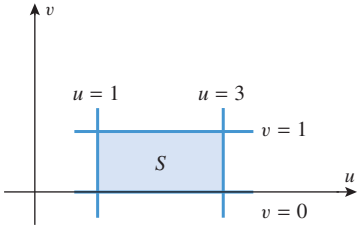
onde o jacobiano é calculado em $(u_k^*, v_k^*)$. Contudo, a última expressão é uma soma de Riemann da integral

$$\iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv}$$

portanto, segue a Fórmula (9) supondo que os erros de aproximação tendam para zero quando $n \to +\infty$.




(a)




(b)

**Figura 14.7.9**

**► Exemplo 2** Calcule

$$\iint_R \frac{x - y}{x + y} dA$$

onde $R$ é a região compreendida pelas retas $x - y = 0$, $x - y = 1$, $x + y = 1$ e $x + y = 3$ (Figura 14.7.9*a*).

***Solução*** Seria cansativo calcular diretamente essa integral, porque a região $R$ é orientada de tal maneira que teríamos de subdividi-la e integrar cada parte separadamente. Entretanto, a ocorrência das expressões $x - y$ e $x + y$ nas equações da fronteira sugere que a transformação

$$u = x + y, \quad v = x - y \tag{10}$$

poderia ser útil, visto que, com essa transformação, as retas de fronteira

$$x + y = 1, \quad x + y = 3, \quad x - y = 0, \quad x - y = 1$$

são curvas de $u$ constante e $v$ constante correspondentes às retas

$$u = 1, \quad u = 3, \quad v = 0, \quad v = 1$$

no plano $uv$. Essas retas envolvem a região retangular $S$ mostrada na Figura 14.7.9*b*. Para encontrar o jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ dessa transformação, primeiro resolvemos (10) para $x$ e $y$ em função de $u$ e $v$. Isso dá

$$x = \tfrac{1}{2}(u + v), \quad y = \tfrac{1}{2}(u - v)$$

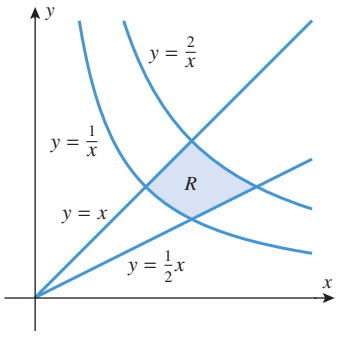
das quais obtemos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{2}$$

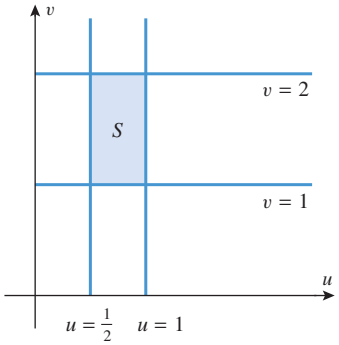
Assim, pela Fórmula (9), mas com a notação $dA$ em vez de $dA_{xy}$,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{x - y}{x + y} dA &= \iint_S \frac{v}{u} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv} \\ &= \iint_S \frac{v}{u} \left| -\frac{1}{2} \right| dA_{uv} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_1^3 \frac{v}{u} du\, dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v \ln |u| \Big]_{u=1}^{3} dv \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 \int_0^1 v\, dv = \frac{1}{4} \ln 3 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

A ideia subjacente ilustrada no Exemplo 2 é encontrar uma transformação injetora que leve um retângulo $S$ no plano $uv$ na região de integração $R$ e, depois, usar essa transformação como uma substituição na integral para produzir uma integral equivalente em $S$.




(*a*)




(*b*)

**Figura 14.7.10**

**▶ Exemplo 3** Calcule

$$\iint_R e^{xy}\,dA$$

onde $R$ é a região compreendida pelas retas $y = \frac{1}{2}x$ e $y = x$ e as parábolas $y = 1/x$ e $y = 2/x$ (Figura 14.7.10*a*).

***Solução*** Como no exemplo anterior, procuramos uma transformação na qual as curvas de fronteira no plano $xy$ tornam-se curvas de $v$ constante e de $u$ constante. Para isso, reescrevemos as quatro curvas de fronteria como

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y}{x} = 1, \quad xy = 1, \quad xy = 2$$

que sugere a transformação

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = xy \tag{11}$$

Com essa transformação, as curvas de fronteira no plano $xy$ são curvas de $u$ constante e de $v$ constante correspondendo às retas

$$u = \tfrac{1}{2}, \quad u = 1, \quad v = 1, \quad v = 2$$

no plano $uv$. Essas retas envolvem a região retangular $S$ mostrada na Figura 14.7.10*b*. Para encontrar o jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ dessa transformação, primeiro resolvemos (11) para $x$ e $y$ em função de $u$ e $v$, o que dá

$$x = \sqrt{v/u}, \quad y = \sqrt{uv}$$

das quais obtemos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2u}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u} = -\frac{1}{2u}$$

Assim, pela Fórmula (9), mas com a notação $dA$ em vez de $dA_{xy}$,

$$\begin{aligned} \iint_R e^{xy}\,dA &= \iint_S e^{v}\left|-\frac{1}{2u}\right| dA_{uv} = \frac{1}{2}\iint_S \frac{1}{u}e^{v}\,dA_{uv} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{1/2}^1 \frac{1}{u}e^{v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^2 e^{v}\ln|u|\Big]_{u=1/2}^{1} dv \\ &= \frac{1}{2}\ln 2\int_1^2 e^{v}\,dv = \frac{1}{2}(e^2 - e)\ln 2 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

## MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS TRIPLAS

Equações da forma

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \tag{12}$$

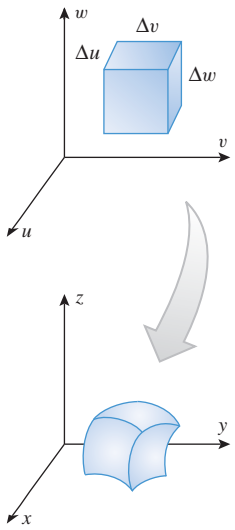



**Figura 14.7.11**

definem uma ***transformação*** $T$ do espaço $uvw$ no espaço $xyz$. Da mesma maneira que uma transformação $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ em duas variáveis leva retângulos pequenos do plano $uv$ em paralelogramos curvilíneos no plano $xy$, também (12) leva pequenos paralelepípedos retangulares do espaço $uvw$ em paralelepípedos curvilíneos do espaço $xyz$ (Figura 14.7.11). A definição do jacobiano de (12) é semelhante à Definição 14.7.1.

**14.7.3 DEFINIÇÃO** Se $T$ for a transformação do espaço $uvw$ para o espaço $xyz$ definida pelas equações $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, então o ***jacobiano de T*** será denotado por $J(u, v, w)$ ou $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ e definido por

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Com valores pequenos de $\Delta u$, $\Delta v$ e $\Delta w$, o volume $\Delta V$ do paralelepípedo curvilíneo da Figura 14.7.11 está relacionado ao volume $\Delta u\, \Delta v\, \Delta w$ do paralelepípedo retangular por

$$\Delta V \approx \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \Delta u\, \Delta v\, \Delta w \tag{13}$$

que é o análogo da Fórmula (8). Usando essa relação e um argumento semelhante ao que levou à Fórmula (9), obtemos o resultado seguinte.

**14.7.4 FÓRMULA DA MUDANÇA DE VARIÁVEIS PARA INTEGRAIS TRIPLAS** Se a transformação $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ levar a região $S$ do espaço $uvw$ na região $R$ do espaço $xyz$, e se o jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ for não nulo e não mudar de sinal em $S$, então, com restrições apropriadas na transformação e nas regiões, vale

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV_{xyz} = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dV_{uvw} \tag{14}$$

► **Exemplo 4** Calcule o volume da região $G$ envolvida pelo elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

***Solução*** O volume $V$ é dado pela integral tripla

$$V = \iiint_G dV$$

Para calcular essa integral, fazemos a mudança de variáveis

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw \tag{15}$$

que leva a região $S$ do espaço $uvw$ envolvida pela esfera de raio 1 na região $G$ do espaço $xyz$. Isso pode ser visto em (15), notando que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{torna-se} \quad u^2+v^2+w^2=1$$

O jacobiano de (15) é

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc$$

Assim, pela Fórmula (14), mas com a notação $dV$ em vez de $dV_{xyz}$,

$$V=\iiint_G dV=\iiint_S \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dV_{uvw}=abc\iiint_S dV_{uvw}$$

A última integral é o volume envolvido pela esfera de raio 1, que sabemos ser $\frac{4}{3}\pi$. Assim, o volume envolvido pelo elipsoide é $V=\frac{4}{3}\pi abc$. ◀

Os jacobianos também aparecem na conversão de integrais triplas em coordenadas retangulares para integrais iteradas em coordenadas cilíndricas e esféricas. Como exemplo, no Exercício 48 pedimos ao leitor para mostrar que o jacobiano da transformação

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\operatorname{sen}\theta, \quad z=z$$

é

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$$

e o jacobiano da transformação

$$x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \quad y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \quad z=\rho\cos\phi$$

é

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}=\rho^2\operatorname{sen}\phi$$

Assim, as Fórmulas (6) e (10) da Seção 14.6 podem ser expressas em termos de jacobianos como

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV=\iiint_{\substack{\text{limites}\\ \text{apropriados}}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\,dz\,dr\,d\theta \tag{16}$$

Os sinais dos valores absolutos são omitidos nas Fórmulas (16) e (17) porque os jacobianos são não negativos (ver as restrições na Tabela 11.8.1).

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV=\iiint_{\substack{\text{limites}\\ \text{apropriados}}} f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\,d\rho\,d\phi\,d\theta \tag{17}$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.7 (Ver página 1071 para respostas.)

**1.** Seja $T$ a transformação do plano $uv$ no plano $xy$ definida pelas equações

$$x = u - 2v, \quad y = 3u + v$$

(a) Esboce a imagem por $T$ do retângulo $1 \le u \le 3, 0 \le v \le 2$.
(b) Resolva para $u$ e $v$ em termos de $x$ e $y$:

$$u = _____, \quad v = _____$$

**2.** Enuncie a relação entre $R$ e $S$ na fórmula de mudança de variáveis

$$\iint_R f(x, y)\, dA_{xy} = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv}$$

**3.** Seja $T$ a transformação do Exercício 1.
(a) O jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ de $T$ é _____.
(b) Seja $R$ a região do Exercício 1(a). Preencha as lacunas com o integrando e os extremos de integração que faltam na mudança de variáveis dada por $T$.

$$\iint_R e^{x+2y}\, dA = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} _____\, du\, dv$$

**4.** O jacobiano da transformação

$$x = uv, \quad y = vw, \quad z = 2w$$

é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = _____$$

## EXERCÍCIOS 14.7

**1-4** Encontre o jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$. ■

**1.** $x = u + 4v,\ y = 3u - 5v$

**2.** $x = u + 2v^2,\ y = 2u^2 - v$

**3.** $x = \operatorname{sen} u + \cos v,\ y = -\cos u + \operatorname{sen} v$

**4.** $x = \dfrac{2u}{u^2 + v^2},\ y = -\dfrac{2v}{u^2 + v^2}$

**5-8** Resolva para $x$ e $y$ em função de $u$ e $v$ e, depois, calcule o jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$. ■

**5.** $u = 2x - 5y,\ v = x + 2y$

**6.** $u = e^x,\ v = ye^{-x}$

**7.** $u = x^2 - y^2,\ v = x^2 + y^2 \quad (x > 0, y > 0)$

**8.** $u = xy,\ v = xy^3 \quad (x > 0, y > 0)$

**9-12** Encontre o jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$. ■

**9.** $x = 3u + v,\ y = u - 2w,\ z = v + w$

**10.** $x = u - uv,\ y = uv - uvw,\ z = uvw$

**11.** $u = xy,\ v = y,\ w = x + z$

**12.** $u = x + y + z,\ v = x + y - z,\ w = x - y + z$

**13-16 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**13.** Se $\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}$, então o valor de $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$ em um ponto $(u_0, v_0)$ será o perímetro do paralelogramo gerado pelos vetores $\partial\mathbf{r}/\partial u$ e $\partial\mathbf{r}/\partial v$ em $(u_0, v_0)$.

**14.** Se $\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}$ levar o retângulo $0 \le u \le 2, 1 \le v \le 5$ em uma região $R$ do plano $xy$, então a área de $R$ será dada por

$$\int_1^5 \int_0^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

**15.** O jacobiano da transformação $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r^2$$

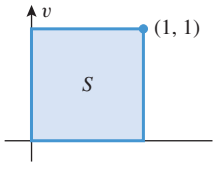
**16.** O jacobiano da transformação $x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\phi$ é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

### ENFOCANDO CONCEITOS

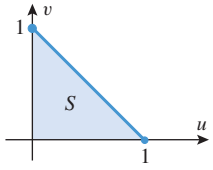
**17-20** Esboce a imagem do conjunto $S$ no plano $xy$ sob a transformação dada.

**17.**



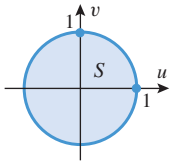

$x = u^2 - v^2$
$y = 2uv$

**18.**



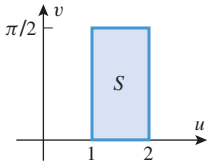

$x = 3u + 4v$
$y = 4u$

**19.**




$x = 2u$
$y = 3v$

**20.**




$x = u\cos v$
$y = u\operatorname{sen} v$

**21.** Use a transformação $u = x - 2y$, $v = 2x + y$ para encontrar

$$\iint_R \frac{x - 2y}{2x + y}\, dA$$

onde $R$ é a região retangular delimitada pelas retas $x - 2y = 1$, $x - 2y = 4$, $2x + y = 1$, $2x + y = 3$.

**22.** Use a transformação $u = x + y$, $v = x - y$ para encontrar

$$\iint_R (x - y)e^{x^2 - y^2}\, dA$$

onde $R$ é a região retangular delimitada pelas retas $x + y = 0$, $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x - y = 4$.

**23.** Use a transformação $u = \frac{1}{2}(x + y)$, $v = \frac{1}{2}(x - y)$ para encontrar

$$\iint_R \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x + y) \cos \tfrac{1}{2}(x - y)\, dA$$

onde $R$ é região triangular de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$.

**24.** Use a transformação $u = y/x$, $v = xy$ para encontrar

$$\iint_R xy^3\, dA$$

onde $R$ é região no primeiro quadrante delimitada por $y = x$, $y = 3x$, $xy = 1$, $xy = 4$.

**25-27** A transformação $x = au$, $y = bv$ $(a > 0, b > 0)$ pode ser reescrita como $x/a = u$, $y/b = v$ e, portanto, transforma a região circular

$$u^2 + v^2 \le 1$$

na região elíptica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

Nestes exercícios, efetue a integração transformando a região de integração elíptica em uma região de integração circular e, depois, calcule a integral transformada em coordenadas polares. ■

**25.** $\displaystyle\iint_R \sqrt{16x^2 + 9y^2}\, dA$, onde $R$ é a região envolvida pela elipse $(x^2/9) + (y^2/16) = 1$.

**26.** $\displaystyle\iint_R e^{-(x^2 + 4y^2)}\, dA$, onde $R$ é a região envolvida pela elipse $(x^2/4) + y^2 = 1$.

**27.** $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}(4x^2 + 9y^2)\, dA$, onde $R$ é a região do primeiro quadrante envolvida pela elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$ e os eixos coordenados.

**28.** Mostre que a área da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é $\pi ab$.

**29-30** Se $a$, $b$, e $c$ forem constantes positivas, então a transformação $x = au$, $y = bv$, $z = cw$ pode ser reescrita como $x/a = u$, $y/b = v$, $z/c = w$ e, portanto, transforma a região esférica

$$u^2 + v^2 + w^2 \le 1$$

na região elipsoidal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

Nestes exercícios, efetue a integração transformando a região de integração elipsoidal em uma região de integração esférica e, depois, calcule a integral transformada em coordenadas esféricas. ■

**29.** $\displaystyle\iiint_G x^2\, dV$, onde $G$ é a região envolvida pelo elipsoide $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$.

**30.** $\displaystyle\iiint_G (y^2 + z^2)\, dV$, onde $G$ é a região envolvida pela elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

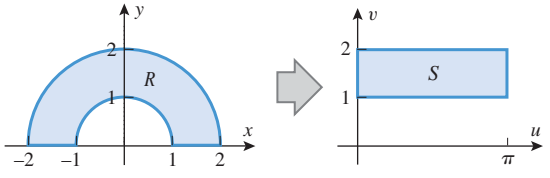
## ENFOCANDO CONCEITOS

**31-34** Encontre uma transformação

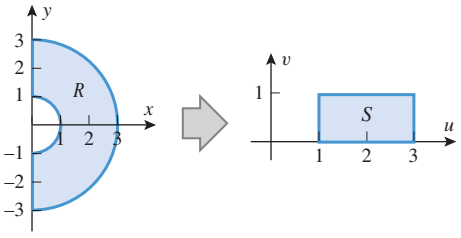
$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y)$$

que, aplicada na região $R$ do plano $xy$ tenha por imagem a região $S$ do plano $uv$. ■

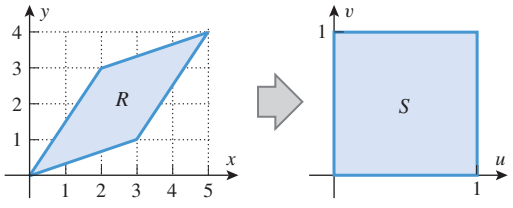
**31.**



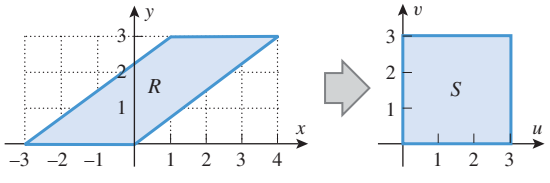

**32.**




**33.**




**34.**



**35-38** Calcule a integral fazendo uma troca adequada de variáveis. ■

**35.** $\iint_R \frac{y-4x}{y+4x}\,dA$, onde $R$ é a região delimitada pelas retas $y=4x$, $y=4x+2$, $y=2-4x$, $y=5-4x$.

**36.** $\iint_R (x^2-y^2)\,dA$, onde $R$ é a região retangular delimitada pelas retas $y=-x$, $y=1-x$, $y=x$, $y=x+2$.

**37.** $\iint_R \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x+y)}\,dA$, onde $R$ é a região triangular delimitada pelas retas $y=0$, $y=x$, $x+y=\pi/4$.

**38.** $\iint_R e^{(y-x)/(y+x)}\,dA$, onde $R$ é a região no primeiro quadrante delimitada pelo trapézio de vértices $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 0)$.

**39.** Use uma mudança de variáveis adequada para calcular a área da região no primeiro quadrante envolvida pelas curvas $y=x$, $y=2x$, $x=y^2$, $x=4y^2$.

**40.** Use uma mudança de variáveis adequada para calcular o volume do sólido limitado acima pelo plano $x+y+z=9$, abaixo pelo plano $xy$ e lateralmente pelo cilindro elíptico $4x^2+9y^2=36$. [*Sugestão*: Expresse o volume como uma integral dupla em coordenadas $xy$ e, depois, use coordenadas polares para calcular a integral transformada.]

**41.** Use a transformação $u=x$, $v=z-y$, $w=xy$ para calcular

$$\iiint_G (z-y)^2 xy\,dV$$

onde $G$ é a região delimitada pelas superfícies $x=1$, $x=3$, $z=y$, $z=y+1$, $xy=2$, $xy=4$.

**42.** Use a transformação $u=xy$, $v=yz$, $w=xz$ para calcular o volume da região no primeiro octante compreendida pelos cilindros hiperbólicos $xy=1$, $xy=2$, $yz=1$, $yz=3$, $xz=1$, $xz=4$.

**43.** (a) Verifique que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{vmatrix}$$

(b) Se $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ for uma transformação injetora, então $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$. Supondo a diferenciabilidade das funções, use o resultado da parte (a) e a regra da cadeia para mostrar que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$$

**44-46** A fórmula obtida na parte (b) do Exercício 43 é útil nos problemas de integração em que é inconveniente ou impossível resolver as equações de transformação $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$ explicitamente para $x$ e $y$ em função de $u$ e $v$. Nestes exercícios use a relação

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\partial(u, v)/\partial(x, y)}$$

para evitar a resolução de $x$ e $y$ em função de $u$ e $v$. ■

**44.** Use a transformação $u=xy$, $v=xy^4$ para calcular

$$\iint_R \operatorname{sen}(xy)\,dA$$

onde $R$ é a região delimitada pelas curvas $xy=\pi$, $xy=2\pi$, $xy^4=1$, $xy^4=2$.

**45.** Use a transformação $u=x^2-y^2$, $v=x^2+y^2$ para calcular

$$\iint_R xy\,dA$$

onde $R$ é a região do primeiro quadrante delimitada pelas hipérboles $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=4$ e os círculos $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=16$.

**46.** Use a transformação $u=xy$, $v=x^2-y^2$ para calcular

$$\iint_R (x^4-y^4)e^{xy}\,dA$$

onde $R$ é a região no primeiro quadrante delimitada pelas hipérboles $xy=1$, $xy=3$, $x^2-y^2=3$, $x^2-y^2=4$.

**47.** O análogo para três variáveis da fórmula deduzida na parte (b) do Exercício 43 é

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \cdot \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 1$$

Use esse resultado para mostrar que o volume $V$ do paralelepípedo oblíquo limitado pelos planos $x+y+2z=\pm 3$, $x-2y+z=\pm 2$, $4x+y+z=\pm 6$ é $V=16$.

**48.** (a) Considere a transformação

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\operatorname{sen}\theta, \quad z=z$$

de coordenadas cilíndricas em retangulares, onde $r\geq 0$. Mostre que

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$$

(b) Considere a transformação

$$x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \quad y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \quad z=\rho\cos\phi$$

de coordenadas esféricas em retangulares, onde $0\leq\phi\leq\pi$. Mostre que

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2\operatorname{sen}\phi$$

**49.** **Texto** Com integrais de funções de uma variável, a técnica de substituição costuma ser usada para simplificar o integrando. Discuta algumas motivações para usar uma mudança de variáveis em integrais múltiplas.

**50.** **Texto** Suponha que as curvas de fronteira de uma região $R$ do plano $xy$ possam ser descritas por curvas de nível de algumas funções. Discuta como essa informação poderia ser usada para escolher uma mudança de variáveis apropriada em uma integral dupla em $R$. Ilustre sua discussão com um exemplo.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.7

**1.** (a) A imagem é a região do plano $xy$ englobada pelo paralelogramo de vértices $(1, 3)$, $(-3, 5)$, $(-1, 11)$ e $(3, 9)$ (b) $u = \frac{1}{7}(x + 2y)$, $v = \frac{1}{7}(y - 3x)$ **2.** $S$ é uma região do plano $uv$ e $R$ é a imagem de $S$ no plano $xy$ pela transformação $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. **3.** (a) 7 (b) $\int_0^2 \int_1^3 7e^{7u}\, du\, dv$ **4.** $2vw$

# 14.8 CENTROS DE GRAVIDADE USANDO INTEGRAIS MÚLTIPLAS

*Na Seção 6.7, no Volume 1, mostramos como encontrar a massa e o centro de gravidade de uma lâmina homogênea usando integrais simples. Nesta seção, vamos mostrar como as integrais duplas e triplas podem ser usadas para localizar centros de gravidade de lâmina e sólidos tridimensionais.*

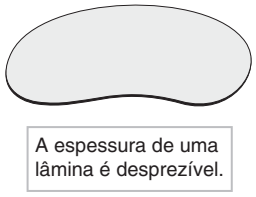



**Figura 14.8.1**

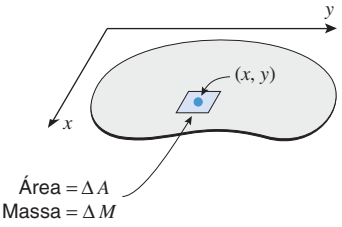



**Figura 14.8.2**

## DENSIDADE E MASSA DE UMA LÂMINA NÃO HOMOGÊNEA

Consideremos um objeto achatado idealizado suficientemente fino para ser imaginado como sendo uma região plana bidimensional (Figura 14.8.1). Dizemos que tal objeto é uma ***lâmina***. Uma lâmina é dita ***homogênea*** se sua composição for inteiramente uniforme, caso contrário é dita ***não homogênea***. A ***densidade*** de uma lâmina *homogênea* foi definida na Seção 6.7, no Volume 1, como sua massa por unidade de área. Assim, a densidade $\delta$ de uma lâmina homogênea de massa $M$ e área $A$ é dada por $\delta = M/A$.

Como em uma lâmina não homogênea a composição pode variar de ponto para ponto, uma definição apropriada de "densidade" deve refletir essa condição. Para estabelecer tal definição, suponha que a lâmina seja colocada em um plano $xy$. A densidade no ponto $(x, y)$ pode ser especificada por uma função $\delta(x, y)$, chamada de ***função densidade***, que pode ser interpretada como segue. Construa um pequeno retângulo centrado em $(x, y)$ e sejam $\Delta M$ e $\Delta A$ a massa e a área da porção da lâmina compreendida pelo retângulo (Figura 14.8.2). Se a relação $\Delta M / \Delta A$ tender para um valor limite à medida que as dimensões do retângulo (e, portanto, a área) tendem para zero, então esse limite será considerado como sendo a densidade da lâmina no ponto $(x, y)$. Simbolicamente,

$$\delta(x, y) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta A} \tag{1}$$

Dessa relação, obtemos a aproximação

$$\Delta M \approx \delta(x, y)\Delta A \tag{2}$$

que relaciona a massa com a área de uma pequena porção retangular da lâmina centrada no ponto $(x, y)$. Supõe-se que quando as dimensões do retângulo tendem para zero, o erro de aproximação também tenda para zero.

O seguinte resultado mostra como determinar a massa de uma lâmina a partir de sua função densidade.

**14.8.1** MASSA DE UMA LÂMINA Se uma lâmina com função densidade contínua $\delta(x, y)$ ocupar uma região $R$ do plano $xy$, então sua massa total $M$ será dada por

$$M = \iint_R \delta(x, y)\, dA \tag{3}$$

Essa fórmula pode ser motivada por um processo de limite conhecido que pode ser resumido como segue. Imagine que a lâmina seja subdividida em porções retangulares, usando

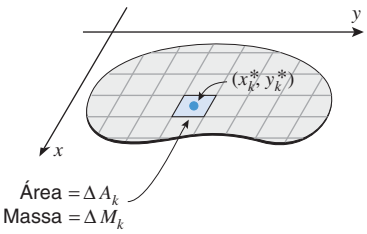



**Figura 14.8.3**

linhas paralelas aos eixos coordenados e excluindo de consideração quaisquer porções não retangulares que toquem a fronteira (Figura 14.8.3). Suponha que haja $n$ tais porções retangulares e suponha que o $k$-ésimo retângulo tenha área $\Delta A_k$. Se denotarmos o centro do $k$-ésimo retângulo por $(x_k^*, y_k^*)$, então, pela Fórmula (2), a massa $\Delta M_k$ desse retângulo pode ser aproximada por

$$\Delta M_k \approx \delta(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k \tag{4}$$

e, portanto, a massa $M$ da lâmina inteira pode ser aproximada por

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

Agora, se aumentarmos $n$ de tal modo que as dimensões dos retângulos tendam para zero, então é plausível que os erros de nossas aproximações tendam para zero, portanto

$$M = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k = \iint_R \delta(x, y)\, dA$$

► **Exemplo 1** Uma lâmina triangular de vértices (0, 0), (0, 1) e (1, 0) tem função densidade $\delta(x, y) = xy$. Calcule sua massa total.

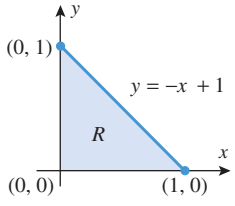



**Figura 14.8.4**

***Solução*** Referindo a (3) e à Figura 14.8.4, a massa $M$ da lâmina é

$$M = \iint_R \delta(x, y)\, dA = \iint_R xy\, dA = \int_0^1 \int_0^{-x+1} xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{-x+1} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x\right] dx = \frac{1}{24} \text{ (unidade de massa)} \blacktriangleleft$$

## CENTRO DE GRAVIDADE DE UMA LÂMINA NÃO HOMOGÊNEA

Lembre que o ***centro de gravidade*** de uma lâmina que ocupa uma região $R$ no plano horizontal $xy$ é o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ tal que o efeito da gravidade sobre a lâmina é "equivalente" ao de uma única força atuando em $(\bar{x}, \bar{y})$. Se $(\bar{x}, \bar{y})$ estiver em $R$, então a lâmina ficará equilibrada horizontalmente em um ponto de apoio colocado em $(\bar{x}, \bar{y})$. Na Seção 6.7, no Volume 1, mostramos como localizar o centro de gravidade de uma lâmina homogênea. Passamos, agora, a tratar desse problema para lâminas não homogêneas.

**14.8.2** PROBLEMA Suponha que uma lâmina com função densidade contínua $\delta(x, y)$ ocupe uma região $R$ em um plano horizontal $xy$. Determine as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de gravidade.

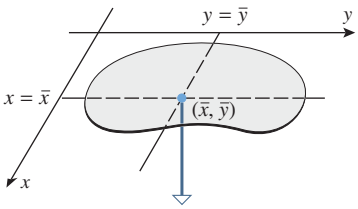



**Figura 14.8.5**

Para motivar a solução do Problema 14.8.2, considere o que acontece se tentarmos equilibrar a lâmina na Figura 14.8.5 no fio de uma faca ao longo da reta $y = \bar{y}$. Já que a lâmina se comporta como se toda a sua massa estivesse concentrada em $(\bar{x}, \bar{y})$, a lâmina estará em perfeito equilíbrio. Analogamente, a lâmina estará em perfeito equilíbrio se o fio da faca ficar ao longo da reta $x = \bar{x}$. Para encontrar essas retas de equilíbrio, começamos revendo alguns resultados da Seção 6.7 relativos a momentos.

Lembre que se uma massa pontual $m$ estiver localizada no ponto $(x, y)$, então o momento de $m$ em torno da reta $x = a$ mede a tendência da massa de produzir uma rotação em torno da reta $x = a$, e o momento de $m$ em torno da reta $y = c$ mede a tendência da massa de produzir uma rotação em torno da reta $y = c$. Os momentos são dados pelas fórmulas seguintes:

$$\begin{bmatrix}\text{momento de}\\ m \text{ em torno da}\\ \text{reta } x=a\end{bmatrix} = m(x-a) \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix}\text{momento de}\\ m \text{ em torno da}\\ \text{reta } y=c\end{bmatrix} = m(y-c) \tag{5–6}$$

Se um certo número de massas pontuais estiverem distribuídas pelo plano $xy$, então a soma de seus momentos em torno da reta $x = a$ será uma medida da tendência das massas de produzirem uma rotação do plano (visto como uma folha sem peso) em torno da reta $x = a$. Se a soma desses momentos for zero, então essa coleção de massas não produzirá nenhum efeito rotacional líquido em torno dessa reta. (Intuitivamente, isso significa que o plano estaria equilibrado em um fio de faca colocado ao longo da reta $x = a$. Analogamente, se a soma dos momentos das massas em torno de $y = c$ for zero, o plano estaria equilibrado num fio de faca colocado ao longo da reta $y = c$.)

Agora, estamos prontos para resolver o Problema 14.8.2. Imaginemos a lâmina subdividida em fragmentos retangulares por meio de retas parelelas aos eixos coordenados, excluindo-se de consideração quaisquer fragmentos que toquem a fronteira (Figura 14.8.3). Vamos supor que haja $n$ tais fragmentos retangulares e que o $k$-ésimo fragmento tenha área $\Delta A_k$ e massa $\Delta M_k$. Designemos por $(x_k^*, y_k^*)$ o centro do $k$-ésimo fragmento e vamos supor que toda a massa do $k$-ésimo fragmento esteja concentrada no seu centro. Por (4), a massa do $k$-ésimo fragmento pode ser aproximada por

$$\Delta M_k \approx \delta(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

Como a lâmina está em equilíbrio nas retas $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$, a soma dos momentos dos fragmentos retangulares em torno dessas retas deve estar próxima de zero; isto é

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^* - \bar{x})\Delta M_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k^* - \bar{x})\delta(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k \approx 0$$
$$\sum_{k=1}^{n}(y_k^* - \bar{y})\Delta M_k = \sum_{k=1}^{n}(y_k^* - \bar{y})\delta(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k \approx 0$$

Se, agora, aumentarmos $n$ de tal maneira que as dimensões dos retângulos tendam para zero, é plausível supor que os erros de nossas aproximações tendam para zero, de modo que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k^* - \bar{x})\delta(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(y_k^* - \bar{y})\delta(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k = 0$$

das quais obtemos

$$\iint_R (x-\bar{x})\delta(x,y)\,dA = \iint_R x\delta(x,y)\,dA - \bar{x}\iint_R \delta(x,y)\,dA = 0 \tag{7}$$

$$\iint_R (y-\bar{y})\delta(x,y)\,dA = \iint_R y\delta(x,y)\,dA - \bar{y}\iint_R \delta(x,y)\,dA = 0 \tag{8}$$

Resolvendo (7) e (8) respectivamente em $\bar{x}$ e $\bar{y}$, obtemos as seguintes fórmulas para o centro de gravidade de uma lâmina:

***centro de gravidade $(\bar{x}, \bar{y})$ de uma lâmina***

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\iint_R x\delta(x,y)\,dA}{\displaystyle\iint_R \delta(x,y)\,dA}, \qquad \bar{y} = \frac{\displaystyle\iint_R y\delta(x,y)\,dA}{\displaystyle\iint_R \delta(x,y)\,dA} \tag{9–10}$$

Observe que, em ambas as fórmulas, o denominador é a massa $M$ da lâmina [ver (3)]. O numerador da fórmula para $\bar{x}$ é denotado por $M_y$ e é chamado de ***primeiro momento da lâmina em torno do eixo y***; o numerador da fórmula de $\bar{y}$ é denotado por $M_x$ e é chamado de ***primeiro momento da lâmina em torno do eixo x***. Assim, as Fórmulas (9) e (10) podem ser expressas como

***Fórmulas Alternativas para o Centro de Gravidade $(\bar{x}, \bar{y})$ de uma Lâmina***

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{\text{massa de } R} \iint_R x\delta(x, y)\, dA \tag{9}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{\text{massa de } R} \iint_R y\delta(x, y)\, dA \tag{10}$$

**► Exemplo 2** Encontre o centro de gravidade da lâmina triangular de vértices (0, 0), (0, 1) e (1, 0) e função densidade $\delta(x, y) = xy$.

***Solução*** A lâmina é mostrada na Figura 14.8.4. No Exemplo 1, calculamos que a massa da lâmina é

$$M = \iint_R \delta(x, y)\, dA = \iint_R xy\, dA = \frac{1}{24}$$

O momento da lâmina em torno do eixo $y$ é

$$M_y = \iint_R x\delta(x, y)\, dA = \iint_R x^2 y\, dA = \int_0^1 \int_0^{-x+1} x^2 y\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{-x+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{60}$$

e o momento da lâmina em torno do eixo $x$ é

$$M_x = \iint_R y\delta(x, y)\, dA = \iint_R xy^2\, dA = \int_0^1 \int_0^{-x+1} xy^2\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}xy^3\right]_{y=0}^{-x+1} dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x\right) dx = \frac{1}{60}$$

Por (11) e (12),

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/60}{1/24} = \frac{2}{5}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/60}{1/24} = \frac{2}{5}$$

portanto, o centro de gravidade é $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$. ◄

Lembre-se de que, no caso especial de lâminas *homogêneas*, o centro de gravidade é chamado de ***centroide da lâmina*** ou, algumas vezes, ***centroide da região R***. Como a função densidade $\delta$ é constante para uma lâmina homogênea, o fator $\delta$ pode ser movido para fora dos sinais de integração de (9) e (10) e cancelado. Assim, o centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ é uma propriedade geométrica da região $R$ e é expresso pelas seguintes fórmulas:

***Centroide de uma Região R***

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\iint_R x\,dA}{\displaystyle\iint_R dA} = \frac{1}{\text{área de } R}\iint_R x\,dA \tag{13}$$

$$\bar{y} = \frac{\displaystyle\iint_R y\,dA}{\displaystyle\iint_R dA} = \frac{1}{\text{área de } R}\iint_R y\,dA \tag{14}$$

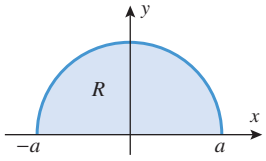



**Figura 14.8.6**

► **Exemplo 3** Calcule o centroide da região semicircular da Figura 14.8.6.

***Solução*** Por simetria, $\bar{x} = 0$ visto que o eixo dos $y$ é, obviamente, uma reta de equilíbrio. Por (14),

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{área de } R}\iint_R y\,dA = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2}\iint_R y\,dA$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2}\int_0^{\pi}\int_0^{a}(r\,\text{sen}\,\theta)r\,dr\,d\theta \qquad \text{Calculando em coordenadas polares}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\,\text{sen}\,\theta\right]_{r=0}^{a} d\theta$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2}\left(\frac{1}{3}a^3\right)\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi a^2}\left(\frac{2}{3}a^3\right) = \frac{4a}{3\pi}$$

Compare as contas no Exemplo 3 com as do Exemplo 3 da Seção 6.7, no Volume 1.

de modo que o centroide é $\left(0, \dfrac{4a}{3\pi}\right)$. ◄

## CENTRO DE GRAVIDADE E CENTROIDE DE UM SÓLIDO

Para um sólido tridimensional $G$, as fórmulas dos momentos, do centro de gravidade e do centroide são semelhantes às das lâminas. Se $G$ for *homogêneo*, então sua ***densidade*** é definida como sendo sua massa por unidade de volume. Dessa forma, se $G$ for um sólido homogêneo de massa $M$ e volume $V$, então sua densidade é dada por $\delta = M/V$. Se $G$ for não homogêneo e estiver em um sistema de coordenadas $xyz$, então sua densidade no ponto genérico $(x, y, z)$ é especificada pela ***função densidade*** $\delta(x, y, z)$, cujo valor em um ponto pode ser considerado como um limite:

$$\delta(x, y, z) = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{\Delta M}{\Delta V}$$

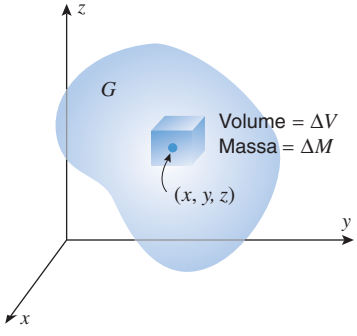



**Figura 14.8.7**

onde $\Delta M$ e $\Delta V$ representam a massa e o volume de um paralelepípedo retangular, com centro em $(x, y, z)$, cujas dimensões tendem para zero (Figura 14.8.7).

Usando a discussão sobre lâminas como modelo, o leitor deve ser capaz de mostrar que a massa $M$ de um sólido com função densidade contínua $\delta(x, y, z)$ é

$$M = \text{massa de } G = \iiint_G \delta(x, y, z)\,dV \tag{15}$$

As fórmulas para o centro de gravidade e o centroide são

**centro de gravidade $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de um sólido $G$**

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_G x\delta(x, y, z)\,dV$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_G y\delta(x, y, z)\,dV$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_G z\delta(x, y, z)\,dV$$

**centróide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de um sólido $G$**

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\iiint_G x\,dV$$

$$\bar{y} = \frac{1}{V}\iiint_G y\,dV$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_G z\,dV$$

(16–17)

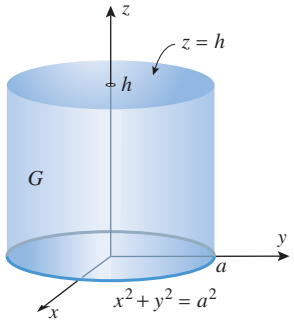



**Figura 14.8.8**

► **Exemplo 4** Calcule a massa e o centro de gravidade de um sólido cilíndrico de altura $h$ e raio $a$ (Figura 14.8.8), supondo que a densidade em cada ponto seja proporcional à distância entre o ponto e a base do sólido.

***Solução*** Como a densidade é proporcional à distância $z$ da base, a função densidade tem a forma $\delta(x, y, z) = kz$, onde $k$ é alguma constante de proporcionalidade positiva (desconhecida). Por (15), a massa do sólido é

$$M = \iiint_G \delta(x, y, z)\,dV = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^h kz\,dz\,dy\,dx$$

$$= k\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{2}h^2\,dy\,dx$$

$$= kh^2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}kh^2\pi a^2$$

Interprete a integral como a área de um semicírculo.

Sem informações adicionais, a constante $k$ não pode ser determinada. Entretanto, como veremos agora, o valor de $k$ não afeta o centro de gravidade.

Por (16),

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_G z\delta(x, y, z)\,dV = \frac{1}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2}\iiint_G z\delta(x, y, z)\,dV$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2}\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^h z(kz)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \frac{k}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2}\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{3}h^3\,dy\,dx$$

$$= \frac{\frac{1}{3}kh^3}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2}\int_{-a}^{a}2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{\frac{1}{3}kh^3\pi a^2}{\frac{1}{2}kh^2\pi a^2} = \frac{2}{3}h$$

Cálculos semelhantes, usando a expressão (16), darão $\bar{x} = \bar{y} = 0$. No entanto, isso é evidente por inspeção, visto que decorre da simetria do sólido e da forma de sua função densidade que o centro de gravidade está no eixo $z$. Assim, o centro de gravidade é $\left(0, 0, \frac{2}{3}h\right)$. ◄

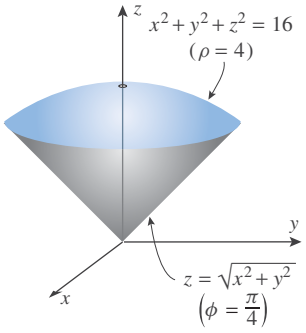



**Figura 14.8.9**

**► Exemplo 5** Encontre o centroide do sólido $G$ delimitado abaixo pela folha de cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

***Solução*** O sólido $G$ está esboçado na Figura 14.8.9. No Exemplo 3 da Seção 14.6, usamos coordenadas esféricas para mostrar que o volume de $G$ é

$$V = \frac{64\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$$

Por simetria, o centroide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ está no eixo $z$, de modo que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Em coordenadas esféricas, a equação da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ é $\rho = 4$ e a equação do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é $\phi = \pi/4$, de modo que, por (17), temos

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{V}\iiint_G z\,dV = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^4 (\rho\cos\phi)\rho^2\,\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\
&= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\left[\frac{\rho^4}{4}\cos\phi\,\operatorname{sen}\phi\right]_{\rho=0}^{4} d\phi\,d\theta \\
&= \frac{64}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi\,d\theta = \frac{64}{V}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi\right]_{\phi=0}^{\pi/4} d\theta \\
&= \frac{16}{V}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi}{V} = \frac{3}{2(2-\sqrt{2})}
\end{aligned}$$

O centroide de $G$ é

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{3}{2(2-\sqrt{2})}\right) \approx (0; 0; 2{,}561)$$ ◄

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.8 (*Ver página 1080 para respostas.*)

1. A massa total da lâmina de função densidade contínua $\delta(x, y)$ que ocupa a região $R$ do plano $xy$ é dada por $M =$ _____.
2. Considere a lâmina de massa $M$ e função densidade contínua $\delta(x, y)$ que ocupa a região $R$ do plano $xy$. A coordenada $x$ do centro de gravidade da lamina é $M_y/M$, onde $M_y$ é chamado _____ e é dado pela integral dupla _____.
3. Seja $R$ a região entre os gráficos de $y = x^2$ e $y = 2 - x$, com $0 \le x \le 1$. A área de $R$ é $\frac{7}{6}$ e o centroide de $R$ é _____.

## EXERCÍCIOS 14.8 Recurso Gráfico C CAS

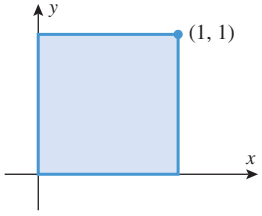
**1-4** Encontre a massa e o centro de gravidade da lâmina. ■

1. Uma lâmina com densidade $\delta(x, y) = x + y$, limitada pelo eixo $x$ das abcissas, a reta $x = 1$ e a curva $y = \sqrt{x}$.
2. Uma lâmina com densidade $\delta(x, y) = y$, limitada por $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi$.
3. Uma lâmina com densidade $\delta(x, y) = xy$, localizada no primeiro quadrante e limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = a^2$ e os eixos de coordenadas.
4. Uma lâmina com densidade $\delta(x, y) = x^2 + y^2$, limitada pelo eixo $x$ e a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = 1$.

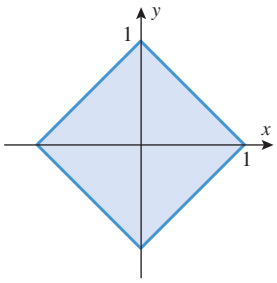
### ENFOCANDO CONCEITOS

**5-6** Para as funções densidade dadas, faça uma conjectura sobre as coordenadas do centro de gravidade e confirme sua conjectura por integração. ■

5. $\delta(x, y) = |x + y - 1|$

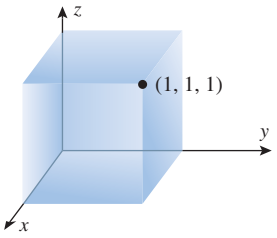


**6.** $\delta(x, y) = 1 + x^2 + y^2$

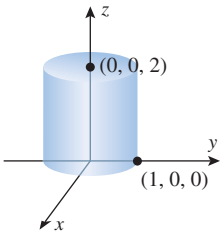



**7-8** Faça uma conjectura sobre as coordenadas do centroide e confirme-a por integração. ■

**7.**




**8.**




**9-12 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**9.** O centro de gravidade de uma lâmina homogênea no plano está localizada no centroide da lâmina.

**10.** A massa de uma lâmina bidimensional é o produto de sua área pela densidade da lâmina em seu centroide.

**11.** As coordenadas do centro de gravidade de uma lâmina bidimensional são dadas pelos primeiros momentos em torno dos eixos $y$ e $x$, respectivamente.

**12.** A densidade de um sólido no espaço tridimensional é medida em unidades de massa por área unitária.

**13.** Mostre que, em coordenadas polares, as fórmulas para o centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de uma região $R$ são

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta$$

**14-17** Use o resultado do Exercício 13 para calcular o centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ da região. ■

**14.** A região envolvida pela cardioide $r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$.

**15.** A pétala da rosácea $r = \operatorname{sen} 2\theta$ do primeiro quadrante.

**16.** A região acima do eixo $x$ das abcissas e entre os círculos $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$ $(a < b)$.

**17.** A região compreendida entre o eixo $y$ e a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

**18.** Seja $R$ o retângulo limitado pelas retas $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ e $y = 2$. Por inspeção, encontre o centroide de $R$ e use-o para calcular

$$\iint_R x \, dA \quad \text{e} \quad \iint_R y \, dA$$

**19-24** Encontre o centroide do sólido. ■

**19.** O tetraedro do primeiro octante compreendido pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.

**20.** O sólido limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e os planos $x + z = 1$, $x = 0$ e $z = 0$.

**21.** O sólido limitado pela superfície $z = y^2$ e os planos $x = 0$, $x = 1$ e $z = 1$.

**22.** O sólido no primeiro octante limitado pela superfície $z = xy$ e os planos $z = 0$, $x = 2$ e $y = 2$.

**23.** O sólido no primeiro octante limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e os planos coordenados.

**24.** O sólido envolvido pelo plano $xy$ e o hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

**25-28** Encontre a massa e o centro de gravidade do sólido. ■

**25.** O cubo com densidade $\delta(x, y, z) = a - x$, definido pelas desigualdades $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$ e $0 \le z \le a$.

**26.** O sólido cilíndrico com densidade $\delta(x, y, z) = h - z$, envolvido por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ e $z = h$.

**27.** O sólido com densidade $\delta(x, y, z) = yz$, envolvido por $z = 1 - y^2$ (para $y \ge 0$), $z = 0$, $y = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.

**28.** O sólido com densidade $\delta(x, y, z) = xz$, envolvido por $y = 9 - x^2$ (para $x \ge 0$), $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $z = 1$.

**29.** Encontre o centro de gravidade da lâmina quadrada com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ se a densidade for proporcional
(a) ao quadrado da distância à origem;
(b) à distância ao eixo $y$.

**30.** Encontre o centro de gravidade do cubo determinado pelas desigualdades $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ se a densidade for proporcional
(a) ao quadrado da distância à origem;
(b) à soma das distâncias às faces do cubo que estão nos planos coordenados.

**C 31.** Use a capacidade de integração tripla numérica de um CAS para aproximar a localização do centroide do sólido que é limitado acima pela superfície $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$, abaixo pelo plano $xy$ e lateralmente pelo plano $y = 0$ e a superfície $y = \operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le \pi$ (ver figura a seguir).

**32.** A figura a seguir mostra o sólido limitado acima pela superfície $z = 1/(x^2 + y^2 + 1)$, abaixo pelo plano $xy$ e lateralmente pela superfície $x^2 + y^2 = a^2$.

(a) Por simetria, o centroide do sólido fica no eixo dos $z$. Faça uma conjectura sobre o comportamento da coordenada $z$ do centroide quando $a \to 0^+$ e quando $a \to +\infty$.
(b) Calcule a coordenada $z$ do centroide e verifique sua conjectura calculando os limites adequados.
(c) Use um recurso gráfico para fazer um gráfico da coordenada $z$ do centroide *versus* $a$ e use o gráfico para estimar o valor de $a$ para o qual o centroide é $(0; 0; 0{,}25)$.

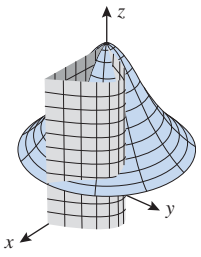



**Figura Ex-31**

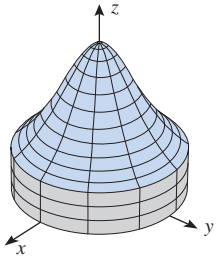



**Figura Ex-32**

**33-34** Use coordenadas cilíndricas. ■

**33.** Calcule a massa do sólido com densidade $\delta(x, y, z) = 3 - z$, compreendido pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 3$.

**34.** Calcule a massa de um cilindro circular reto de raio $a$ e altura $h$ se a densidade for proporcional à distância à base (tomando $k$ como a constante de proporcionalidade).

**35-36** Use coordenadas esféricas. ■

**35.** Calcule a massa da esfera sólida de raio $a$ com densidade proporcional à distância ao centro (tomando $k$ como a constante de proporcionalidade).

**36.** Calcule a massa do sólido compreendido entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com densidade $\delta(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

**37-38** Use coordenadas cilíndricas para encontrar o centroide do sólido. ■

**37.** O sólido limitado acima pela esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

e abaixo pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$.

**38.** O sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 2$.

**39-40** Use as fórmulas de Wallis ao final do livro.

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \quad \begin{pmatrix} n \text{ par} \\ \text{e } \geq 2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n} \quad \begin{pmatrix} n \text{ ímpar} \\ \text{e } \geq 3 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \quad \begin{pmatrix} n \text{ par} \\ \text{e } \geq 2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n} \quad \begin{pmatrix} n \text{ ímpar} \\ \text{e } \geq 3 \end{pmatrix} \blacksquare$$

**39.** Encontre o centroide do sólido limitado acima pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$, abaixo pelo plano $z = 0$ e lateralmente pelo cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

**40.** Calcule a massa do sólido no primeiro octante limitado acima pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, abaixo pelo plano $z = 0$ e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e o plano $y = 0$, supondo que a densidade seja $\delta(x, y, z) = z$.

**41-42** Use coordenadas esféricas para encontrar o centroide do sólido. ■

**41.** O sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**42.** O sólido limitado acima pela esfera $\rho = 4$ e abaixo pelo cone $\phi = \pi/3$.

**43.** Calcule a massa do sólido delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e que fica dentro do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ se a densidade for $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

**44.** Encontre o centro de gravidade do sólido limitado pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano $xy$, supondo que a densidade seja $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

**45.** Encontre o centro de gravidade do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $xy$ se a densidade for $\delta(x, y, z) = z$.

**46.** Encontre o centro de gravidade do hemisfério sólido limitado por $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e $z = 0$ se a densidade for proporcional à distância da origem.

**47.** Encontre o centroide do sólido envolvido pelos hemisférios $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$, $y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$ e o plano $y = 0$.

**48.** Suponha que a densidade em um ponto de uma estrela esférica gasosa seja modelada pela fórmula

$$\delta = \delta_0 e^{-(\rho/R)^3}$$

onde $\delta_0$ é uma constante positiva, $R$ é o raio da estrela e $\rho$ é a distância do ponto ao centro da estrela. Calcule a massa da estrela.

**49-50** A tendência de uma lâmina de resistir a uma mudança no movimento rotatório em torno de um eixo é medida por seu ***momento de inércia*** em torno daquele eixo. Se a lâmina ocupar uma região $R$ do plano $xy$ e se a função densidade $\delta(x, y)$ for contínua em $R$, então os momentos de inércia em torno dos eixos $x$, $y$ e $z$ são denotados por $I_x$, $I_y$ e $I_z$, respectivamente, e são definidos por

$$I_x = \iint_R y^2\, \delta(x, y)\, dA, \quad I_y = \iint_R x^2\, \delta(x, y)\, dA,$$
$$I_z = \iint_R (x^2 + y^2)\, \delta(x, y)\, dA$$

Essas definições serão usadas nos Exercícios 49 e 50. ■

**49.** Considere a lâmina retangular que ocupa a região descrita pelas desigualdades $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$. Supondo que a lâmina tenha densidade constante $\delta$, mostre que

$$I_x = \frac{\delta a b^3}{3}, \quad I_y = \frac{\delta a^3 b}{3}, \quad I_z = \frac{\delta ab(a^2 + b^2)}{3}$$

**50.** Considere a lâmina circular que ocupa a região descrita pelas desigualdades $0 \le x^2 + y^2 \le a^2$. Supondo que a lâmina tenha densidade constante $\delta$, mostre que

$$I_x = I_y = \frac{\delta\pi a^4}{4}, \quad I_z = \frac{\delta\pi a^4}{2}$$

**51-54** A tendência de um sólido para resistir a uma mudança no movimento rotatório em torno de um eixo é medida por seu ***momento de inércia*** em torno daquele eixo. Se um sólido ocupa uma região $G$ em um sistema de coordenadas $xyz$ e se sua função densidade $\delta(x, y, z)$ for contínua em $G$, então os momentos de inércia em torno dos eixos $x$, $y$ e $z$ são denotados, respectivamente, por $I_x$, $I_y$ e $I_z$ e são definidos por

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2)\,\delta(x, y, z)\,dV$$
$$I_y = \iiint_G (x^2 + z^2)\,\delta(x, y, z)\,dV$$
$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2)\,\delta(x, y, z)\,dV$$

Nestes exercícios, determine o momento de inércia do sólido indicado, supondo que tenha densidade $\delta$ constante. ■

**51.** $I_z$ para o cilindro sólido $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$.

**52.** $I_y$ para o cilindro sólido $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$.

**53.** $I_z$ para o cilindro oco $a_1^2 \le x^2 + y^2 \le a_2^2$, $0 \le z \le h$.

**54.** $I_z$ para a esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$.

**55-59** Esses exercícios se referem ao ***Teorema de Pappus***:
*Se $R$ for uma região plana e $L$ for uma reta pertencente ao plano de $R$ tal que $R$ está inteiramente de um lado de $L$, então o volume do sólido gerado pela revolução de $R$ em torno de $L$ será dado por*

$$\text{volume} = (\text{área de } R) \cdot \left(\begin{array}{c}\text{distância percorrida}\\ \text{pelo centroide}\end{array}\right)$$

**55.** Siga os passos a seguir para demonstrar o Teorema de Pappus:

(a) Introduza um sistema de coordenadas $xy$ de tal modo que $L$ esteja no eixo $y$ e a região $R$ no primeiro quadrante. Subdivida $R$ em subregiões retangulares da maneira usual e seja $R_k$ uma subregião típica de $R$ centrada em $(x_k^*, y_k^*)$ e com área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$. Mostre que o volume gerado por $R_k$ quando gira em torno da reta $L$ é

$$2\pi x_k^* \Delta x_k \Delta y_k = 2\pi x_k^* \Delta A_k$$

(b) Mostre que o volume gerado por $R$ quando gira em torno de $L$ é

$$V = \iint_R 2\pi x\,dA = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot [\text{área de } R]$$

**56.** Use o Teorema de Pappus e o resultado do Exemplo 3 para encontrar o volume do sólido gerado quando a região limitada pelo eixo $x$ e o semicírculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ gira em torno da
(a) reta $y = -a$ (b) reta $y = x - a$.

**57.** Use o Teorema de Pappus e o fato de que a área de uma elipse com semieixos $a$ e $b$ é $\pi ab$ para calcular o volume do toro elíptico gerado pela revolução da elipse

$$\frac{(x-k)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em torno do eixo $y$. Suponha que $k > a$.

**58.** Use o Teorema de Pappus para calcular o volume do sólido gerado quando a região envolvida por $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$ é girada em torno do eixo $x$.

**59.** Use o Teorema de Pappus para calcular o centroide da região triangular com vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ e $(0, b)$, onde $a > 0$ e $b > 0$. [*Sugestão*: Gire a região em torno do eixo dos $x$ para obter $\bar{y}$ e em torno do eixo dos $y$ para obter $\bar{x}$]

**60.** Pode ser provado que se uma região plana limitada deslizar ao longo de uma hélice de tal modo que é sempre ortogonal à hélice (ou seja, ortogonal ao vetor tangente unitário à hélice), o volume varrido pela região é igual à área da região vezes a distância percorrida pelo seu centroide. Use esse resultado para calcular o volume do "tubo" da figura a seguir que é varrido por um círculo de raio $\frac{1}{2}$ que desliza ao longo da hélice

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \frac{t}{4} \qquad (0 \le t \le 4\pi)$$

de tal maneira que o círculo está sempre centrado na hélice e fica no plano perpendicular à hélice.

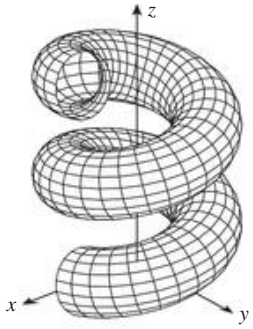


**Figura Ex-60**

**61.** **Texto** Dê uma interpretação física do "centro de gravidade" de uma lâmina.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 14.8

**1.** $\iint_R \delta(x, y)\,dA$ **2.** primeiro momento em torno do eixo $y$; $\iint_R x\delta(x, y)\,dA$ **3.** $\left(\frac{5}{14}, \frac{32}{35}\right)$

## EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 14

**1.** A integral dupla em uma região $R$ do plano $xy$ é definida como

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\, \Delta A_k$$

Descreva o procedimento no qual é baseada essa definição.

**2.** A integral tripla em um sólido $G$ em um sistema de coordenadas $xyz$ é definida como

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta V_k$$

Descreva o procedimento no qual é baseada essa definição.

**3.** (a) Expresse a área de uma região $R$ do plano $xy$ como uma integral dupla.
(b) Expresse o volume de uma região $G$ em um sistema de coordenadas $xyz$ como uma integral tripla.
(c) Expresse a área da parte da superfície $z = f(x, y)$ que fica acima da região $R$ do plano $xy$ como uma integral dupla.

**4.** (a) Escreva equações paramétricas de uma esfera de raio $a$ e centro na origem.
(b) Escreva equações paramétricas do cilindro circular reto de raio $a$ e altura $h$ que tem centro no eixo $z$, base no plano $xy$ e se prolonga na direção $z$ positivo.

**5.** Seja $R$ a região da figura a seguir. Preencha os limites de integração que faltam na integral iterada

$$\int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dx\, dy$$

em $R$.

**6.** Seja $R$ a região mostrada na figura a seguir. Preencha os limites de integração que faltam na soma das integrais iteradas

$$\int_0^2 \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dy\, dx + \int_2^3 \int_{\square}^{\square} f(x, y)\, dy\, dx$$

em $R$.

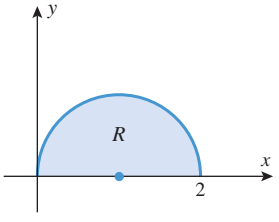



**Figura Ex-5**

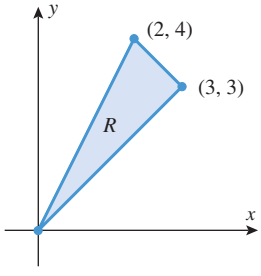



**Figura Ex-6**

**7.** (a) Encontre as constantes $a$, $b$, $c$ e $d$ tais que a transformação $x = au + bv$, $y = cu + dv$ transforme a região $S$ da figura abaixo na região $R$.
(b) Encontre a área do paralelogramo $R$ integrando na região $S$ e verifique sua resposta usando uma fórmula da Geometria.

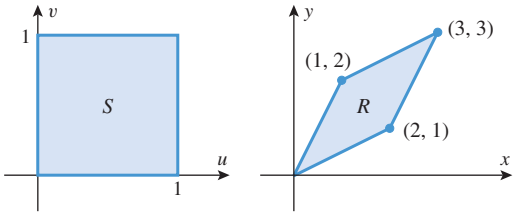



**Figura Ex-7**

**8.** Dê uma explicação geométrica para mostrar que

$$0 < \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \sqrt{xy}\, dy\, dx < \pi^2$$

**9-10** Calcule a integral iterada. ■

**9.** $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \int_0^{2x} \cos(\pi x^2)\, dy\, dx$ **10.** $\displaystyle\int_0^2 \int_{-y}^{2y} x e^{y^3}\, dx\, dy$

**11-12** Expresse a integral iterada como uma integral iterada equivalente com a ordem de integração invertida. ■

**11.** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{x/2} e^x e^y\, dy\, dx$ **12.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_y^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx\, dy$

**13-14** Esboce a região cuja área está representada pela integral iterada. ■

**13.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_{\operatorname{tg}(x/2)}^{\operatorname{sen} x} dy\, dx$

**14.** $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_a^{a(1+\cos\theta)} r\, dr\, d\theta \quad (a > 0)$

**15-16** Calcule as integrais duplas. ■

**15.** $\displaystyle\iint_R x^2 \operatorname{sen} y^2\, dA$; $R$ é região limitada por $y = x^3$, $y = -x^3$ e $y = 8$.

**16.** $\displaystyle\iint_R (4 - x^2 - y^2)\, dA$; $R$ é o setor do primeiro quadrante limitado pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$ e pelos eixos de coordenadas.

**17.** Converta para coordenadas retangulares e calcule:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2a \operatorname{sen}\theta} r \operatorname{sen} 2\theta\, dr\, d\theta$$

**18.** Converta para coordenadas polares e calcule:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} 4xy\, dy\, dx$$

**19-20** Calcule a área da região usando uma integral dupla. ■

**19.** A região limitada por $y = 2x^3$, $2x + y = 4$ e o eixo $x$.

**20.** A região envolvida pela rosácea $r = \cos 3\theta$.

**21.** Converta para coordenadas cilíndricas e calcule:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{(x^2+y^2)^2}^{16} x^2\,dz\,dy\,dx$$

**22.** Converta para coordenadas esféricas e calcule:

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

**23.** Seja $G$ a região limitada acima pela esfera $\rho = a$ e abaixo pelo cone $\phi = \pi/3$. Expresse

$$\iiint_G (x^2+y^2)\,dV$$

como uma integral iterada em coordenadas
(a) esféricas (b) cilíndricas
(c) retangulares

**24.** Seja $G = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \le z \le 4x\}$. Expresse o volume de $G$ como uma integral iterada em coordenadas
(a) retangulares (b) cilíndricas

**25-26** Calcule o volume do sólido usando uma integral tripla. ■

**25.** O sólido limitado abaixo pelo cone $\phi = \pi/6$ e acima pelo plano $z = a$.

**26.** O sólido compreendido entre as superfícies $x = y^2 + z^2$ e $x = 1 - y^2$.

**27.** Encontre a área da porção da superfície $z = 3y + 2x^2 + 4$ que fica acima da região triangular de vértices (0, 0), (1, 1) e (1, −1).

**28.** Calcule a área de superfície da parte do paraboloide hiperbólico

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$$

em que $u^2 + v^2 \le 4$.

**29-30** Determine a equação do plano tangente à superfície no ponto especificado. ■

**29.** $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$; $u = 1$, $v = 2$

**30.** $x = u\cosh v$, $y = u\,\text{senh}\,v$, $z = u^2$; $(-3, 0, 9)$

**31.** Queremos transformar uma integral dupla em uma região $R$ do plano $xy$ em uma integral dupla equivalente em uma região $S$ do plano $uv$. Descreva um procedimento que poderia ser utilizado.

**32.** Use a transformação $u = x - 3y$, $v = 3x + y$ para obter

$$\iint_R \frac{x - 3y}{(3x + y)^2}\,dA$$

onde $R$ é a região retangular englobada pelas retas $x - 3y = 0$, $x - 3y = 4$, $3x + y = 1$ e $3x + y = 3$.

**33.** Seja $G$ o sólido do espaço tridimensional definido pelas desigualdades

$$1 - e^x \le y \le 3 - e^x, \quad 1 - y \le 2z \le 2 - y, \quad y \le e^x \le y + 4$$

(a) Usando a transformação de coordenadas

$$u = e^x + y, \quad v = y + 2z, \quad w = e^x - y$$

calcule o jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$. Expresse sua resposta em termos de $u$, $v$ e $w$.
(b) Usando uma integral tripla e a mudança de variáveis dada em (a), encontre o volume de $G$.

**34.** Calcule a distância média de um ponto no interior de uma esfera de raio $a$ ao centro. [Ver a definição que precede o Exercício 33 da Seção 14.5.]

**35-36** Encontre o centroide da região. ■

**35.** A região limitada por $y^2 = 4x$ e $y^2 = 8(x - 2)$.

**36.** A metade superior da elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

**37-38** Encontre o centroide do sólido. ■

**37.** O cone sólido com vértice $(0, 0, h)$ e base $x^2 + y^2 \le a^2$ no plano $xy$.

**38.** O sólido limitado por $y = x^2$, $z = 0$ e $y + z = 4$.

## CAPÍTULO 14 ESTABELECENDO CONEXÕES C CAS

**1.** A integral $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ que aparece na teoria das probabilidades pode ser calculada usando-se o seguinte método. Seja $I$ o valor da integral. Então

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$$

uma vez que a letra usada para a variável de integração em uma integral definida não tem importância.
(a) Dê um argumento razoável para mostrar que

$$I^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

(b) Calcule a integral iterada da parte (a) convertendo para coordenadas polares.
(c) Use o resultado da parte (b) para mostrar que $I = \sqrt{\pi}/2$.

**2.** Mostre que

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}$$

[*Sugestão*: Ver Exercício 1.]

**C 3.** (a) Use a capacidade de integração numérica de um CAS para fazer uma aproximação do valor da integral dupla

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx$$

(b) Compare a aproximação obtida na parte (a) com a aproximação que resulta se a integral for convertida antes para coordenadas polares.

C **4.** (a) Determine a região $G$ na qual a integral tripla

$$\iiint_G (1 - x^2 - y^2 - z^2)\, dV$$

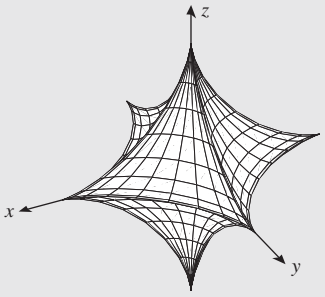
tem seu valor máximo.

(b) Use a operação integral tripla numérica de um CAS para aproximar o valor máximo.

(c) Encontre o valor máximo exato.

**5-6** A figura a seguir mostra o gráfico de uma ***esfera astroidal***

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$$ ■




C **5.** (a) Mostre que essa superfície pode ser representada parametricamente como

$$x = a(\operatorname{sen} u \cos v)^3$$
$$y = a(\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)^3 \qquad (0 \le u \le \pi,\ \ 0 \le v \le 2\pi)$$
$$z = a(\cos u)^3$$

(b) Use um CAS para aproximar a área da superfície no caso em que $a = 1$.

**6.** Encontre o volume de uma esfera astroidal usando uma integral tripla e a transformação

$$x = \rho(\operatorname{sen}\phi \cos\theta)^3$$
$$y = \rho(\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta)^3$$
$$z = \rho(\cos\phi)^3$$

com $0 \le \rho \le a$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

NASA Goddard Space Flight Center (NASA/GSFC)

# 15 TÓPICOS DO CÁLCULO VETORIAL

*Os resultados deste capítulo fornecem ferramentas para analisar e entender o comportamento de furacões e outros fluxos fluidos.*

O tema principal deste capítulo é o conceito de "fluxo". O ramo da Matemática que estudaremos aqui preocupa-se com a análise de vários tipos de fluxos: por exemplo, o fluxo de um fluido ou o fluxo da eletricidade. Na verdade, os primeiros textos de Cálculo de Isaac Newton estão repletos de termos como "fluxão" e "fluente", que têm como raiz o termo latim *fluere* (fluir). Começaremos o capítulo introduzindo o conceito de campo vetorial, que é a descrição matemática de um fluxo. Em seções subsequentes, introduziremos dois novos tipos de integrais, que são usadas em uma ampla variedade de aplicações para analisar as propriedades de campos vetoriais e de fluxos. Finalmente, concluiremos com três teoremas básicos: o Teorema de Green, o Teorema da Divergência e o Teorema de Stokes. Esses teoremas proporcionam uma visão profunda da natureza dos fluxos e constituem a base de muitos dos princípios mais importantes da Física e da Engenharia.

## 15.1 CAMPOS VETORIAIS

*Nesta seção, consideraremos funções que associam vetores com pontos no espaço bi ou tridimensional. Veremos que tais funções desempenham um papel importante no estudo de fluxos fluidos, campos de forças gravitacionais, campos de forças eletromagnéticas e uma ampla variedade de outros problemas aplicados.*

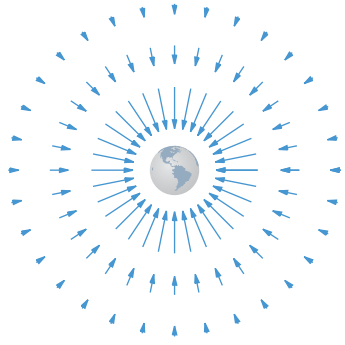


**Figura 15.1.1**

### CAMPOS VETORIAIS

Para motivar as ideias matemáticas desta seção, considere um ponto de massa *unitária* localizado em qualquer ponto do Universo. De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a Terra exerce uma força atrativa sobre a massa na direção do centro da Terra e de grandeza inversamente proporcional ao quadrado da distância da massa ao centro da Terra (Figura 15.1.1). Essa associação de vetores de força com pontos no espaço é chamada de *campo gravitacional* da Terra. Uma ideia similar surge no fluxo fluido. Imagine uma corrente em que a água flui horizontalmente em qualquer nível e considere a camada de água em uma profundidade específica. Em cada ponto da camada, a água tem uma certa velocidade, que podemos representar por um vetor naquele ponto (Figura 15.1.2). Essa associação de vetores velocidade com pontos em uma camada bidimensional é denominada *campo de velocidades* nessa camada. Essas ideias são encampadas na definição seguinte.

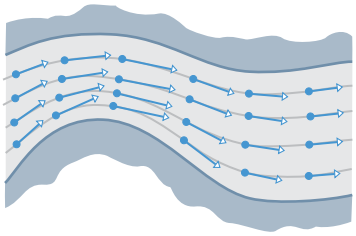


Figura 15.1.2

**15.1.1 DEFINIÇÃO** Um ***campo vetorial*** em um plano é uma função que associa a cada ponto $P$ do plano um único vetor $\mathbf{F}(P)$ paralelo ao plano. Analogamente, um campo vetorial no espaço tridimensional é uma função que associa a cada ponto $P$ do espaço tridimensional um único vetor $\mathbf{F}(P)$ do espaço.

Observe que um campo vetorial é apenas uma função vetorial. O termo "campo vetorial" é muito usado na Física e nas Engenharias.

Observe que nessa definição não há referência a um sistema de coordenadas. Entretanto, para fins de cálculo é, normalmente, desejável introduzir um sistema de coordenadas, de modo que se possa designar componentes para os vetores. Especificamente, se $\mathbf{F}(P)$ for um campo vetorial em um sistema de coordenadas $xy$, então o ponto $P$ terá coordenadas $(x, y)$ e o vetor associado terá componentes que são funções de $x$ e $y$. Assim, o campo vetorial $\mathbf{F}(P)$ pode ser expresso como

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

De modo análogo, no espaço tridimensional com um sistema de coordenadas $xyz$, um campo vetorial $\mathbf{F}(P)$ pode ser expresso como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

## REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE CAMPOS VETORIAIS

Um campo vetorial no espaço bidimensional pode ser visto geometricamente desenhando-se vetores representativos $\mathbf{F}(x, y)$ em alguns pontos bem selecionados do plano $xy$. Porém, assim como normalmente não é possível descrever completamente uma curva plana localizando um número finito de pontos, também não é normalmente possível descrever um campo vetorial localizando um número finito de vetores. Ainda assim, tais representações gráficas podem fornecer informações úteis acerca do comportamento geral do campo se os vetores forem escolhidos adequadamente. Entretanto, representações gráficas de campos vetoriais requerem um volume substancial de cálculos, de modo que são geralmente criadas com o uso de computadores. A Figura 15.1.3 mostra quatro campos vetoriais gerados em computador. O campo vetorial na parte $(a)$ poderia descrever a velocidade da corrente em um córrego em várias profundidades. No fundo do córrego, a velocidade é zero, mas a velocidade da corrente aumenta à medida que a profundidade diminui. Pontos à mesma profundidade têm a mesma velocidade. O campo vetorial da parte $(b)$ poderia descrever a velocidade de pontos de uma roda em movimento. No centro da roda, a velocidade é nula, mas a velocidade aumenta com a distância do centro. Pontos à mesma distância do centro têm a mesma velocidade. O campo vetorial da parte $(c)$ poderia descrever a força de repulsão de uma corrente elétrica – quanto mais perto da carga, maior é a força repulsora. A parte $(d)$ mostra um campo vetorial no espa-

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

Se o leitor dispuser de um recurso gráfico que possa gerar campos vetoriais, leia a documentação pertinente e tente fazer duplicatas razoáveis das partes $(a)$ e $(b)$ da Figura 15.1.3.

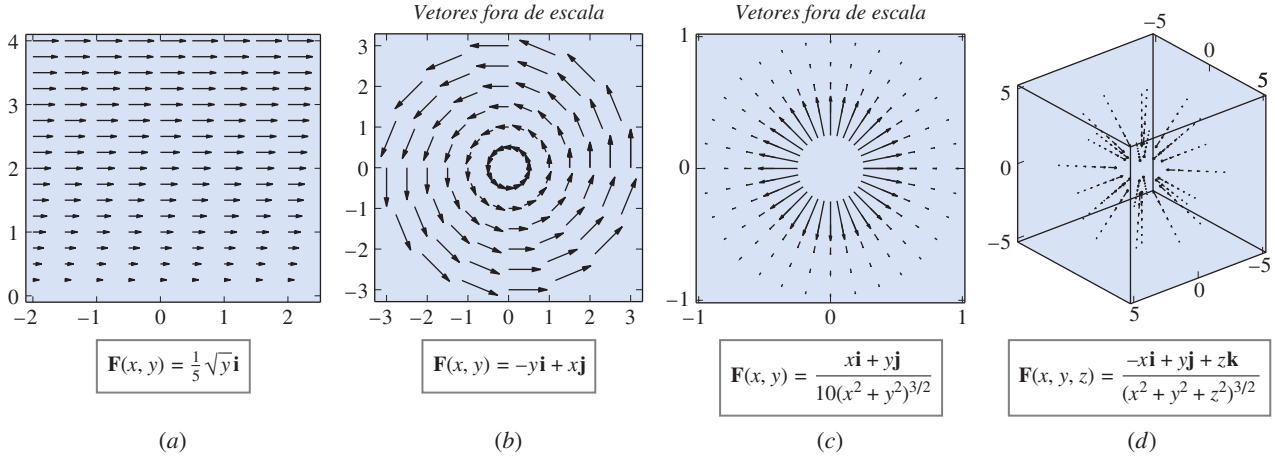



Figura 15.1.3

ço tridimensional. Tais figuras tendem a ser confusas e, portanto, de menor valor que representações gráficas de campos vetoriais no espaço bidimensional. Note também que os vetores nas partes (*b*) e (*c*) estão fora de escala – seus comprimentos foram comprimidos para maior clareza. Esse recurso será adotado em todo este capítulo.

## UMA NOTAÇÃO COMPACTA PARA CAMPOS VETORIAIS

Às vezes, é útil denotar os campos vetoriais $\mathbf{F}(x, y)$ e $\mathbf{F}(x, y, z)$ completamente em notação vetorial identificando $(x, y)$ com o vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ e $(x, y, z)$ com o vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Com essa notação, o campo vetorial tanto no espaço bi quanto tridimensional pode ser escrito como $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Quando não houver possibilidade de confusão, omitiremos, algumas vezes, até o $\mathbf{r}$ e denotaremos o campo vetorial como $\mathbf{F}$.

## CAMPOS DE QUADRADO INVERSO

De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, partículas de massas $m$ e $M$ atraem uma à outra com uma força $\mathbf{F}$ de grandeza

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{GmM}{r^2} \tag{1}$$

onde $r$ é a distância entre as partículas e $G$ é uma constante. Supondo que o objeto de massa $M$ esteja localizado na origem de um sistema de coordenadas $xyz$ e que $\mathbf{r}$ seja o vetor posição do objeto de massa $m$, então $r = \|\mathbf{r}\|$, e a força $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ exercida pela partícula de massa $M$ sobre a partícula de massa $m$ tem a direção e o sentido do vetor unitário $-\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Assim, por (1)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^2}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

Se $m$ e $M$ forem constantes e se tomarmos $c = -GmM$, essa fórmula pode ser dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

Campos vetoriais dessa forma aparecem em problemas eletromagnéticos e gravitacionais. Tais campos são tão importantes que têm sua terminologia própria.

**15.1.2 DEFINIÇÃO** Se $\mathbf{r}$ for um vetor posição do espaço bi ou tridimensional e $c$ for uma constante, então um campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

é denominado um ***campo de quadrado inverso***.

Observe que se $c > 0$ em (3), então $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ tem a mesma direção de $\mathbf{r}$, de modo que cada vetor do campo é direcionado para longe da origem; e se $c < 0$, então $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ tem sentido oposto ao de $\mathbf{r}$, de modo que cada vetor do campo é direcionado para a origem. Em ambos os casos, a grandeza de $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o ponto final de $\mathbf{r}$ e a origem, pois

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^3}\|\mathbf{r}\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^2}$$

Deixamos para o leitor demonstrar que, no espaço bidimensional, a Fórmula (3) pode ser escrita sob a forma de componentes como

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{c}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \tag{4}$$

e no, espaço tridimensional, como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \tag{5}$$

[ver partes (*c*) e (*d*) da Figura 15.1.3].

► **Exemplo 1** A ***Lei de Coulomb*** afirma que *a força eletrostática exercida por uma partícula carregada sobre outra é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas*. Essa lei tem a mesma forma da Lei da Gravitação Universal de Newton, de modo que o campo da força eletrostática exercida por uma partícula carregada é um campo de quadrado inverso. Especificamente, se uma partícula de carga $Q$ estiver na origem de um sistema de coordenadas e se $\mathbf{r}$ for o vetor posição de uma partícula de carga $q$, então a força $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ que a partícula de carga $Q$ exerce sobre a partícula de carga $q$ é da forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

onde $\epsilon_0$ é uma constante positiva (chamada de ***constante de permissividade***). Essa fórmula é da forma (3) com $c = qQ/4\pi\epsilon_0$. ◄

## ■ CAMPOS GRADIENTE

Uma classe importante de campos vetoriais surge do processo de calcular gradientes. Lembre-se de que se $\phi$ for uma função de três variáveis, então o gradiente de $\phi$ é definido como

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Essa fórmula define um campo vetorial do espaço tridimensional chamado de ***campo gradiente de $\phi$***. Analogamente, o gradiente de uma função de duas variáveis define um campo gradiente no espaço bidimensional. Em cada ponto de um campo gradiente em que o gradiente não for nulo, o vetor aponta na direção em que é máxima a taxa de aumento de $\phi$.

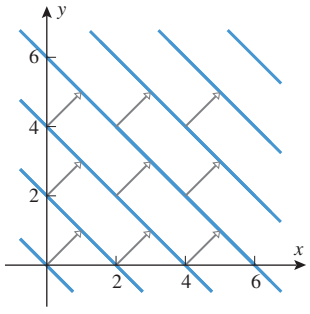


**Figura 15.1.4**

► **Exemplo 2** Esboce o campo gradiente de $\phi(x, y) = x + y$.

***Solução*** O gradiente de $\phi$ é

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

que é constante [ou seja, é o mesmo vetor em cada ponto $(x, y)$]. Uma porção desse campo vetorial está esboçada na Figura 15.1.4, junto a algumas curvas de nível de $\phi$. Observe que, em cada ponto, $\nabla\phi$ é normal à curva de nível de $\phi$ que passa pelo ponto (Teorema 13.6.6). ◄

## ■ CAMPOS CONSERVATIVOS E FUNÇÕES POTENCIAIS

Se $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ for um campo vetorial arbitrário do espaço bi ou tridimensional, podemos perguntar se é um campo gradiente de alguma função $\phi$ e, em caso afirmativo, como determinar $\phi$. Esse é um problema importante em diversas aplicações e vamos estudá-lo com mais detalhe mais adiante. Há, porém, certa terminologia para esses campos, que introduziremos agora.

**15.1.3** DEFINIÇÃO Dizemos que um campo vetorial $\mathbf{F}$ do espaço bi ou tridimensional é ***conservativo*** em uma região se for o campo gradiente de alguma função $\phi$ naquela região ou seja, se

$$\mathbf{F} = \nabla\phi$$

A função $\phi$ é denominada uma ***função potencial*** de $\mathbf{F}$ na região.

► **Exemplo 3** Campos de quadrado inverso são conservativos em qualquer região que não contenha a origem. Por exemplo, no caso bidimensional, a função

$$\phi(x, y) = -\frac{c}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \tag{6}$$

é uma função potencial de (4) em qualquer região que não contenha a origem, pois

$$\begin{aligned}\nabla\phi(x, y) &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} \\ &= \frac{cx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j} \\ &= \frac{c}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ &= \mathbf{F}(x, y)\end{aligned}$$

Em uma seção mais adiante, discutiremos métodos para encontrar funções potenciais de campos vetoriais conservativos. ◄

## DIVERGÊNCIA E ROTACIONAL

Vamos, agora, definir duas operações importantes sobre campos vetoriais do espaço tridimensional – a *divergência* e o *rotacional* do campo. Esses nomes originaram-se no estudo do fluxo fluido, caso em que divergência refere-se à maneira como o fluido flui para ou afasta-se de um ponto; já rotacional refere-se às propriedades de rotação do fluido em um ponto. As interpretações físicas dessas operações serão investigadas detalhadamente mais adiante. Por enquanto, vamos focalizar somente seu cálculo.

**15.1.4 DEFINIÇÃO** Se $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$, definiremos a ***divergência de*** $\mathbf{F}$, denotada div $\mathbf{F}$, como a função dada por

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \tag{7}$$

**15.1.5 DEFINIÇÃO** Se $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$, definiremos o ***rotacional de*** $\mathbf{F}$, denotado rot $\mathbf{F}$, como o campo vetorial dado por

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{8}$$

**OBSERVAÇÃO** Note que div $\mathbf{F}$ e rot $\mathbf{F}$ dependem do ponto em que estão sendo calculados e, portanto, são escritos mais apropriadamente como div $\mathbf{F}(x, y, z)$ e rot $\mathbf{F}(x, y, z)$. Entretanto, mesmo que essas funções sejam expressas em termos de $x$, $y$ e $z$, pode ser provado que seus valores em um ponto fixado dependem do ponto, mas não do sistema de coordenadas selecionado. Isso é importante nas aplicações, uma vez que permite a físicos e engenheiros calcular rotacional e divergência em qualquer sistema de coordenadas conveniente.

Antes de prosseguirmos com alguns exemplos, observamos que div $\mathbf{F}$ tem valores escalares, enquanto que rot $\mathbf{F}$ tem valores vetoriais (isto é, rot $\mathbf{F}$ é ele próprio um campo vetorial).

Além disso, para fins computacionais é conveniente notar que a fórmula do rotacional pode ser expressa sob a forma de determinante

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \tag{9}$$

O leitor deveria verificar que resulta a Fórmula (8) se o determinante for calculado interpretando-se um "produto" do tipo $(\partial/\partial x)(g)$ como significando $\partial g/\partial x$. Tenha em mente, no entanto, que (9) é apenas um artifício mnemônico, e não um determinante verdadeiro, uma vez que os termos de um determinante devem ser números, não vetores ou símbolos de derivadas parciais.

**► Exemplo 4** Calcule a divergência e o rotacional do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + 2y^3z\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

***Solução*** Por (7)

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^3z) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) \\ &= 2xy + 6y^2z + 3 \end{aligned}$$

e por (9)

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & 2y^3z & 3z \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3z) - \frac{\partial}{\partial z}(2y^3z)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(3z)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(2y^3z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right]\mathbf{k} \\ &= -2y^3\mathbf{i} - x^2\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

**DOMÍNIO DA TECNOLOGIA**

A maioria dos sistemas algébricos computacionais pode calcular campos gradientes, divergência e rotacional. Se o leitor dispuser de um CAS com essas capacidades, leia as instruções pertinentes e use o CAS para verificar os cálculos dos Exemplos 2 e 4.

**► Exemplo 5** Mostre que a divergência do campo de quadrado inverso

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

é nula.

***Solução*** Os cálculos podem ser simplificados fazendo-se $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, caso em que $\mathbf{F}$ pode ser expresso como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cx\mathbf{i} + cy\mathbf{j} + cz\mathbf{k}}{r^3} = \frac{cx}{r^3}\mathbf{i} + \frac{cy}{r^3}\mathbf{j} + \frac{cz}{r^3}\mathbf{k}$$

Deixamos a cargo do leitor mostrar que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Assim,

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = c\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right] \tag{10}$$

No entanto,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{r^3 - x(3r^2)(x/r)}{(r^3)^2} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

Substituindo essas expressões em (10), obtemos

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = c\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{r^5}\right] = c\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5}\right] = 0 \blacktriangleleft$$

## O OPERADOR $\nabla$

Até aqui, não foi dado um significado próprio ao símbolo $\nabla$ que aparece na expressão do gradiente $\nabla\phi$. Entretanto, é conveniente considerar $\nabla$ como um operador

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \tag{11}$$

que, aplicado a $\phi(x, y, z)$, produz o gradiente

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Chamamos (11) de ***operador del***. Ele é análogo ao operador de derivada $d/dx$ que, quando aplicado a $f(x)$, produz a derivada $f'(x)$.

O operador del permite-nos expressar a divergência de um campo vetorial

$$\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

em notação de produto escalar como

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \tag{12}$$

e o rotacional desse campo em notação de produto vetorial como

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \tag{13}$$

## O LAPLACIANO $\nabla^2$

O operador que resulta aplicando-se o operador del a si mesmo é denotado por $\nabla^2$ e é chamado de ***operador laplaciano***. Esse operador tem a forma

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{14}$$

Quando aplicado a $\phi(x, y, z)$, o operador laplaciano produz a função

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Note que $\nabla^2\phi$ também pode ser expresso como div $(\nabla\phi)$. A equação $\nabla^2\phi = 0$ ou sua equivalente

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

é conhecida como ***equação de Laplace***. Essa equação diferencial parcial desempenha um papel importante em uma grande variedade de aplicações, resultante do fato de ser satisfeita pela função potencial do campo de quadrado inverso.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.1 (Ver página 1093 para respostas.)

1. A função $\phi(x, y, z) = xy + yz + xz$ é um potencial do campo vetorial $\mathbf{F} =$ _____.
2. O campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) =$ _____, definido com $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, está sempre apontando para a origem e tem magnitude igual à distância de $(x, y, z)$ até a origem.
3. Um campo de quadrado inverso é um que pode ser escrito na forma $\mathbf{F}(\mathbf{r}) =$ _____.
4. O campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$$

tem divergência _____ e rotacional _____.

**Pierre Simon de Laplace (1749-1827)** Matemático e físico francês. Laplace é conhecido como o Isaac Newton francês em razão de seu trabalho em Mecânica Celeste. Em seu tratado em cinco volumes, intitulado *Traité de Mécanique Céleste*, ele resolveu problemas extremamente difíceis envolvendo interações gravitacionais entre os planetas. Em particular, foi capaz de demonstrar que nosso sistema solar é estável e não está sujeito a colapso catastrófico como resultado dessas interações. Na época, esse era um problema muito preocupante, porque a órbita de Júpiter parecia estar encolhendo e a de Saturno, expandindo; Laplace demonstrou que essas eram anomalias periódicas esperadas. Além de seu trabalho em Mecânica Celeste, ele fundou a teoria da probabilidade moderna, mostrou junto a Lavoisier que a respiração é uma forma de combustão e desenvolveu métodos que desbravaram muitos ramos da Matemática pura.

Laplace nasceu em uma família de classe média na Normandia; seu pai era fazendeiro e comerciante de cidra. Matriculou-se no curso de Teologia da Universidade de Caen aos 16 anos, mas aos 18 foi para Paris com uma carta de apresentação para o influente matemático d'Alembert, que acabou ajudando-o a iniciar a carreira de matemático. Laplace era um escritor prolífero e após sua eleição para a Academia de Ciências, em 1773, o secretário escreveu que a Academia nunca havia recebido tantos trabalhos importantes de pesquisa de uma pessoa tão jovem em tão pouco tempo. Laplace tinha pouco interesse na Matemática pura – ele considerava a Matemática meramente uma ferramenta para resolver problemas aplicados. Na sua impaciência com o detalhe matemático, frequentemente omitia raciocínios complicados com a frase "É fácil mostrar que...". Ele admitiu, no entanto, que, com o passar do tempo, frequentemente ele mesmo tinha dificuldade para reconstruir os detalhes omitidos!

No apogeu de sua fama, Laplace serviu em muitos comitês do governo e ocupou os postos de Ministro do Interior e chanceler do Senado. Por pouco conseguiu escapar da prisão e da execução durante o período da Revolução, provavelmente em razão de sua habilidade em convencer cada partido oponente de que ele o apoiava. Napoleão o descreveu como um grande matemático, mas um administrador medíocre que "procurava sutilezas em tudo, tinha somente ideias ambíguas e... carregou o espírito do infinitamente pequeno para dentro da administração". Apesar de ser um gênio, Laplace era egoísta e inseguro, tentando garantir seu lugar na História, convenientemente deixando de dar crédito aos matemáticos cujo trabalho ele usava – uma mesquinhez desnecessária, uma vez que seu próprio trabalho era brilhante. Porém, no lado positivo, apoiava os matemáticos jovens, geralmente tratando-os como seus próprios filhos. Laplace é classificado como um dos matemáticos mais influentes da História.

*[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre-Simon-Laplace_%281749-1827%29.jpg]*

## EXERCÍCIOS 15.1 Recurso Gráfico CAS

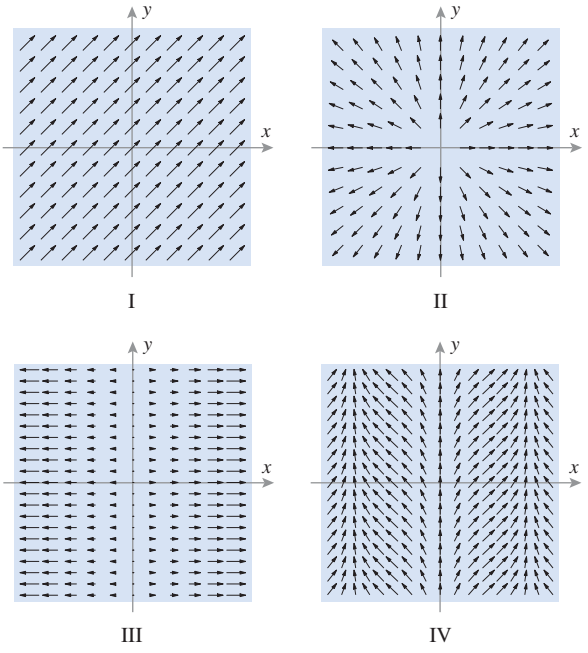
### ENFOCANDO CONCEITOS

**1-2** Relacione o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y)$ com uma das representações gráficas e explique seu raciocínio.

**1.** (a) $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i}$ (b) $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} x\mathbf{i} + \mathbf{j}$

**2.** (a) $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

(b) $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$




**3-4** Determine se a afirmação sobre o campo $\mathbf{F}(x, y)$ é verdadeira ou falsa. Se falsa, explique por quê.

**3.** $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

(a) $\|\mathbf{F}(x, y)\| \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.

(b) Se $(x, y)$ estiver no eixo $y$ positivo, o vetor aponta na direção e sentido do eixo $y$ negativo.

(c) Se $(x, y)$ estiver no primeiro quadrante, então o vetor aponta para baixo e para a direita.

**4.** $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$.

(a) À medida que $(x, y)$ se afasta da origem, os comprimentos dos vetores decrescem.

(b) Se $(x, y)$ for um ponto no eixo $x$ positivo, então o vetor aponta para cima.

(c) Se $(x, y)$ for um ponto no eixo $y$ positivo, o vetor aponta para a direita.

**5-8** Esboce o campo vetorial desenhando alguns vetores representativos que não se intersectem. Os vetores não precisam estar em escala, mas devem estar em proporção razoavelmente correta entre si.

**5.** $\mathbf{F}(x, y) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ **6.** $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{j}, \ y > 0$

**7.** $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. [*Nota*: Cada vetor do campo é perpendicular ao vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.]

**8.** $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. [*Nota*: Cada vetor do campo é um vetor unitário e de mesma direção e sentido que o vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.]

**9-10** Use um recurso gráfico para gerar uma representação gráfica do campo vetorial.

**9.** $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \cos y\mathbf{j}$ **10.** $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

**11-14 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

**11.** A função vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

é um exemplo de um campo vetorial do plano $xy$.

**12.** Se $\mathbf{r}$ for um vetor posição no espaço tridimensional, então um campo vetorial do tipo

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{r}$$

será um exemplo de um campo de quadrado inverso.

**13.** Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial, então $\nabla \times \mathbf{F}$. também será.

**14.** Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial e $\nabla \cdot \mathbf{F} = \phi$, então $\phi$ será uma função potencial de $\mathbf{F}$.

**15-16** Confirme que $\phi$ é uma função potencial de $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ em alguma região e determine a região.

**15.** (a) $\phi(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\, xy$

$\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{1 + x^2y^2}\mathbf{j}$

(b) $\phi(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 4z^2$

$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 6y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$

**16.** (a) $\phi(x, y) = 2y^2 + 3x^2y - xy^3$

$\mathbf{F}(x, y) = (6xy - y^3)\mathbf{i} + (4y + 3x^2 - 3xy^2)\mathbf{j}$

(b) $\phi(x, y, z) = x \operatorname{sen} z + y \operatorname{sen} x + z \operatorname{sen} y$

$\mathbf{F}(x, y, z) = (\operatorname{sen} z + y \cos x)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} x + z \cos y)\mathbf{j} + (\operatorname{sen} y + x \cos z)\mathbf{k}$

**17-22** Calcule div $\mathbf{F}$ e rot $\mathbf{F}$.

**17.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

**18.** $\mathbf{F}(x, y, z) = xz^3\mathbf{i} + 2y^4x^2\mathbf{j} + 5z^2y\mathbf{k}$

**19.** $\mathbf{F}(x, y, z) = 7y^3z^2\mathbf{i} - 8x^2z^5\mathbf{j} - 3xy^4\mathbf{k}$

**20.** $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy}\mathbf{i} - \cos y\mathbf{j} + \operatorname{sen}^2 z\mathbf{k}$

**21.** $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

**22.** $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln x\mathbf{i} + e^{xyz}\mathbf{j} + \operatorname{arc\,tg}(z/x)\mathbf{k}$

**23-24** Calcule $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.

**23.** $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$

$\mathbf{G}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

**24.** $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
$\mathbf{G}(x, y, z) = xy\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

**25-26** Calcule $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$. ■

**25.** $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\mathbf{i} + \cos(x - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

**26.** $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xz}\mathbf{i} + 3xe^{y}\mathbf{j} - e^{yz}\mathbf{k}$

**27-28** Calcule $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$. ■

**27.** $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

**28.** $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2x\mathbf{i} - 3yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

C **29.** Use um CAS para conferir os cálculos nos Exercícios 23, 25 e 27.

C **30.** Use um CAS para conferir os cálculos nos Exercícios 24, 25 e 28.

**31-38** Sejam $k$ uma constante e $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}(x, y, z)$ e $\phi = \phi(x, y, z)$. Prove as seguintes identidades, supondo que todas as derivadas envolvidas existam e sejam contínuas. ■

**31.** $\operatorname{div}(k\mathbf{F}) = k \operatorname{div} \mathbf{F}$

**32.** $\operatorname{rot}(k\mathbf{F}) = k \operatorname{rot} \mathbf{F}$

**33.** $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$

**34.** $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$

**35.** $\operatorname{div}(\phi\mathbf{F}) = \phi \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla\phi \cdot \mathbf{F}$

**36.** $\operatorname{rot}(\phi\mathbf{F}) = \phi \operatorname{rot} \mathbf{F} + \nabla\phi \times \mathbf{F}$

**37.** $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$

**38.** $\operatorname{rot}(\nabla\phi) = \mathbf{0}$

**39.** Reescreva as identidades dos Exercícios 31, 33, 35 e 37 em forma equivalente usando a notação $\nabla \cdot$ para divergente e $\nabla \times$ para o rotacional.

**40.** Reescreva as identidades dos Exercícios 32, 34, 36 e 38 em forma equivalente usando a notação $\nabla \cdot$ para divergente e $\nabla \times$ para o rotacional.

**41-42** Verifique que o vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ tem a propriedade enunciada. ■

**41.** (a) $\operatorname{rot} \mathbf{r} = \mathbf{0}$ (b) $\nabla\|\mathbf{r}\| = \dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$

**42.** (a) $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$ (b) $\nabla\dfrac{1}{\|\mathbf{r}\|} = -\dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$

**43-44** Sejam $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = \|\mathbf{r}\|$, $f$ uma função diferenciável de uma variável e $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$. ■

**43.** (a) Use a regra da cadeia e o Exercício 41(b) para mostrar que

$$\nabla f(r) = \frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$$

(b) Use o resultado da parte (a) e os Exercícios 35 e 42(a) para mostrar que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3f(r) + rf'(r)$

**44.** (a) Use a parte (a) do Exercício 43, o Exercício 36 e o Exercício 41(a) para mostrar que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(b) Use o resultado da parte (a) do Exercício 43 e os Exercícios 35 e 42(a) para mostrar que

$$\nabla^2 f(r) = 2\frac{f'(r)}{r} + f''(r)$$

**45.** Use o resultado do Exercício 43(b) para mostrar que a divergência do campo de quadrado inverso $\mathbf{F} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ é nula.

**46.** Use o resultado do Exercício 43(b) para mostrar que se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial da forma $\mathbf{F} = f(\|\mathbf{r}\|)\,\mathbf{r}$ e se $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, então $\mathbf{F}$ é um campo de quadrado inverso. [*Sugestão*: Considere $r = \|\mathbf{r}\|$ e multiplique $3f(r) + rf'(r) = 0$ por $r^2$. Escreva, então, o resultado como a derivada de um produto.]

**47.** Uma curva $C$ é chamada de ***linha de fluxo*** de um campo vetorial $\mathbf{F}$ se $\mathbf{F}$ for um vetor tangente a $C$ em cada ponto ao longo de $C$ (ver figura a seguir).

(a) Sejam $C$ uma linha de fluxo de $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ e $(x, y)$ um ponto em $C$ para o qual $y \neq 0$. Mostre que as linhas de fluxo satisfazem a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) Resolva a equação diferencial da parte (a) por separação de variáveis e mostre que as linhas de fluxo são círculos concêntricos centrados na origem.

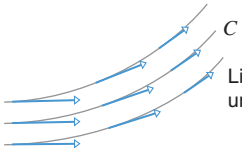



**Figura Ex-47**

**48-50** Encontre uma equação diferencial que seja satisfeita pelas linhas de fluxo de $\mathbf{F}$ (ver Exercício 47) e resolva-a para encontrar equações das linhas de fluxo de $\mathbf{F}$. Esboce algumas linhas de fluxo e vetores tangente típicos. ■

**48.** $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$

**49.** $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $x > 0$

**50.** $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, $x > 0$ e $y > 0$

**51.** **Texto** Discuta as semelhanças e as diferenças entre os conceitos "campo vetorial" e "campo de direções".

**52.** **Texto** Em aplicações físicas, muitas vezes, é necessário lidar com quantidades vetoriais que dependem não apenas da posição no espaço, mas também do tempo. Dê alguns exemplos e discuta como o conceito de campo vetorial deveria ser alterado para ser aplicável a essas situações.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.1

**1.** $(y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ **2.** $-\mathbf{r} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ **3.** $\dfrac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$ **4.** $2xy + 2yz$; $z^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (y^2 - z)k$

# 15.2 INTEGRAIS DE LINHA

*Em capítulos anteriores, consideramos três tipos de integrais em coordenadas retangulares: integrais simples em intervalos, integrais duplas em regiões bidimensionais e integrais triplas em regiões tridimensionais. Nesta seção, discutiremos integrais ao longo de curvas nos espaços bi e tridimensionais.*

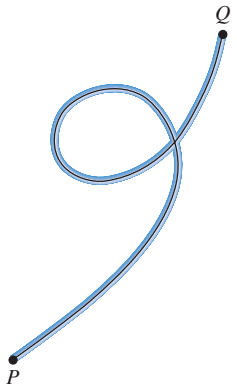



**Figura 15.2.1** Um arame muito fino modelado por uma curva lisa.

## INTEGRAIS DE LINHA

O primeiro objetivo desta seção é definir o que significa integrar uma função ao longo de uma curva. Para motivar a definição, consideramos o problema de encontrar a massa de um arame muito fino cuja função densidade linear (massa por unidade de comprimento) seja conhecida. Vamos supor que possamos modelar o arame com uma curva lisa $C$ entre dois pontos, $P$ e $Q$, do espaço tridimensional (Figura 15.2.1). Dado um ponto $(x, y, z)$ em $C$, denotamos por $f(x, y, z)$ o valor correspondente da função densidade. Para calcular a massa do arame, procedemos como segue:

- Divida $C$ em $n$ seções muito pequenas usando uma sucessão de pontos de partição distintos

$$P = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n = Q$$

como ilustrado no lado esquerdo da Figura 15.2.2. Seja $\Delta M_k$ a massa da $k$-ésima seção e seja $\Delta s_k$ o comprimento de arco entre $P_{k-1}$ e $P_k$.

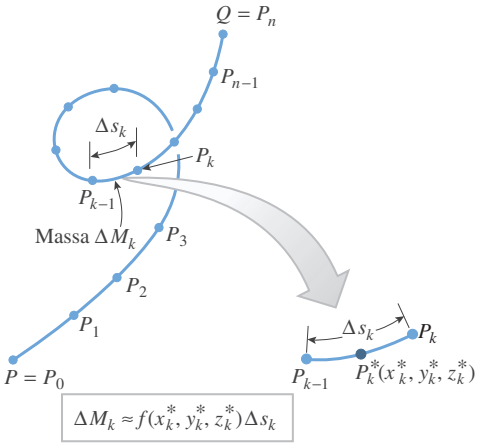



**Figura 15.2.2**

- Escolha um ponto amostral $P_k^*(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ arbitrário na $k$-ésima seção, como ilustrado no lado direito da Figura 15.2.2. Se $\Delta s_k$ for muito pequeno, o valor de $f$ não varia muito ao longo da $k$-ésima seção e podemos aproximar $f$ ao longo dessa seção pelo valor $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$. Segue que a massa da $k$-ésima seção pode ser aproximada por

$$\Delta M_k \approx f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k$$

- A massa $M$ do arame todo pode, então, ser aproximada por

$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k \tag{1}$$

- Utilizaremos a expressão $\max \Delta s_k \to 0$ para indicar o processo de aumentar $n$ de tal modo que os comprimentos de todas as seções tendam a 0. É plausível que o erro em (1) tenda a 0 quando $\max \Delta s_k \to 0$ e que o valor exato de $M$ seja dado por

$$M = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k \tag{2}$$

O limite em (2) é análogo ao limite de uma soma de Riemann usada para definir a integral de uma função em um intervalo (Definição 5.5.1, no Volume 1). Pensando nessa semelhança, estabelecemos a seguinte definição.

Embora o termo "integral curvilínea" seja mais descritivo, as integrais na Definição 15.2.1 são chamadas, por razões históricas, de "integrais de linha".

**15.2.1 DEFINIÇÃO** Se $C$ for uma curva lisa no espaço bi ou tridimensional, então a ***integral de linha de f em relação a s ao longo de C*** é

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k \qquad \text{bidimensional} \tag{3}$$

ou

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k \qquad \text{tridimensional} \tag{4}$$

desde que esse limite exista e não dependa da escolha de partição ou da escolha dos pontos amostrais.

Em geral, é impraticável calcular integrais de linha diretamente da Definição 15.2.1. Contudo, a definição é importante na aplicação e interpretação de integrais de linha. Por exemplo:

- Se $C$ for uma curva no espaço tridimensional que modela um arame fino e se $f(x, y, z)$ for a função densidade linear do arame, segue de (2) e da Definição 15.2.1 que a massa $M$ do arame é dada por

$$M = \int_C f(x, y, z)\, ds \tag{5}$$

  Portanto, para obter a massa de um arame fino, integramos a função densidade linear ao longo da curva lisa que modela esse arame.

- Se $C$ for uma curva lisa de comprimento de arco $L$ e se $f$ for identicamente 1, então segue imediatamente da Definição 15.2.1 que

$$\int_C ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} L = L \tag{6}$$

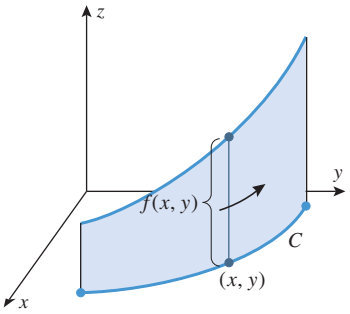



**Figura 15.2.3**

- Se $C$ for uma curva no plano $xy$ e se $f$ for uma função contínua não negativa definida em $C$, então $\int_C f(x, y)\, ds$ pode ser interpretada como a área $A$ da "cortina" que é traçada por um segmento de reta vertical que se estende desde o ponto $(x, y)$ para cima até uma altura $f(x, y)$ e se move ao longo de $C$ desde uma extremidade de $C$ até a outra (Figura 15.2.3). Para ver isso, utilize a Figura 15.2.4 em que $f(x_k^*, y_k^*)$ é o valor de $f$ em um ponto arbitrário $P_k^*$ do $k$-ésimo arco da partição para observar a aproximação

$$\Delta A_k \approx f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k$$

  Segue que

$$A = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k$$

  Então é plausível que

$$A = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k = \int_C f(x, y)\, ds \tag{7}$$

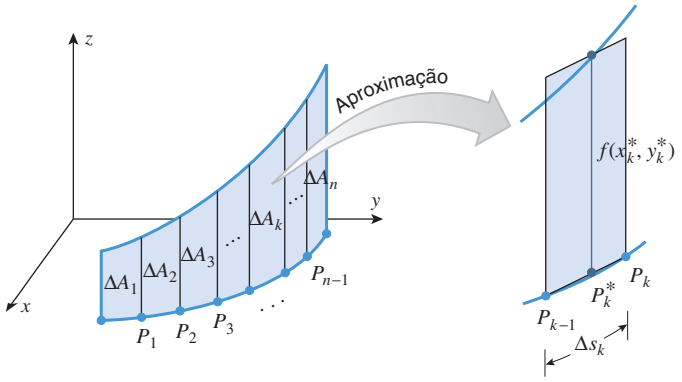



**Figura 15.2.4**

Como a Definição 15.2.1 é bastante parecida com a Definição 5.5.1, no Volume 1, não deveria ser uma surpresa que as integrais de linha compartilhem muitas das propriedades comuns de integrais definidas ordinárias. Por exemplo, temos

$$\int_C [f(x, y) + g(x, y)]\, ds = \int_C f(x, y)\, ds + \int_C g(x, y)\, ds$$

desde que existam ambas as integrais de linha do lado direito dessa equação. Analogamente, pode ser mostrado que se $f$ for contínua em $C$, então existe a integral de linha de $f$ em relação a $s$ ao longo de $C$.

## CÁLCULO DE INTEGRAIS DE LINHA

Exceto em casos muito simples, não é factível calcular uma integral de linha diretamente de (3) ou (4). Contudo, mostraremos agora que é possível expressar uma integral de linha como uma integral definida ordinária, de modo que não serão necessários métodos especiais para calcular as integrais de linha. Por exemplo, suponha que $C$ seja uma curva no plano $xy$, dada por uma parametrização lisa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (a \le t \le b)$$

Além disso, suponha que a cada ponto $P_k$ de uma partição de $C$ corresponda um valor do parâmetro $t_k$ em $[a, b]$. O comprimento de arco de $C$ entre os pontos $P_{k-1}$ e $P_k$ é, então, dado por

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \tag{8}$$

(Teorema 12.3.1). Se denotarmos $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, segue de (8) e do Teorema do Valor Médio para Integrais (Teorema 5.6.2, no Volume 1) que existe um ponto $t_k^*$ em $[t_{k-1}, t_k]$ tal que

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \|\mathbf{r}'(t_k^*)\|\Delta t_k$$

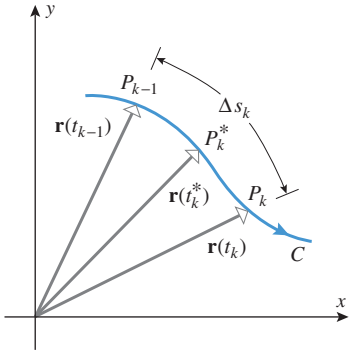



**Figura 15.2.5**

Denotamos por $P_k^*(x_k^*, y_k^*) = P_k^*(x(t_k^*), y(t_k^*))$ o ponto correspondente ao valor $t_k^*$ do parâmetro (Figura 15.2.5).

Como a parametrização de $C$ é lisa, pode ser mostrado que $\Delta s_k \to 0$ se, e somente se, $\Delta t_k \to 0$ (Exercício 57). Além disso, a composta $f(x(t), y(t))$ é uma função real definida no intervalo $[a, b]$, e temos

$$\begin{aligned}
\int_C f(x, y)\, ds &= \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\, \Delta s_k && \boxed{\text{Definição 15.2.1}} \\
&= \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x(t_k^*), y(t_k^*))\|\mathbf{r}'(t_k^*)\|\Delta t_k && \boxed{\text{Substituição}} \\
&= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x(t_k^*), y(t_k^*))\|\mathbf{r}'(t_k^*)\|\Delta t_k \\
&= \int_a^b f(x(t), y(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\, dt && \boxed{\text{Definição 5.5.1, no Volume 1}}
\end{aligned}$$

Portanto, se $C$ for uma curva dada por uma parametrização lisa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (a \le t \le b)$$

então

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \tag{9}$$

Analogamente, se $C$ for uma curva no espaço tridimensional, dada por uma parametrização lisa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad (a \le t \le b)$$

então

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \tag{10}$$

Explique como as Fórmulas (9) e (10) confirmam a Fórmula (6) do comprimento de arco.

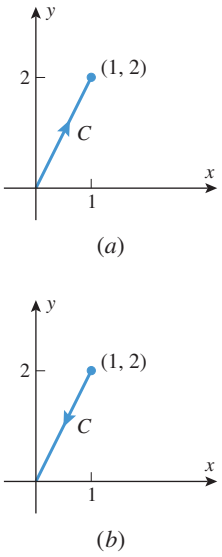



**Figura 15.2.6**

► **Exemplo 1** Usando a parametrização dada, calcule a integral de linha $\int_C (1 + xy^2)\, ds$.

(a) $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1)$ (ver Figura 15.2.6*a*)

(b) $C : \mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (2 - 2t)\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1)$ (ver Figura 15.2.6*b*)

***Solução (a)*** Como $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, temos $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{5}$ e, da Fórmula (9), decorre que

$$\begin{aligned}\int_C (1 + xy^2)\, ds &= \int_0^1 [1 + t(2t)^2]\sqrt{5}\, dt \\ &= \int_0^1 (1 + 4t^3)\sqrt{5}\, dt \\ &= \sqrt{5}\left[t + t^4\right]_0^1 = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

***Solução (b)*** Como $\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, temos $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{5}$ e, da Fórmula (9), decorre que

$$\begin{aligned}\int_C (1 + xy^2)\, ds &= \int_0^1 [1 + (1 - t)(2 - 2t)^2]\sqrt{5}\, dt \\ &= \int_0^1 [1 + 4(1 - t)^3]\sqrt{5}\, dt \\ &= \sqrt{5}\left[t - (1 - t)^4\right]_0^1 = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$ ◄

Observe que as integrais nas partes (a) e (b) do Exemplo 1 são iguais, embora as parametrizações correspondentes de $C$ tenham orientações opostas. Isso ilustra o resultado importante de que uma integral de linha de $f$ em relação a $s$ ao longo de $C$ *não depende da orientação escolhida de* $C$. (Isso é assim porque $\Delta s_k$ é sempre positivo; portanto, não importa o *sentido* em que sejam listados os pontos de partição da curva na Definição 15.2.1.) Adiante nesta seção, discutiremos integrais de linha que somente são definidas para curvas orientadas.

A Fórmula (9) tem uma expressão alternativa para uma curva $C$ no plano $xy$ dada por equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \le t \le b)$$

Nesse caso, escrevemos (9) na forma expandida

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{11}$$

Analogamente, se $C$ for uma curva no espaço tridimensional que é parametrizada por

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \le t \le b)$$

então escreveremos (10) na forma

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \tag{12}$$

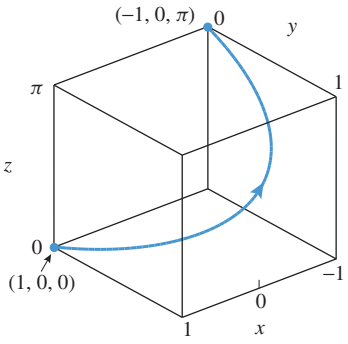



**Figura 15.2.7**

▶ **Exemplo 2** Calcule a integral de linha $\int_C (xy + z^3)\, ds$ de $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, \pi)$ ao longo da hélice $C$ que é representada pelas equações paramétricas

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t \quad (0 \le t \le \pi)$$

(Figura 15.2.7).

***Solução*** Pela Fórmula (12)

$$\begin{aligned}
\int_C (xy + z^3)\, ds &= \int_0^\pi (\cos t \operatorname{sen} t + t^3)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \\
&= \int_0^\pi (\cos t \operatorname{sen} t + t^3)\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\, dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^\pi (\cos t \operatorname{sen} t + t^3)\, dt \\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} + \frac{t^4}{4}\right]_0^\pi = \frac{\sqrt{2}\pi^4}{4}
\end{aligned}$$

◀

Se $\delta(x, y)$ for a função densidade de massa de um arame modelado por uma curva lisa $C$ do plano $xy$, então um argumento parecido com o da dedução da Fórmula (5) mostra que a massa do arame é dada por $\int_C \delta(x, y)\, ds$.

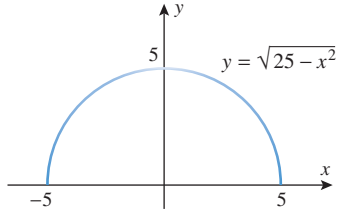



**Figura 15.2.8**

▶ **Exemplo 3** Suponha que um arame semicircular tenha a equação $y = \sqrt{25 - x^2}$ e que sua densidade de massa seja $\delta(x, y) = 15 - y$ (Figura 15.2.8). Fisicamente, isso significa que o arame tem uma densidade máxima de 15 unidades na base ($y = 0$) e que a densidade do arame decresce linearmente em relação a $y$ para um valor de 10 unidades no topo ($y = 5$). Calcule a massa do arame.

***Solução*** A massa $M$ do arame pode ser expressa como a integral de linha

$$M = \int_C \delta(x, y)\, ds = \int_C (15 - y)\, ds$$

ao longo do semicírculo $C$. Para calcular essa integral, expressamos $C$ parametricamente como

$$x = 5\cos t, \quad y = 5 \operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le \pi)$$

Assim, segue de (11) que

$$\begin{aligned} M &= \int_C (15 - y)\, ds = \int_0^{\pi} (15 - 5 \operatorname{sen} t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} (15 - 5 \operatorname{sen} t)\sqrt{(-5 \operatorname{sen} t)^2 + (5 \cos t)^2}\, dt \\ &= 5\int_0^{\pi} (15 - 5 \operatorname{sen} t)\, dt \\ &= 5\left[15t + 5 \cos t\right]_0^{\pi} \\ &= 75\pi - 50 \approx 185{,}6 \text{ unidades de massa} \end{aligned}$$ ◀

No caso especial em que $t$ é um parâmetro de comprimento de arco, digamos $t = s$, segue das Fórmulas (20) e (21) das Seções 12.3 que os radicais em (11) e (12) se reduzem a 1 e as equações simplificam para

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(s), y(s))\, ds \tag{13}$$

e

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s))\, ds \tag{14}$$

respectivamente.

**▶ Exemplo 4** Calcule a área da superfície que se estende verticalmente desde o círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano $xy$ até o cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ (Figura 15.2.9).

***Solução*** Segue de (7) que a área $A$ da superfície pode ser expressa como a integral de linha

$$A = \int_C (1 - x^2)\, ds \tag{15}$$

onde $C$ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Esse círculo pode ser parametrizado em função do comprimento de arco como

$$x = \cos s, \quad y = \operatorname{sen} s \quad (0 \le s \le 2\pi)$$

Assim, segue de (13) e (15) que

$$\begin{aligned} A &= \int_C (1 - x^2)\, ds = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 s)\, ds \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 s\, ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2s)\, ds = \pi \end{aligned}$$ ◀

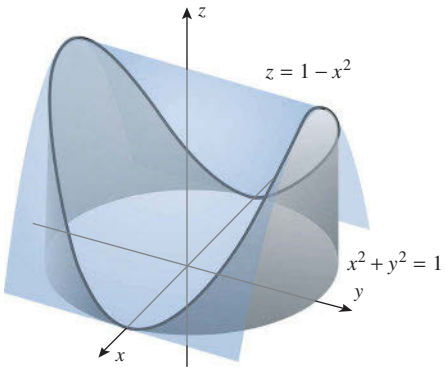



**Figura 15.2.9**

## INTERGRAIS DE LINHA EM RELAÇÃO A *x*, *y* E *z*

Descreveremos, agora, um segundo tipo de integral de linha em que trocamos o $ds$ da integral por $dx$, $dy$ ou $dz$. Por exemplo, suponha que $f$ seja uma função definida em uma curva lisa $C$ do plano $xy$ e que tenhamos etiquetado pontos de uma partição de $C$ por $P_k(x_k, y_k)$. Tomando

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \text{e} \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$$

gostaríamos de definir

$$\int_C f(x, y)\, dx = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k \tag{16}$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k \tag{17}$$

Contudo, diferentemente do que ocorre com $\Delta s_k$, os valores de $\Delta x_k$ e $\Delta y_k$ trocam de sinal se a ordem dos pontos da partição ao longo de $C$ for invertida. Portanto, para poder definir as integrais de linha usando as Fórmulas (16) e (17), devemos nos restringir a curvas *orientadas* $C$ e a partições de $C$ em que os pontos da partição estejam ordenados no sentido da orientação da curva. Com essa restrição, se existir o limite em (16) e não depender da escolha da partição nem da escolha dos pontos amostrais, então dizemos que (16) é a ***integral de linha de f em relação a x ao longo de C***. Analogamente, (17) define a ***integral de linha de f em relação a y ao longo de C***. Se $C$ for uma curva lisa no espaço tridimensional, podemos ter ***integrais de linha de f em relação a x, y e z ao longo de C***. Por exemplo,

$$\int_C f(x, y, z)\, dx = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta x_k$$

Explique por que a Fórmula (16) implica que $\int_C dx = x_f - x_i$, onde $x_f$ e $x_i$ são as coordenadas $x$ respectivas dos pontos inicial e final de $C$. E o que vale para $\int_C dy$?

e assim por diante. Como ocorre no caso de integrais de linha em relação a $s$, as integrais de linha de $f$ em relação a $x$, $y$ e $z$ existem se $f$ for contínua em $C$.

Explique por que a Fórmula (16) implica que $\int_C f(x, y)\, dx = 0$ em qualquer segmento de reta orientado paralelo ao eixo $y$. O que pode ser dito sobre $\int_C f(x, y)\, dy$ em qualquer segmento de reta orientado paralelo ao eixo $x$?

O procedimento básico para calcular essas integrais de linha é encontrar equações paramétricas de $C$, digamos

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \le t \le b)$$

em que a orientação de $C$ seja dada no sentido de percurso de $t$ crescente, e então expressar o integrando em termos de $t$. Por exemplo,

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))z'(t)\, dt$$

[Uma fórmula dessas é fácil de ser lembrada: basta substituir $x$, $y$ e $z$ pelas equações paramétricas e lembrar que $dz = z'(t)\, dt$.]

▶ **Exemplo 5** Calcule $\int_C 3xy\, dy$, onde $C$ é o segmento de reta ligando (0, 0) e (1, 2) com a orientação dada.

(a) Orientada de (0, 0) para (1, 2), como na Figura 15.2.6*a*.

(b) Orientada de (1, 2) para (0, 0), como na Figura 15.2.6*b*.

***Solução (a)*** Usando a parametrização

$$x = t, \quad y = 2t \quad (0 \le t \le 1)$$

obtemos

$$\int_C 3xy\, dy = \int_0^1 3(t)(2t)(2)\, dt = \int_0^1 12t^2\, dt = 4t^3\Big]_0^1 = 4$$

***Solução (b)*** Usando a parametrização

$$x = 1 - t, \quad y = 2 - 2t \quad (0 \le t \le 1)$$

obtemos

$$\int_C 3xy\,dy = \int_0^1 3(1-t)(2-2t)(-2)\,dt = \int_0^1 -12(1-t)^2\,dt = 4(1-t)^3\Big]_0^1 = -4 \blacktriangleleft$$

Observe, no Exemplo 5, que invertendo a orientação da curva, mudou o sinal da integral de linha. Isso ocorre por que invertendo a orientação de uma curva trocamos o sinal de $\Delta x_k$ na definição (16). Assim, diferentemente do que ocorre com integrais de linha de funções em relação a $s$ ao longo de $C$, a troca de orientação de $C$ troca o sinal de uma integral de linha em relação a $x$, $y$ e $z$. Se $C$ for uma curva lisa orientada, denotamos por $-C$ a curva orientada que consiste nos mesmos pontos de $C$, mas com a orientação oposta (Figura 15.2.10). Então temos

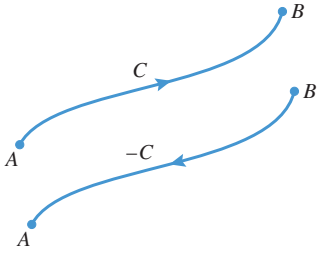



**Figura 15.2.10**

$$\int_{-C} f(x,y)\,dx = -\int_C f(x,y)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-C} g(x,y)\,dy = -\int_C g(x,y)\,dy \tag{18–19}$$

enquanto

$$\int_{-C} f(x,y)\,ds = \int_C f(x,y)\,ds \tag{20}$$

Identidades análogas valem para integrais de linha no espaço tridimensional. A menos de menção explicita em contrário, vamos supor que curvas paramétricas estejam orientadas no sentido do parâmetro crescente.

Muitas vezes, as integrais de linha em relação a $x$ e $y$ ocorrem combinadas, caso em que omitimos um dos sinais de integral e escrevemos

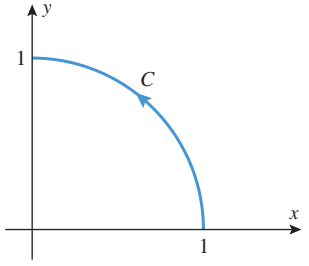
$$\int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int_C f(x,y)\,dx + \int_C g(x,y)\,dy \tag{21}$$

Uma convenção análoga será usada para combinações de integrais de linha em relação a $x$, $y$ e $z$ ao longo de curvas no espaço tridimensional.

▶ **Exemplo 6** Calcule

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$$

ao longo do arco circular $C$ dado por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ (Figura 15.2.11).




$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t\ (0 \le t \le \pi/2)$

**Figura 15.2.11**

***Solução*** Temos

$$\int_C 2xy\,dx = \int_0^{\pi/2} (2\cos t \operatorname{sen} t)\left[\frac{d}{dt}(\cos t)\right] dt$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos t\,dt = -\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 t\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

$$\int_C (x^2 + y^2)\,dy = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\left[\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t)\right] dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \operatorname{sen} t\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

Assim, por (21)

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = \int_C 2xy\,dx + \int_C (x^2 + y^2)\,dy$$
$$= -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \blacktriangleleft$$

Pode ser mostrado que, se $f$ e $g$ forem funções contínuas em $C$, podemos expressar combinações de integrais de linha em reação a $x$ e $y$ em termos de um limite e podemos calcular essas integrais em um único passo. Por exemplo, temos

$$\int_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k + g(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k] \tag{22}$$

e

$$\int_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = \int_a^b [f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)]\,dt \tag{23}$$

Resultados análogos valem para integrais de linha no espaço tridimensional. O cálculo de uma integral de linha pode, às vezes, ser simplificado usando a Fórmula (23).

**► Exemplo 7** Calcule

$$\int_C (3x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$$

ao longo do arco circular $C$ dado por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ (Figura 15.2.11).

***Solução*** Por (23), temos

$$\int_C (3x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = \int_0^{\pi/2} [(3\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)(-\operatorname{sen} t) + 2(\cos t)(\operatorname{sen} t)(\cos t)]\,dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} (-3\cos^2 t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^3 t + 2\cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)(\operatorname{sen} t)\,dt = \int_0^{\pi/2} -\operatorname{sen} t\,dt$$
$$= \cos t\,]_0^{\pi/2} = -1 \blacktriangleleft$$

Compare as contas no Exemplo 7 com aquelas envolvidas no cálculo de

$$\int_C (3x^2 + y^2)\,dx + \int_C 2xy\,dy$$

Segue de (18) e (19) que

$$\int_{-C} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = -\int_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy \tag{24}$$

de modo que, inverter a orientação de $C$ troca o sinal da integral de linha em que $x$ e $y$ ocorrem combinados. Analogamente,

$$\int_{-C} f(x, y, z)\,dx + g(x, y, z)\,dy + h(x, y, z)\,dz$$
$$= -\int_C f(x, y, z)\,dx + g(x, y, z)\,dy + h(x, y, z)\,dz \tag{25}$$

## INTEGRAÇÃO DE UM CAMPO VETORIAL AO LONGO DE UMA CURVA

Existe uma notação alternativa para integrais de linha em relação a $x$, $y$ e $z$ que é particularmente apropriada para lidar com problemas que envolvam campos de vetores. Interpretamos $d\mathbf{r}$ como

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

dependendo de $C$ ser uma curva no espaço bi ou tridimensional. Para uma curva $C$ orientada no espaço bidimensional e um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

escrevemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy \tag{26}$$

Analogamente, para uma curva $C$ no espaço tridimensional e um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_C f(x, y, z)\, dx + g(x, y, z)\, dy + h(x, y, z)\, dz \end{aligned} \tag{27}$$

Com essas convenções, somos levados à seguinte definição.

**15.2.2 DEFINIÇÃO** Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial contínuo e $C$ for uma curva lisa orientada, então a ***integral de linha de*** $\mathbf{F}$ ***ao longo de*** $C$ é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{28}$$

*Vetores fora de escala*

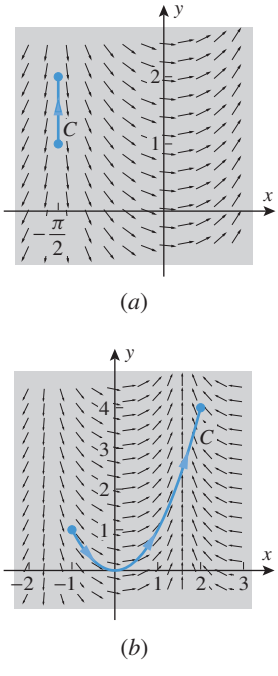



**Figura 15.2.12**

A notação na Definição 15.2.2 facilita lembrar a fórmula para calcular a integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de $C$. Por exemplo, suponha que $C$ seja uma curva orientada no plano dada em forma vetorial por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad (a \le t \le b)$$

Se escrevermos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t))\mathbf{i} + g(x(t), y(t))\mathbf{j}$$

então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \tag{29}$$

A Fórmula (29) também vale para curvas orientadas no espaço tridimensional.

**▶ Exemplo 8** Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\mathbf{j}$ e $C$ é a curva orientada dada.

(a) $C : \mathbf{r}(t) = -\dfrac{\pi}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad (1 \le t \le 2)$ (ver Figura 15.2.12*a*)

(b) $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad (-1 \le t \le 2)$ (ver Figura 15.2.12*b*)

***Solução (a)*** Usando (29), temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_1^2 (-\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}\, dt = \int_1^2 (-1)\, dt = -1$$

***Solução (b)*** Usando (29), temos

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-1}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_{-1}^2 (\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j})\, dt \\ &= \int_{-1}^2 (\cos t + 2t \operatorname{sen} t)\, dt = (-2t \cos t + 3 \operatorname{sen} t)\Big]_{-1}^2 \\ &= -2\cos 1 - 4\cos 2 + 3(\operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} 2) \approx 5{,}83629 \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Denotando por $t$ um parâmetro de comprimento de arco, digamos, $t = s$, com vetor tangente unitário $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(s)$ ao longo de $C$, então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s)\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

o que mostra que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \tag{30}$$

Em palavras, a integral de um campo vetorial ao longo de uma curva tem o mesmo valor que a integral do componente tangencial do campo vetorial ao longo da curva.

Podemos usar (30) para interpretar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ geometricamente. Se $\theta$ for o ângulo entre $\mathbf{F}$ e $\mathbf{T}$ em um ponto de $C$, então nesse ponto

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} &= \|\mathbf{F}\|\|\mathbf{T}\| \cos\theta && \boxed{\text{Fórmula (4) na Seção 11.3}} \\ &= \|\mathbf{F}\| \cos\theta && \boxed{\text{Pois } \|\mathbf{T}\| = 1}\end{aligned}$$

Assim,

$$-\|\mathbf{F}\| \le \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \le \|\mathbf{F}\|$$

e, se $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, então o sinal de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ dependerá do ângulo entre a direção de $\mathbf{F}$ e a direção de $C$ (Figura 15.2.13). Portanto, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ será positivo sempre que $\mathbf{F}$ e $C$ tiverem mais ou menos a mesma direção, será 0 se $\mathbf{F}$ for normal a $C$ e será negativo se $\mathbf{F}$ e $C$ tiverem direções mais ou menos opostas. A integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de $C$ pode ser interpretada como o efeito acumulado da magnitude de $\mathbf{F}$ ao longo de $C$, como o quanto $\mathbf{F}$ e $C$ têm a mesma direção, e como o comprimento de arco de $C$.

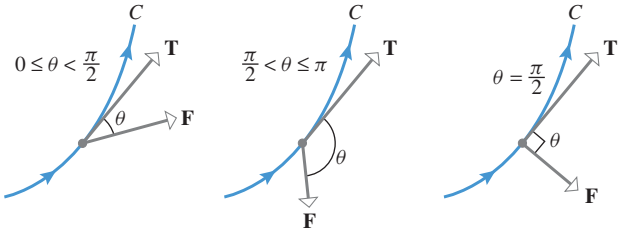
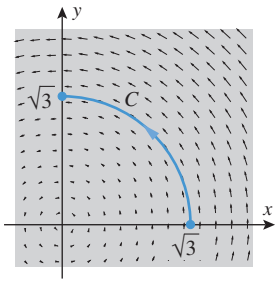
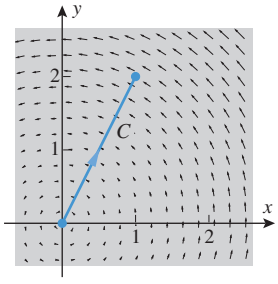



**Figura 15.2.13**

*Vetores fora de escala*




(*a*)




(*b*)

**Figura 15.2.14**

Observe a Figura 15.2.12 e explique geometricamente o sinal de cada uma das integrais de linha no Exemplo 8. Os Exercícios 5 e 6 levam adiante essa análise geométrica.

**▶ Exemplo 9** Use (30) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ e $C$ é a curva orientada dada.

(a) $C: x^2 + y^2 = 3 \quad (0 \le x, y$; orientada como na Figura 15.2.14*a*)

(b) $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1$; ver Figura 15.2.14*b*)

***Solução (a)*** Em cada ponto de $C$, a direção de $\mathbf{F}$ e a direção de $C$ são iguais (por quê?). Além disso, em cada ponto de $C$,

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}$$

Portanto, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \|\mathbf{F}\| \cos(0) = \|\mathbf{F}\| = \sqrt{3}$ e

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \sqrt{3}\, ds = \sqrt{3} \int_C ds = \frac{3\pi}{2}$$

***Solução (b)*** O campo vetorial $\mathbf{F}$ é normal a $C$ em cada ponto (por quê?). Portanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C 0\, ds = 0 \quad \blacktriangleleft$$

Tendo em vista (20) e (30), poderíamos esperar que a inversão da orientação de $C$ em $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não tivesse efeito no valor da integral de linha. Contudo, invertendo a orientação de $C$, invertemos a orientação de $\mathbf{T}$ no integrando e, portanto, invertemos o sinal da integral, ou seja,

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = -\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \tag{31}$$

e

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{32}$$

## TRABALHO COMO INTEGRAL DE LINHA

Uma aplicação importante das integrais de linha em relação a $x$, $y$ e $z$ é o problema de definir o trabalho efetuado por uma força variável movendo uma partícula ao longo de uma caminho curvilíneo. Na Seção 6.6 (ver Volume 1), definimos o trabalho $W$ efetuado por uma força de magnitude constante agindo sobre um objeto na direção do movimento (Definição 6.6.1) e, depois, naquela mesma seção, estendemos a definição para permitir a ação de uma força de magnitude variável agindo na direção do movimento (Definição 6.6.3). Na Seção 11.3, levamos o conceito de trabalho um passo adiante, definindo o trabalho $W$ efetuado por uma força constante $\mathbf{F}$ movendo uma partícula em uma reta de $P$ a $Q$. Definimos o trabalho por

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ} \tag{33}$$

[Fórmula (14) na Seção 11.3]. Nosso próximo objetivo é definir um conceito mais geral de trabalho, a saber, o trabalho efetuado por uma força variável agindo em uma partícula que se move ao longo de um caminho curvilíneo no espaço bi ou tridimensional.

Em muitas aplicações, as forças variáveis surgem de campos de forças (como campos gravitacionais ou eletromagnéticos), portanto consideraremos o problema do trabalho nesse contexto. Para motivar uma definição apropriada do trabalho efetuado por um campo de for-

ças, utilizaremos um processo de limite e, como o procedimento é igual nos espaços bi ou tridimensionais, vamos discutir o caso bidimensional em detalhe. A ideia é a seguinte:

- Suponha que um campo de forças $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$ mova uma partícula ao longo de uma curva lisa $C$ de um ponto $P$ até um ponto $Q$. Divida $C$ em $n$ arcos usando os pontos de partição

$$P = P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), P_n(x_n, y_n) = Q$$

orientados ao longo de $C$ de $P$ para $Q$ e denote o comprimento do $k$-ésimo arco por $\Delta s_k$. Seja $(x_k^*, y_k^*)$ um ponto qualquer do $k$-ésimo arco e seja

$$\mathbf{F}_k^* = \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*) = f(x_k^*, y_k^*)\mathbf{i} + g(x_k^*, y_k^*)\mathbf{j}$$

o vetor da força nesse ponto (Figura 15.2.15).

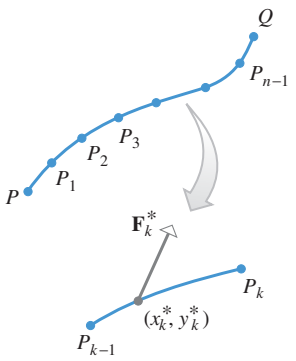



**Figura 15.2.15**

- Se o $k$-ésimo arco for pequeno, então a força não varia muito, portanto podemos aproximar a força pelo valor constante $\mathbf{F}_k^*$ nesse arco. Além disso, a direção do movimento não varia muito ao longo desse pequeno arco, portanto podemos aproximar o movimento da partícula pelo vetor deslocamento

$$\overrightarrow{P_{k-1}P_k} = (\Delta x_k)\mathbf{i} + (\Delta y_k)\mathbf{j}$$

onde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ e $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

- Como o trabalho efetuado por uma força constante $\mathbf{F}_k^*$ movendo uma partícula ao longo de uma reta de $P_{k-1}$ para $P_k$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_k^* \cdot \overrightarrow{P_{k-1}P_k} &= (f(x_k^*, y_k^*)\mathbf{i} + g(x_k^*, y_k^*)\mathbf{j}) \cdot ((\Delta x_k)\mathbf{i} + (\Delta y_k)\mathbf{j}) \\ &= f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k + g(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k\end{aligned}$$

[Fórmula (33)], o trabalho $\Delta W_k$ efetuado pelo campo de forças ao longo do $k$-ésimo arco de $C$ pode ser aproximado por

$$\Delta W_k \approx f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k + g(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k$$

O trabalho total $W$ realizado pela força movendo a partícula ao longo de toda a curva $C$ pode, então, ser aproximado como

$$W = \sum_{k=1}^{n} \Delta W_k \approx \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k + g(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k]$$

- Quando $\max \Delta s_k \to 0$, é plausível que o erro nessa aproximação tenda a 0 e o trabalho exato realizado pelo campo de forças seja

$$\begin{aligned}W &= \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k + g(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k] \\ &= \int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy \qquad \text{Fórmula (22)} \\ &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{Fórmula (26)}\end{aligned}$$

Assim, somos levados à seguinte definição.

Observe na Fórmula (30) que o trabalho realizado por um campo de forças em uma partícula em movimento ao longo de uma curva lisa $C$ é obtido pela integração do componente tangencial da força ao longo de $C$. Isso implica que o componente da força que é ortogonal à direção do movimento da partícula não tem efeito algum sobre o trabalho realizado.

**15.2.3 DEFINIÇÃO** Suponha que uma partícula se mova ao longo de uma curva lisa $C$ sob o efeito de um campo de forças contínuo $\mathbf{F}$ e que $C$ esteja orientado no sentido do movimento da partícula. Então, o ***trabalho realizado pelo campo de forças*** na partícula é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{34}$$

Por exemplo, suponha que a força seja medida em libras e a distância, em pés. Segue da parte (a) do Exemplo 9 que o trabalho realizado por uma força $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ atuando em uma partícula que se move ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 3$ de $(\sqrt{3}, 0)$ a $(0, \sqrt{3})$ é de $3\pi/2$ pés-libra.

## INTEGRAIS DE LINHA AO LONGO DE CURVAS LISAS POR PARTES

Até agora, só consideramos integrais de linha ao longo de curvas lisas. Entretanto, a noção de integral de linha pode ser estendida para curvas formadas por um número finito de curvas lisas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ unidas extremidade a extremidade. Tal curva é chamada de ***lisa por partes*** (Figura 15.2.16). Definimos uma integral de linha ao longo de uma curva $C$ lisa por partes como sendo a soma das integrais ao longo das seções:

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}$$

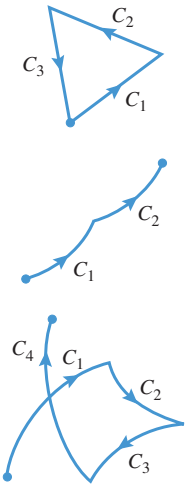



**Figura 15.2.16**

**► Exemplo 10** Calcule

$$\int_C x^2 y\,dx + x\,dy$$

no sentido anti-horário ao longo do trajeto triangular mostrado na Figura 15.2.17.

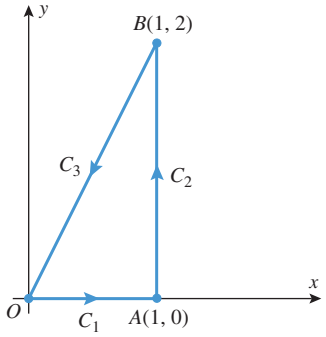



**Figura 15.2.17**

***Solução*** Vamos integrar ao longo de $C_1$, $C_2$ e $C_3$ separadamente e somar os resultados. Para cada uma das três integrais, devemos determinar equações paramétricas que sigam o trajeto de integração no sentido correto. Para isso, lembramos que, pela Fórmula (7) da Seção 12.1, o gráfico da função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad (0 \le t \le 1)$$

é o segmento de reta que une $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$, orientado no sentido de $\mathbf{r}_0$ para $\mathbf{r}_1$. Assim, os segmentos de reta $C_1$, $C_2$ e $C_3$ podem ser representados em notação vetorial como

$$\begin{aligned} C_1\colon \mathbf{r}(t) &= (1 - t)\langle 0, 0\rangle + t\langle 1, 0\rangle = \langle t, 0\rangle \\ C_2\colon \mathbf{r}(t) &= (1 - t)\langle 1, 0\rangle + t\langle 1, 2\rangle = \langle 1, 2t\rangle \\ C_3\colon \mathbf{r}(t) &= (1 - t)\langle 1, 2\rangle + t\langle 0, 0\rangle = \langle 1 - t, 2 - 2t\rangle \end{aligned}$$

onde $t$ varia de 0 a 1 em cada caso. Dessas equações, obtemos

$$\int_{C_1} x^2 y\,dx + x\,dy = \int_{C_1} x^2 y\,dx = \int_0^1 (t^2)(0)\frac{d}{dt}[t]\,dt = 0$$

$$\int_{C_2} x^2 y\,dx + x\,dy = \int_{C_2} x\,dy = \int_0^1 (1)\frac{d}{dt}[2t]\,dt = 2$$

$$\begin{aligned} \int_{C_3} x^2 y\,dx + x\,dy &= \int_0^1 (1 - t)^2(2 - 2t)\frac{d}{dt}[1 - t]\,dt + \int_0^1 (1 - t)\frac{d}{dt}[2 - 2t]\,dt \\ &= 2\int_0^1 (t - 1)^3\,dt + 2\int_0^1 (t - 1)\,dt = -\tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_C x^2 y\,dx + x\,dy = 0 + 2 + \left(-\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2} \quad \blacktriangleleft$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.2 (Ver página 1111 para respostas.)

1. A área da superfície que se estende verticalmente desde o segmento de reta $y = x$ $(0 \le x \le 1)$ do plano $xy$ até o plano $z = 2x + 1$ é _____.

2. Suponha que um arame tenha a equação $y = 1 - x$ $(0 \le x \le 1)$ e que sua densidade de massa seja $\delta(x, y) = 2 - x$. A massa do arame é _____.

3. Se $C$ for a curva representada pelas equações

$$x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t, \quad z = t, \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

então $\int_C y\,dx - x\,dy + dz =$ _____.

4. Se $C$ for o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ orientado no sentido anti-horário e $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = _____$$

## EXERCÍCIOS 15.2 Recurso Gráfico CAS

### ENFOCANDO CONCEITOS

1. Seja $C$ o segmento de reta de (0, 0) até (0, 1). Determine, em cada parte, a integral de linha ao longo de $C$ por inspeção e explique seu raciocínio.

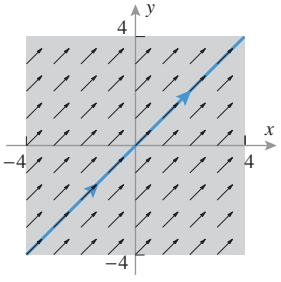
(a) $\displaystyle\int_C ds$ (b) $\displaystyle\int_C \operatorname{sen} xy\,dy$

2. Seja $C$ o segmento de reta de (0, 2) até (0, 4). Determine, em cada parte, a integral de linha ao longo de $C$ por inspeção e explique seu raciocínio.

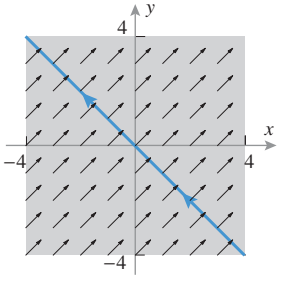
(a) $\displaystyle\int_C ds$ (b) $\displaystyle\int_C e^{xy}\,dx$

**3-4** Determine $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ por inspeção para o campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ e a curva $C$ mostrada na figura. Explique seu raciocínio. [*Nota*: Para clareza, os vetores do campo de forças são mostrados em escala menor do que a verdadeira.] ■

3.




4.




5. Use (30) para explicar por que a integral de linha na parte (a) do Exemplo 8 pode ser encontrada multiplicando o comprimento do segmento $C$ por $-1$.

6. (a) Use (30) para explicar por que a integral de linha na parte (b) do Exemplo 8 deveria ter um valor próximo, mas um pouco inferior, ao do comprimento da curva parabólica $C$.
(b) Verifique a conclusão de (a) calculando o comprimento de $C$ e comparando-o com o valor da integral de linha.

**7-10** Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo do segmento de reta $C$ desde $P$ até $Q$. ■

7. $\mathbf{F}(x, y) = 8\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$; $P(-4, 4)$, $Q(-4, 5)$

8. $\mathbf{F}(x, y) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; $P(1, -3)$, $Q(4, -3)$

9. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{j}$; $P(-2, 4)$, $Q(-2, 11)$

10. $\mathbf{F}(x, y) = -8x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$; $P(-1, 0)$, $Q(6, 0)$

11. Seja $C$ a curva representada pelas equações

$$x = 2t, \quad y = t^2 \quad (0 \le t \le 1)$$

Calcule, em cada parte, a integral de linha ao longo de $C$.

(a) $\displaystyle\int_C (x - \sqrt{y})\,ds$ (b) $\displaystyle\int_C (x - \sqrt{y})\,dx$

(c) $\displaystyle\int_C (x - \sqrt{y})\,dy$

12. Seja $C$ a curva representada pelas equações

$$x = t, \quad y = 3t^2, \quad z = 6t^3 \quad (0 \le t \le 1)$$

Calcule, em cada parte, a integral de linha ao longo de $C$.

(a) $\displaystyle\int_C xyz^2\,ds$ (b) $\displaystyle\int_C xyz^2\,dx$

(c) $\displaystyle\int_C xyz^2\,dy$ (d) $\displaystyle\int_C xyz^2\,dz$

13. Em cada parte, calcule a integral

$$\int_C (3x + 2y)\,dx + (2x - y)\,dy$$

ao longo da curva indicada.
(a) O segmento de reta de (0, 0) até (1, 1).
(b) O arco parabólico $y = x^2$ de (0, 0) até (1, 1).
(c) A curva $y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$ de (0, 0) até (1, 1).
(d) A curva $y = x^3$ de (0, 0) até (1, 1).

14. Em cada parte, calcule a integral

$$\int_C y\,dx + z\,dy - x\,dz$$

ao longo da curva indicada.
(a) O segmento de reta de (0, 0, 0) até (1, 1, 1).

(b) A cúbica torcida $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ de $(0, 0, 0)$ até $(1, 1, 1)$.
(c) A hélice $x = \cos \pi t$, $y = \operatorname{sen} \pi t$, $z = t$ de $(1, 0, 0)$ até $(-1, 0, 1)$.

**15-18 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**15.** Se $C$ for uma curva lisa orientada do plano $xy$ e $f(x, y)$ for uma função contínua definida em $C$, então

$$\int_C f(x, y)\, ds = -\int_{-C} f(x, y)\, ds$$

**16.** A integral de linha de um campo vetorial contínuo ao longo de uma curva lisa é um vetor.

**17.** Se $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ ao longo de uma curva lisa orientada $C$ do plano $xy$, então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$$

**18.** Se uma curva lisa orientada $C$ do plano $xy$ for uma curva de nível de uma função diferenciável $f(x, y)$, então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$$

**19-22** Calcule a integral de linha em relação a $s$ ao longo da curva $C$. ■

**19.** $\displaystyle\int_C \frac{1}{1+x}\, ds$
$C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 3)$

**20.** $\displaystyle\int_C \frac{x}{1+y^2}\, ds$
$C : x = 1 + 2t,\ y = t \quad (0 \le t \le 1)$

**21.** $\displaystyle\int_C 3x^2yz\, ds$
$C : x = t,\ y = t^2,\ z = \frac{2}{3}t^3 \quad (0 \le t \le 1)$

**22.** $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}}{x^2+y^2}\, ds$
$C : \mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

**23-30** Calcule a integral de linha ao longo da curva $C$. ■

**23.** $\displaystyle\int_C (x + 2y)\, dx + (x - y)\, dy$
$C : x = 2\cos t,\ y = 4\operatorname{sen} t \quad (0 \le t \le \pi/4)$

**24.** $\displaystyle\int_C (x^2 - y^2)\, dx + x\, dy$
$C : x = t^{2/3},\ y = t \quad (-1 \le t \le 1)$

**25.** $\displaystyle\int_C -y\, dx + x\, dy$
$C : y^2 = 3x$ de $(3, 3)$ até $(0, 0)$

**26.** $\displaystyle\int_C (y - x)\, dx + x^2y\, dy$
$C : y^2 = x^3$ de $(1, -1)$ até $(1, 1)$

**27.** $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2)\, dx - x\, dy$
$C : x^2 + y^2 = 1$, no sentido anti-horário de $(1,0)$ até $(0,1)$

**28.** $\displaystyle\int_C (y - x)\, dx + xy\, dy$
$C$ : o segmento de reta de $(3,4)$ até $(2,1)$

**29.** $\displaystyle\int_C yz\, dx - xz\, dy + xy\, dz$
$C : x = e^t,\ y = e^{3t},\ z = e^{-t} \quad (0 \le t \le 1)$

**30.** $\displaystyle\int_C x^2\, dx + xy\, dy + z^2\, dz$
$C : x = \operatorname{sen} t,\ y = \cos t,\ z = t^2 \quad (0 \le t \le \pi/2)$

C **31-32** Use um CAS para calcular a integral de linha ao longo da curva dada. ■

**31.** (a) $\displaystyle\int_C (x^3 + y^3)\, ds$
$C : \mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} \quad (0 \le t \le \ln 2)$

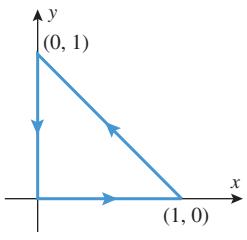
(b) $\displaystyle\int_C xe^z\, dx + (x - z)\, dy + (x^2 + y^2 + z^2)\, dz$
$C : x = \operatorname{sen} t,\ y = \cos t,\ z = t \quad (0 \le t \le \pi/2)$

**32.** (a) $\displaystyle\int_C x^7y^3\, ds$
$C : x = \cos^3 t,\ y = \operatorname{sen}^3 t \quad (0 \le t \le \pi/2)$

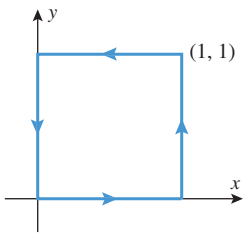
(b) $\displaystyle\int_C x^5z\, dx + 7y\, dy + y^2z\, dz$
$C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k} \quad (1 \le t \le e)$

**33-34** Calcule $\int_C y\, dx - x\, dy$ ao longo da curva $C$ mostrada em cada figura. ■

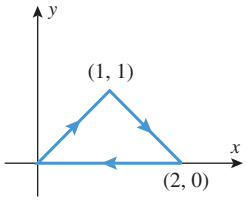
**33.** (a)



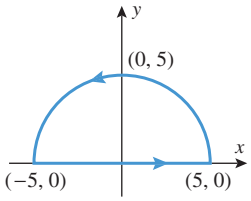

(b)




**34.** (a)

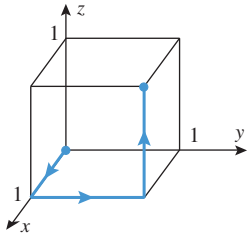



(b)

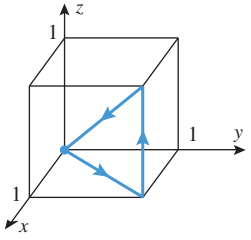



**35-36** Calcule $\int_C x^2z\, dx - yx^2\, dy + 3\, dz$ ao longo da curva $C$ mostrada em cada figura. ■

**35.**




**36.**



**37-40** Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo da curva $C$. ■

**37.** $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$
$C : \mathbf{r}(t) = 2 \cos t\,\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}\ (0 \le t \le \pi)$

**38.** $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
$C : \mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1)$

**39.** $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-3/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$
$C : \mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 1)$

**40.** $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
$C : \mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{k}\ (0 \le t \le \pi/2)$

**41.** Calcule a massa de um arame fino com o formato do arco circular $y = \sqrt{9 - x^2}\ (0 \le x \le 3)$ se a função de densidade for $\delta(x, y) = x\sqrt{y}$.

**42.** Calcule a massa de um arame fino com o formato da curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t\ (0 \le t \le 1)$ se a função de densidade $\delta$ for proporcional à distância da origem.

**43.** Calcule a massa de um arame fino com o formato da hélice $x = 3 \cos t$, $y = 3 \operatorname{sen} t$, $z = 4t\ (0 \le t \le \pi/2)$ se a função de densidade for $\delta = kx/(1 + y^2)\ (k > 0)$.

**44.** Calcule a massa de um arame fino com o formato da curva $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = 4\sqrt{t}\ (1 \le t \le 4)$ se a função de densidade for proporcional à distância acima do plano $xy$.

**45-48** Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}$ na partícula que se move ao longo da curva $C$. ■

**45.** $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$
$C : x = y^2$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$

**46.** $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + xy)\mathbf{i} + (y - x^2y)\mathbf{j}$
$C : x = t, \quad y = 1/t \quad (1 \le t \le 3)$

**47.** $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
$C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad (0 \le t \le 1)$

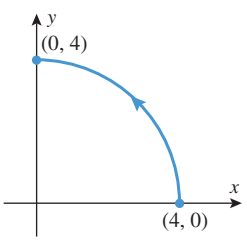
**48.** $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$
$C$ : ao longo de segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ até $(1, 3, 1)$ até $(2, -1, 4)$

**49-50** Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças

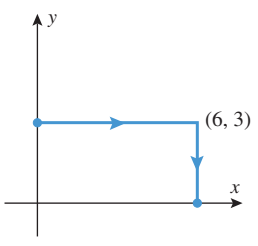
$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{4}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

em uma partícula que se move ao longo da curva $C$ mostrada em cada figura. ■

**49.**




**50.**




**51-52** Use uma integral de linha para calcular a área da superfície. ■

**51.** A superfície que se estende para cima da parábola $y = x^2$ $(0 \le x \le 2)$ do plano $xy$ ao plano $z = 3x$.

**52.** A superfície que se estende para cima desde o semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ no plano $xy$ até a superfície $z = x^2y$.

**53.** Como ilustrado na figura a seguir, um corte senoidal foi feito no topo de uma lata cilíndrica. Suponha que a base seja modelada pelas equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 0\ (0 \le t \le 2\pi)$ e a altura do corte como uma função de $t$ seja $z = 2 + 0{,}5 \operatorname{sen} 3t$.
(a) Use um argumento geométrico para determinar a área da superfície lateral da lata cortada.
(b) Escreva uma integral de linha para a área de superfície.
(c) Use a integral de linha para calcular a área da superfície.

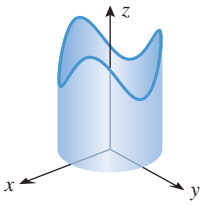



**Figura Ex-53**

**54.** Calcule a integral $\displaystyle\int_{-C} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$, onde $C$ é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ percorrido no sentido anti-horário.

**55.** Suponha que uma partícula se mova através do campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ do ponto $(0, 0)$ para o ponto $(1, 0)$, ao longo da curva $x = t$, $y = \lambda t(1 - t)$. Com qual valor de $\lambda$ o trabalho realizado pelo campo de forças será igual a 1?

**56.** Um fazendeiro que pesa 150 libras carrega um saco de grãos pesando 20 libras para cima numa escada helicoidal circular de raio igual a 25 pés em torno de um silo. À medida que o fazendeiro sobe, os grãos vazam do saco à razão de 1 libra por 10 pés de subida. Qual o trabalho executado pelo fazendeiro subindo uma distância vertical de 60 pés em exatamente quatro revoluções? [*Sugestão*: Encontre um campo vetorial que represente a força exercida pelo fazendeiro para levantar seu próprio peso mais o peso do saco para cima em cada ponto do trajeto.]

**57.** Suponha que a curva $C$ no plano $xy$ seja dada pela parametrização lisa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (a \le t \le b)$$

Em cada parte, utilize a notação usada na dedução da Fórmula (9).
(a) Sejam $m$ e $M$ os valores mínimo e máximo de $\|\mathbf{r}'(t)\|$ em $[a, b]$, respectivamente. Prove que

$$0 \le m(\max \Delta t_k) \le \max \Delta s_k \le M(\max \Delta t_k)$$

(b) Use (a) para provar que $\max \Delta s_k \to 0$ se, e somente se, $\Delta t_k \to 0$.

**58.** **Texto** Discuta as semelhanças e as diferenças entre as definições de uma integral definida em um intervalo (Definição 5.5.1, no Volume 1) e de uma integral de linha em relação ao comprimento de arco ao longo de uma curva (Definição 15.2.1).

**59.** **Texto** Descreva os diferentes tipos de integrais de linha e discuta como essas integrais se relacionam.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.2

**1.** $2\sqrt{2}$ **2.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **3.** $4\pi$ **4.** 0

## 15.3 INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO; CAMPOS VETORIAIS CONSERVATIVOS

*Nesta seção, mostraremos que, para certos tipos de campos vetoriais, a integral de linha de* **F** *ao longo de uma curva depende somente dos pontos extremos da curva e não da própria curva. Tais campos, que incluem campos gravitacionais e eletrostáticos, são de especial importância na Física e na Engenharia.*

### INTEGRAIS DE TRABALHO

Vimos, na seção anterior, que se **F** for um campo vetorial no espaço bi ou tridimensional, o trabalho realizado pelo campo em uma partícula que se move ao longo de uma curva parametrizada $C$, de um ponto inicial $P$ até um ponto final $Q$, é dado pela integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Consequentemente, chamamos uma integral de linha desse tipo também de ***integral de trabalho***. Lembre que uma integral de trabalho também pode ser expressa em forma escalar como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy \qquad \text{Espaço bidimensional} \qquad (1)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C f(x, y, z)\, dx + g(x, y, z)\, dy + h(x, y, z)\, dz \qquad \text{Espaço tridimensional} \qquad (2)$$

onde $f$, $g$ e $h$ são as funções componentes de **F**.

### INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO

A curva paramétrica $C$ em uma integral de trabalho é chamada de ***caminho de integração***. Um dos problemas importantes nas aplicações é determinar como o caminho de integração afeta o trabalho realizado por um campo vetorial, em uma partícula que se move de um ponto fixado $P$ para outro ponto fixado $Q$. Mostraremos, em breve, que se o campo vetorial **F** for conservativo (ou seja, é o gradiente de alguma função potencial $\phi$), então o trabalho que esse campo realiza na partícula que se move de $P$ para $Q$ não depende do caminho particular $C$ que a partícula segue. Ilustramos isso no seguinte exemplo.

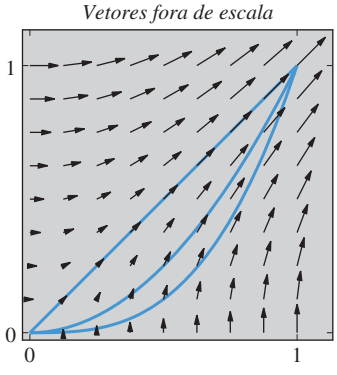



**Figura 15.3.1**

**▶ Exemplo 1** O campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ é conservativo, visto que é o gradiente de $\phi(x, y) = xy$ (verifique). Assim, a discussão precedente sugere que o trabalho realizado pelo campo na partícula que se move do ponto (0, 0) para o ponto (1, 1) deve ser o mesmo ao longo de diferentes caminhos. Confirme que o valor da integral de trabalho

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

é o mesmo ao longo dos seguintes caminhos (Figura 15.3.1):

(a) O segmento de reta $y = x$ de (0, 0) até (1, 1).

(b) A parábola $y = x^2$ de (0, 0) até (1, 1).

(c) A cúbica $y = x^3$ de (0, 0) até (1, 1).

***Solução (a)*** Com $x = t$ como parâmetro, o caminho de integração é dado por

$$x = t, \quad y = t \quad (0 \le t \le 1)$$

Assim,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (y\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}) = \int_C y\,dx + x\,dy$$
$$= \int_0^1 2t\,dt = 1$$

***Solução (b)*** Com $x = t$ como parâmetro, o caminho de integração é dado por

$$x = t, \quad y = t^2 \quad (0 \le t \le 1)$$

Assim,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y\,dx + x\,dy = \int_0^1 3t^2\,dt = 1$$

***Solução (c)*** Com $x = t$ como parâmetro, o caminho de integração é dado por

$$x = t, \quad y = t^3 \quad (0 \le t \le 1)$$

Assim,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y\,dx + x\,dy = \int_0^1 4t^3\,dt = 1 \quad \blacktriangleleft$$

## TEOREMA FUNDAMENTAL DAS INTEGRAIS DE LINHA

Lembre-se de que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 5.6.1, no Volume 1), se $F$ for uma antiderivada de $f$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

O seguinte resultado é o análogo daquele teorema para as integrais de linha no espaço bidimensional.

**15.3.1** TEOREMA **(*O Teorema Fundamental das Integrais de Linha*)** *Suponha que*

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

*seja um campo vetorial conservativo em alguma região aberta $D$ contendo os pontos $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$ e que $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sejam contínuas nessa região. Se*

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$$

*e se $C$ for uma curva paramétrica lisa por partes qualquer que começa em $(x_0, y_0)$, termina em $(x_1, y_1)$ e esteja toda contida na região $D$, então*

$$\int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) \tag{3}$$

ou, de forma equivalente,

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) \tag{4}$$

O valor de

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$$

depende da magnitude de $\mathbf{F}$ ao longo de $C$, do alinhamento de $\mathbf{F}$ com a direção de $C$ em cada ponto e do comprimento de $C$. Se $\mathbf{F}$ for conservativo, esses vários fatores sempre se equilibram, de tal modo que o valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ depende somente dos pontos inicial e final de $C$.

DEMONSTRAÇÃO Daremos a prova para uma curva $C$ lisa. A prova para uma curva lisa por partes, que é deixada como exercício, pode ser feita aplicando o teorema para cada parte lisa

individual e somando os resultados. Suponha que $C$ seja dada parametricamente por $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \le t \le b)$, de modo que os pontos inicial e final da curva sejam

$$(x_0, y_0) = (x(a), y(a)) \quad \text{e} \quad (x_1, y_1) = (x(b), y(b))$$

Como $\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi$, segue que

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j}$$

e então

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy = \int_a^b \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}[\phi(x(t), y(t))]\,dt = \phi(x(t), y(t))\Big]_{t=a}^{b} \\ &= \phi(x(b), y(b)) - \phi(x(a), y(a)) \\ &= \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Enunciado informalmente, esse teorema mostra que *o valor de uma integral de linha ao longo de um caminho liso por partes de um campo vetorial conservativo é* ***independente do caminho***; isto é, o valor da integral depende dos pontos inicial e final, mas não do caminho $C$ que os liga. Consequentemente, para as integrais de linha de campos vetoriais conservativos, é comum expressar (3) e (4) como

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) \tag{5}$$

Se $\mathbf{F}$ for conservativo, então temos uma escolha de métodos para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Podemos trabalhar diretamente com $C$, podemos trocar $C$ por alguma outra curva com as mesmas extremidades de $C$ ou podemos aplicar (3).

### ▶ Exemplo 2

(a) Confirme que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ do Exemplo 1 é conservativo mostrando que $\mathbf{F}(x, y)$ é o gradiente de $\phi(x, y) = xy$.

(b) Use o Teorema Fundamental das Integrais de Linha para calcular $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

***Solução (a)***

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

***Solução (b)*** De (5) obtemos

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(1, 1) - \phi(0, 0) = 1 - 0 = 1$$

que está de acordo com os resultados obtidos no Exemplo 1 integrando entre (0, 0) e (1, 1) ao longo de caminhos específicos. ◀

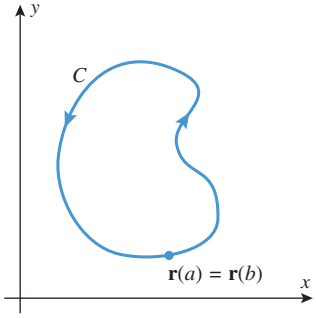



**Figura 15.3.2**

## INTEGRAIS DE LINHA AO LONGO DE CAMINHOS FECHADOS

As curvas paramétricas que começam e terminam no mesmo ponto desempenham um papel importante no estudo dos campos vetoriais, portanto há alguma terminologia especial associada a elas. Diz-se que uma curva paramétrica $C$ que é representada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$ com $a \le t \le b$ é ***fechada*** se o ponto inicial $\mathbf{r}(a)$ e o ponto final $\mathbf{r}(b)$ coincidem; isto é, $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ (Figura 15.3.2).

Segue de (5) que a integral de linha de um campo vetorial conservativo ao longo de um caminho fechado $C$ que começa e termina em $(x_0, y_0)$ é zero. Isso acontece porque o ponto $(x_1, y_1)$ em (5) é o mesmo que $(x_0, y_0)$ e, portanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0) = 0$$

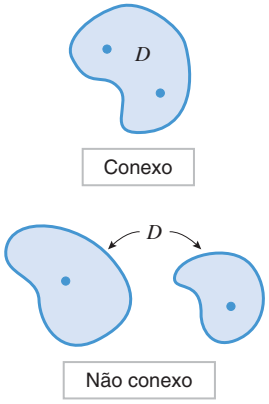



**Figura 15.3.3**

Nosso próximo objetivo é mostrar que a recíproca desse resultado também é verdadeira. Ou seja, queremos mostrar que, sob condições apropriadas, um campo vetorial no qual é nula a integral de linha ao longo de *todos* os caminhos fechados deve ser conservativo. Para que isso seja verdadeiro, precisamos exigir que o domínio $D$ do campo vetorial seja ***conexo***, o que significa que quaisquer dois pontos em $D$ podem ser unidos por alguma curva lisa por partes que esteja inteiramente contida em $D$. Enunciado informalmente, $D$ é conexo se não consiste em duas ou mais partes separadas (Figura 15.3.3).

**15.3.2 TEOREMA** *Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem contínuas em alguma região $D$ aberta e conexa, então as seguintes afirmações são equivalentes (todas verdadeiras ou todas falsas):*

(*a*) $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ *é um campo vetorial conservativo na região $D$.*

(*b*) $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *com qualquer curva fechada $C$ lisa por partes em $D$.*

(*c*) $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *é independente do caminho de qualquer ponto $P$ em $D$ para qualquer ponto $Q$ em $D$ com qualquer curva $C$ lisa por partes em $D$.*

Esse teorema pode ser estabelecido provando-se três implicações: $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$ e $(c) \Rightarrow (a)$. Como mostramos acima que $(a) \Rightarrow (b)$, precisamos provar somente as duas últimas implicações. Vamos provar $(c) \Rightarrow (a)$ e deixar a outra implicação como um exercício.

**DEMONSTRAÇÃO** $(c) \Rightarrow (a)$. Estamos supondo que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho com qualquer curva lisa por partes na região, e queremos mostrar que há uma função $\phi = \phi(x, y)$ tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}(x, y)$ em cada ponto da região; isto é,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = f(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = g(x, y) \tag{6}$$

Agora, escolha um ponto fixado $(a, b)$ em $D$, seja $(x, y)$ um ponto qualquer em $D$ e defina

$$\phi(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{7}$$

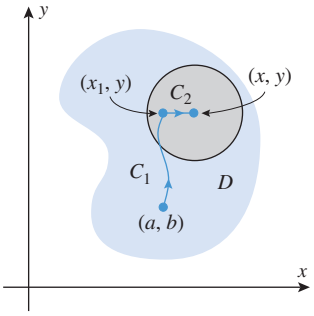



**Figura 15.3.4**

Essa é uma definição que não é ambígua porque estamos supondo que a integral é independente do caminho. Mostraremos que $\nabla\phi = \mathbf{F}$. Como $D$ é aberta, podemos encontrar um disco circular centrado em $(x, y)$, cujos pontos fiquem inteiramente em $D$. Como mostra a Figura 15.3.4, escolha qualquer ponto $(x_1, y)$ nesse disco que fique na mesma reta horizontal que $(x, y)$, mas tal que $x_1 < x$. Como a integral de (7) é independente do caminho, podemos calculá-la integrando, primeiramente, de $(a, b)$ para $(x_1, y)$ ao longo de uma curva $C_1$ lisa por partes em $D$ e, depois, continuar ao longo do segmento de reta horizontal $C_2$ de $(x_1, y)$ para $(x, y)$. Isso dá

$$\phi(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Como o primeiro membro não depende de $x$, sua derivada parcial em relação a $x$ é nula e, então,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{C_2} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy$$

Entretanto, a integral de linha em relação a $y$ é nula ao longo do segmento de reta horizontal $C_2$, de modo que essa equação simplifica para

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{C_2} f(x, y)\,dx \tag{8}$$

Para calcular a integral nessa expressão, consideramos $y$ como uma constante e expressamos a reta $C_2$ parametricamente como

$$x = t, \quad y = y \quad (x_1 \le t \le x)$$

Correndo o risco de confundir o leitor, mas para evitar complicar a notação, usamos $x$ como variável dependente nas equações paramétricas e como o ponto extremo do segmento de reta. Com a última interpretação de $x$, segue que (8) pode ser expressa como

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x} f(t, y)\,dt$$

Aplicamos, agora, a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 5.6.3, no Volume 1), tratando $y$ como uma constante, o que dá

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = f(x, y)$$

e prova a primeira parte de (6). A prova de que $\partial\phi/\partial y = g(x, y)$ pode ser obtida de maneira análoga unindo $(x, y)$ a um ponto $(x, y_1)$ por um segmento de reta vertical (Exercício 39). ■

## ■ UM TESTE PARA CAMPOS VETORIAIS CONSERVATIVOS

Apesar de o Teorema 15.3.2 ser uma caracterização importante dos campos vetoriais conservativos, não é uma ferramenta de cálculo eficiente porque, geralmente, não é possível calcular a integral de trabalho em todas as curvas lisas por partes em $D$, como exigido nas partes $(b)$ e $(c)$. Para desenvolver um método para determinar se um campo vetorial é conservativo, precisamos introduzir alguns conceitos sobre curvas paramétricas e conjuntos conexos. Diremos que uma curva paramétrica é ***simples*** se ela não intersecta a si mesma entre seus pontos extremos. Uma curva paramétrica simples pode ou não ser fechada (Figura 15.3.5). Além disso, diremos que um conjunto conexo do espaço bidimensional é ***simplesmente conexo*** se nenhuma curva simples fechada em $D$ envolver pontos que não pertençam a $D$. Enunciando informalmente, um conjunto conexo $D$ é simplesmente conexo se não tiver buracos; um conjunto conexo com um ou mais buracos é dito ***multiplamente conexo*** (Figura 15.3.6).

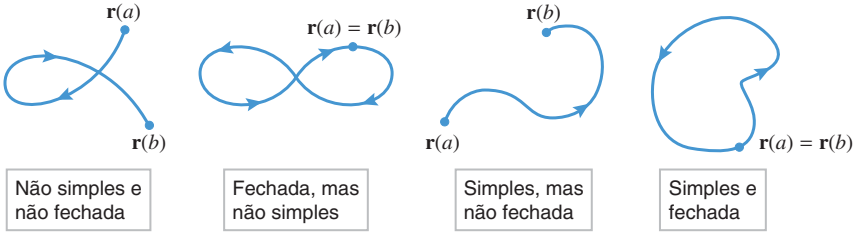



**Figura 15.3.5**

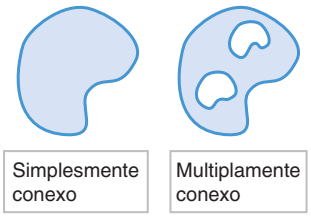



**Figura 15.3.6**

O seguinte teorema é a principal ferramenta para determinar se um campo vetorial no espaço bidimensional é conservativo.

**15.3.3 TEOREMA** ***(Teste de Campo Conservativo)*** *Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem contínuas e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em alguma região aberta $D$ e se o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ for conservativo em $D$, então*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{9}$$

*em cada ponto de $D$. Reciprocamente, se $D$ for simplesmente conexo e (9) valer em cada ponto de $D$, então $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ é conservativo.*

**ADVERTÊNCIA**

Em (9), o componente **i** de **F** é derivado em relação a $y$ e o componente **j**, em relação a $x$. É fácil inverter essa ordem por engano.

Uma demonstração completa desse teorema requer resultados de Cálculo avançado e será omitida. Entretanto, não é difícil ver por que (9) vale se **F** for conservativo. Para isso, suponha que $\mathbf{F} = \nabla\phi$, caso em que podemos escrever as funções $f$ e $g$ como

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = f \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = g \tag{10}$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Contudo, as derivadas parciais mistas nessas equações são iguais (Teorema 13.3.2), logo segue (9).

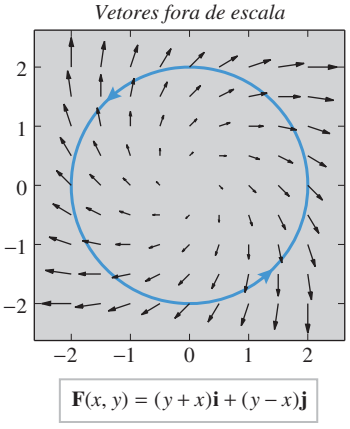



**Figura 15.3.7**

▶ **Exemplo 3** Use o Teorema 15.3.3 para determinar se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$$

é conservativo em algum conjunto aberto.

***Solução*** Seja $f(x, y) = x + y$ e $g(x, y) = y - x$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -1$$

Assim, não há pontos no plano $xy$ em que se verifique a condição (9), portanto **F** não é conservativo em qualquer conjunto aberto. ◀

**OBSERVAÇÃO**

Como o campo vetorial **F** do Exemplo 3 não é conservativo, segue do Teorema 15.3.2 que devem existir curvas fechadas lisas por partes em cada conjunto aberto conexo no plano $xy$, nas quais

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \neq 0$$

Tal curva é o círculo mostrado na Figura 15.3.7. A figura sugere que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} < 0$ em cada ponto de $C$ (por quê?), de modo que $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds > 0$.

Uma vez estabelecido que um campo vetorial é conservativo, pode ser obtida uma função potencial do campo integrando, primeiramente, qualquer uma das equações em (10). O exemplo a seguir ilustra essa afirmação.

**► Exemplo 4** Seja $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (1 + 3x^2y^2)\mathbf{j}$.

(a) Mostre que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo em todo o plano $xy$.

(b) Determine $\phi$ integrando primeiro $\partial\phi/\partial x$.

(c) Determine $\phi$ integrando primeiro $\partial\phi/\partial y$.

***Solução (a)*** Como $f(x, y) = 2xy^3$ e $g(x, y) = 1 + 3x^2y^2$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial g}{\partial x}$$

portanto (9) vale em cada $(x, y)$.

Também podemos usar (7) para encontrar uma função potencial de um campo conservativo. Por exemplo, encontre uma função potencial do campo vetorial do Exemplo 4 calculando (7) no segmento de reta

$$\mathbf{r}(t) = t(x\mathbf{i}) + t(y\,\mathbf{j}) \quad (0 \le t \le 1)$$

de $(0, 0)$ até $(x, y)$.

***Solução (b)*** Como o campo $\mathbf{F}$ é conservativo, há uma função potencial $\phi$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 1 + 3x^2y^2 \tag{11}$$

Integrando a primeira dessas equações em relação a $x$ (e tratando $y$ como uma constante), obtemos

$$\phi = \int 2xy^3\,dx = x^2y^3 + k(y) \tag{12}$$

onde $k(y)$ representa a "constante" de integração. Justifica-se tratar a constante de integração como uma função de $y$, visto que $y$ é mantida constante no processo de integração. Para determinar $k(y)$, diferenciamos (12) em relação a $y$ e usamos a segunda equação de (11) para obter

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3x^2y^2 + k'(y) = 1 + 3x^2y^2$$

da qual segue que $k'(y) = 1$ Assim,

$$k(y) = \int k'(y)\,dy = \int 1\,dy = y + K$$

onde $K$ é uma constante de integração (numérica). Substituindo em (12), obtemos

$$\phi = x^2y^3 + y + K$$

O surgimento da constante arbitrária $K$ nos diz que $\phi$ não é única. Para conferir os cálculos, o leitor pode querer verificar que $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

***Solução (c)*** Integrando a segunda equação de (11) em relação a $y$ (e tratando $x$ como uma constante), temos

$$\phi = \int (1 + 3x^2y^2)\,dy = y + x^2y^3 + k(x) \tag{13}$$

onde $k(x)$ é a "constante" de integração. Diferenciando (13) em relação a $x$ e usando a primeira equação de (11) temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy^3 + k'(x) = 2xy^3$$

da qual segue que $k'(x) = 0$ e, consequentemente, que $k(x) = K$, onde $K$ é uma constante de integração numérica. Substituindo em (13), obtemos

$$\phi = y + x^2y^3 + K$$

que está de acordo com a solução da parte (b). ◄

**► Exemplo 5** Use a função potencial obtida no Exemplo 4 para calcular a integral

$$\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3\,dx + (1 + 3x^2y^2)\,dy$$

Na solução do Exemplo 5, observe que a constante $K$ desaparece. Em problemas de integração futuros, muitas vezes, omitiremos $K$ nos cálculos. Veja o Exemplo 7 para outras maneiras de calcular essa integral.

***Solução*** O integrando pode ser expresso como $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}$ é o campo vetorial do Exemplo 4. Assim, usando a Fórmula (3) e a função potencial $\phi = y + x^2y^3 + K$ de $\mathbf{F}$, obtemos

$$\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3\,dx + (1 + 3x^2y^2)\,dy = \int_{(1,4)}^{(3,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(3, 1) - \phi(1, 4)$$
$$= (10 + K) - (68 + K) = -58 \quad \blacktriangleleft$$

**► Exemplo 6** Seja $\mathbf{F}(x, y) = e^y\mathbf{i} + xe^y\mathbf{j}$ um campo de forças no plano $xy$.

(a) Verifique que o campo vetorial $\mathbf{F}$ é conservativo em todo o plano $xy$.

(b) Determine o trabalho realizado pelo campo em uma partícula que se move de $(1, 0)$ até $(-1, 0)$ ao longo do caminho semicircular $C$ mostrado na Figura 15.3.8.

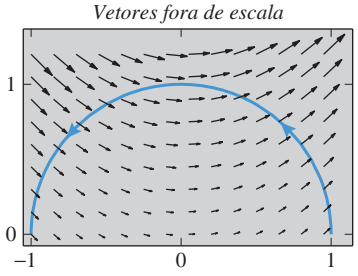


**Figura 15.3.8**

***Solução (a)*** Para o campo dado, temos $f(x, y) = e^y$ e $g(x, y) = xe^y$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^y) = e^y = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y)$$

de modo que (9) vale em cada $(x, y)$ e, portanto, $\mathbf{F}$ é conservativo em todo o plano $xy$.

***Solução (b)*** Pela Fórmula (34) da Seção 15.2, o trabalho realizado pelo campo é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C e^y\,dx + xe^y\,dy \tag{14}$$

Entretanto, os cálculos envolvidos na integração ao longo de $C$ são cansativos, de modo que é preferível aplicar o Teorema 15.3.1, tirando vantagem do fato de que o campo é conservativo e a integral é independente do caminho. Assim, escrevemos (14) como

$$W = \int_{(1,0)}^{(-1,0)} e^y\,dx + xe^y\,dy = \phi(-1, 0) - \phi(1, 0) \tag{15}$$

Como ilustrado no Exemplo 4, podemos determinar $\phi$ integrando qualquer uma das equações

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^y \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = xe^y \tag{16}$$

Vamos integrar a primeira. Obtemos

$$\phi = \int e^y\,dx = xe^y + k(y) \tag{17}$$

Diferenciando essa equação em relação a $y$ e usando a segunda equação de (16), temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = xe^y + k'(y) = xe^y$$

da qual obtém-se $k'(y) = 0$ ou $k(y) = K$. Assim, por (17)

$$\phi = xe^y + K$$

e, portanto, por (15)

$$W = \phi(-1, 0) - \phi(1, 0) = (-1)e^0 - 1e^0 = -2 \quad \blacktriangleleft$$

## CAMPOS VETORIAIS CONSERVATIVOS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Todos os resultados desta seção têm análogos no espaço tridimensional: os Teoremas 15.3.1 e 15.3.2 podem ser estendidos ao espaço tridimensional simplesmente adicionando uma terceira variável e modificando as hipóteses adequadamente. Por exemplo, no espaço tridimensional, a Fórmula (3) torna-se

$$\int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_0, y_0, z_0) \tag{18}$$

O Teorema 15.3.3 também pode ser estendido para campos vetoriais do espaço tridimensional. Deixamos como exercício provar que se $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ for um campo conservativo, então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y} \tag{19}$$

isto é, rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Reciprocamente, um campo vetorial que satisfaça essas condições em uma região convenientemente restrita é conservativo naquela região se $f$, $g$ e $h$ forem contínuas e tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região. Alguns problemas envolvendo as Fórmulas (18) e (19) são dados nos exercícios de revisão ao fim deste capítulo.

## CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ for um campo de forças conservativo com função potencial $\phi(x, y, z)$, então dizemos que $V(x, y, z) = -\phi(x, y, z)$ é a ***energia potencial*** do campo no ponto $(x, y, z)$. Assim, pela versão do espaço tridimensional do Teorema 15.3.1, o trabalho $W$ realizado pela força $\mathbf{F}$ em uma partícula que se move ao longo de qualquer caminho $C$, de um ponto $(x_0, y_0, z_0)$ até um ponto $(x_1, y_1, z_1)$, está relacionado à energia potencial pela equação

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_0, y_0, z_0) = -[V(x_1, y_1, z_1) - V(x_0, y_0, z_0)] \tag{20}$$

Isto é, o trabalho realizado pelo campo é o negativo da variação na energia potencial. Em particular, segue, do análogo no espaço tridimensional do Teorema 15.3.2, que se uma partícula percorre um caminho fechado liso por partes em um campo vetorial conservativo, o trabalho realizado pelo campo é nulo e não há mudança na energia potencial. Dando um passo adiante, suponha que uma partícula de massa $m$ se mova ao longo de uma curva lisa por partes qualquer (não necessariamente fechada) em um campo vetorial conservativo $\mathbf{F}$, começando em $(x_0, y_0, z_0)$ com velocidade $v_i$ e terminado em $(x_1, y_1, z_1)$ com velocidade $v_f$. Se $\mathbf{F}$ for a única força atuando na partícula, então um argumento análogo ao utilizado na dedução da Equação (6) da Seção 6.6, no Volume 1, mostra que o trabalho realizado na partícula por $\mathbf{F}$ é igual à variação $\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$ na energia cinética da partícula. Se denotarmos por $V_i$ a energia potencial no ponto inicial e por $V_f$ a energia no ponto final, segue de (20) que

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = -[V_f - V_i]$$

que podemos reescrever como

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + V_f = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + V_i$$

Essa equação diz que a energia total da partícula (energia cinética + energia potencial) não muda à medida que a partícula se move ao longo de um caminho em um campo vetorial conservativo. Esse resultado, chamado de ***princípio da conservação da energia***, explica a origem do termo "campo vetorial conservativo".

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.3 (Ver página 1121 para respostas.)

1. Se $C$ for uma curva lisa por partes de $(1, 2, 3)$ a $(4, 5, 6)$, então
$$\int_C dx + 2\,dy + 3\,dz = _____$$

2. Se $C$ for a parte do círculo $x^2 + y^2 = 1$ com $0 \le x$, orientada no sentido anti-horário, e se $f(x, y) = ye^x$, então
$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = _____$$

3. Uma função potencial do campo vetorial
$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + (xz + z)\mathbf{j} + (xy + y + 1)\mathbf{k}$$
é $\phi(x, y, z) =$ _____.

4. Se $a$, $b$ e $c$ forem números reais não nulos tais que o campo vetorial $x^5y^a\mathbf{i} + x^by^c\mathbf{j}$ seja conservativo, então
$a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.

## EXERCÍCIOS 15.3 C CAS

**1-6** Determine se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo. Se for, encontre uma função potencial do campo. ■

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = 3y^2\mathbf{i} + 6xy\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + 5xy^2\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = (\cos y + y \cos x)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = x \ln y\mathbf{i} + y \ln x\mathbf{j}$
7. Em cada parte, calcule $\int_C 2xy^3\,dx + (1 + 3x^2y^2)\,dy$ ao longo da curva $C$ e compare sua resposta com o resultado obtido no Exemplo 5.
   (a) $C$ é o segmento de reta de $(1, 4)$ até $(3, 1)$
   (b) $C$ consiste no segmento de reta de $(1, 4)$ até $(1, 1)$, seguido pelo segmento de reta de $(1, 1)$ até $(3, 1)$.
8. (a) Mostre que a integral de linha $\int_C y \operatorname{sen} x\,dx - \cos x\,dy$ é independente do caminho.
   (b) Calcule a integral da parte (a) ao longo de reta de $(0, 1)$ até $(\pi, -1)$.
   (c) Calcule a integral $\int_{(0,1)}^{(\pi,-1)} y \operatorname{sen} x\,dx - \cos x\,dy$ usando o Teorema 15.3.1 e confirme que o valor é o mesmo que o obtido na parte (b).

**9-14** Mostre que a integral é independente do caminho e use o Teorema 15.3.1 para determinar seu valor. ■

9. $\displaystyle\int_{(1,2)}^{(4,0)} 3y\,dx + 3x\,dy$
10. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x \cos y\,dy$
11. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(3,2)} 2xe^y\,dx + x^2e^y\,dy$
12. $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(0,1)} (3x - y + 1)\,dx - (x + 4y + 2)\,dy$
13. $\displaystyle\int_{(2,-2)}^{(-1,0)} 2xy^3\,dx + 3y^2x^2\,dy$
14. $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(3,3)} \left(e^x \ln y - \frac{e^y}{x}\right)dx + \left(\frac{e^x}{y} - e^y \ln x\right)dy$, onde $x$ e $y$ são positivos.

**15-18** Confirme que o campo de forças $\mathbf{F}$ é conservativo em alguma região aberta conexa contendo os pontos $P$ e $Q$ e, então, calcule o trabalho realizado pelo campo de forças em uma partícula que se move de $P$ até $Q$ ao longo de uma curva lisa arbitrária na região de $P$ até $Q$. ■

15. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$; $P\,(1, 1)$, $Q\,(0, 0)$
16. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j}$; $P\,(-3, 0)$, $Q\,(4, 1)$
17. $\mathbf{F}(x, y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$; $P\,(-1, 1)$, $Q\,(2, 0)$
18. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y} \cos x\mathbf{i} + e^{-y} \operatorname{sen} x\mathbf{j}$; $P\,(\pi/2, 1)$, $Q\,(-\pi/2, 0)$

**19-22 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

19. Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial e existir alguma curva fechada $C$ tal que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, então $\mathbf{F}$ será conservativo.
20. Se $\mathbf{F}(x, y) = ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$ for um campo vetorial conservativo, então $a = b$.
21. Se $\phi(x, y)$ for uma função potencial de um campo vetorial constante, então o gráfico de $z = \phi(x, y)$ será um plano.
22. Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem funções diferenciáveis definidas no plano $xy$ e se $f_y(x, y) = g_x(x, y)$ em cada $(x, y)$, então existirá alguma função $\phi(x, y)$ tal que $\phi_x(x, y) = f(x, y)$ e $\phi_y(x, y) = g(x, y)$.

**23-24** Encontre o valor exato de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ usando qualquer método. ■

23. $\mathbf{F}(x, y) = (e^y + ye^x)\mathbf{i} + (xe^y + e^x)\mathbf{j}$
$C$: $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}(\pi t/2)\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j}$ $\quad (1 \le t \le 2)$
24. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + \cos y)\mathbf{j}$
$C$: $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t \cos(t/3)\,\mathbf{j}$ $\quad (0 \le t \le \pi)$

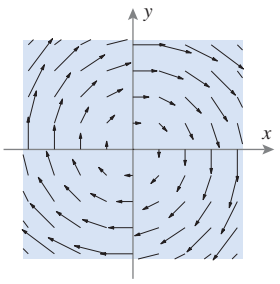
C 25. Use a capacidade de integração numérica de um CAS ou outro recurso para aproximar o valor da integral do Exercício 23 por integração direta. Confirme que a aproximação numérica é consistente com o valor exato.

C 26. Use a capacidade de integração numérica de um CAS ou outro recurso para aproximar o valor da integral do Exercício 24 por integração direta. Confirme que a aproximação numérica é consistente com o valor exato.

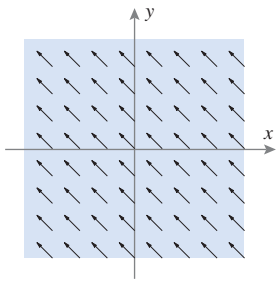
## ENFOCANDO CONCEITOS

**27-28** O campo vetorial dado é conservativo? Explique. ■

**27.**




**28.**




**29.** Seja $C$ um círculo no domínio no plano $xy$ de um campo vetorial conservativo de funções componentes contínuas. Explique por que devem existir pelo menos dois pontos em $C$ em que o campo vetorial é normal ao círculo.

**30.** O resultado do Exercício 29 permanece verdadeiro se o círculo $C$ for trocado por um quadrado? Explique.

**31.** Prove: Se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

for um campo conservativo e $f$, $g$ e $h$ forem contínuas e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região, então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

na região.

**32.** Use o resultado do Exercício 31 para mostrar que a integral

$$\int_C yz\,dx + xz\,dy + yx^2\,dz$$

é dependente do caminho.

**33.** Encontre uma função não nula $h$ para a qual

$$\mathbf{F}(x, y) = h(x)[x \operatorname{sen} y + y \cos y]\mathbf{i} + h(x)[x \cos y - y \operatorname{sen} y]\mathbf{j}$$

seja conservativo.

**34.** (a) No Exemplo 3 da Seção 15.1, mostramos que

$$\phi(x, y) = -\frac{c}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

é uma função potencial do campo de quadrado inverso bidimensional

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{c}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

mas não explicamos como a função potencial $\phi(x, y)$ foi obtida. Use o Teorema 15.3.3 para mostrar que o campo de quadrado inverso bidimensional é conservativo em toda parte, exceto na origem e, então, use o método do Exemplo 4 para deduzir a fórmula de $\phi(x, y)$.

(b) Use uma generalização apropriada do método do Exemplo 4 para deduzir a função potencial

$$\phi(x, y, z) = -\frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

do campo de quadrado inverso tridimensional, dado pela Fórmula (5) da Seção 15.1.

**35-36** Use o resultado do Exercício 34(b). ■

**35.** Em cada parte, encontre o trabalho realizado pelo campo de quadrado inverso tridimensional

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

em uma partícula que se move ao longo da curva $C$.

(a) $C$ é o segmento de reta de $P(1, 1, 2)$ para $Q(3, 2, 1)$.

(b) $C$ é a curva

$$\mathbf{r}(t) = (2t^2 + 1)\mathbf{i} + (t^3 + 1)\mathbf{j} + (2 - \sqrt{t})\mathbf{k}$$

onde $0 \le t \le 1$.

(c) $C$ é o círculo de raio 1 no plano $xy$ centrado em $(2, 0, 0)$ percorrido no sentido anti-horário.

**36.** Seja $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$.

(a) Mostre que

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

se $C_1$ e $C_2$ forem os trajetos semicirculares de $(1, 0)$ até $(-1, 0)$ dados por

$$C_1\colon x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t \qquad (0 \le t \le \pi)$$

$$C_2\colon x = \cos t,\ y = -\operatorname{sen} t \qquad (0 \le t \le \pi)$$

(b) Mostre que os componentes de $\mathbf{F}$ satisfazem a Fórmula (9).

(c) Os resultados das partes (a) e (b) violam o Teorema 15.3.3? Explique.

**37.** Prove o Teorema 15.3.1 se $C$ for uma curva lisa por partes composta de curvas lisas $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

**38.** Prove que $(b)$ implica $(c)$ no Teorema 15.3.2. [*Sugestão*: Considere quaisquer duas curvas orientadas lisas por partes $C_1$ e $C_2$ na região desde um ponto $P$ até um ponto $Q$ e integre em torno da curva fechada consistindo em $C_1$ e $-C_2$.]

**39.** Complete a prova do Teorema 15.3.2 mostrando que $\partial\phi/\partial y = g(x, y)$, onde $\phi(x, y)$ é a função dada em (7).

**40.** **Texto** Descreva os vários métodos disponíveis para calcular a integral de um campo conservativo ao longo de uma curva lisa.

**41.** **Texto** Discuta algumas das maneiras pelas quais é possível mostrar que um campo vetorial não é conservativo.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.3

**1.** 18 **2.** 2 **3.** $xyz + yz + z$ **4.** 6; 6; 5

# 15.4 TEOREMA DE GREEN

*Nesta seção, discutiremos um teorema notável e bonito que expressa uma integral dupla em uma região plana em termos de uma integral de linha em torno de sua fronteira.*

## TEOREMA DE GREEN

**15.4.1 TEOREMA** **(*Teorema de Green*)** *Seja $R$ uma região plana simplesmente conexa, cuja fronteira é uma curva $C$ lisa por partes, fechada, simples e orientada no sentido anti-horário. Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem contínuas e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo $R$, então*

$$\int_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA \tag{1}$$

**DEMONSTRAÇÃO** Para simplificar, demonstraremos o teorema para regiões que sejam simultaneamente do tipo I e tipo II (ver Definição 14.2.1). Tal região é mostrada na Figura 15.4.1. O ponto-chave da demonstração é mostrar que

$$\int_C f(x, y)\,dx = -\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}\,dA \quad \text{e} \quad \int_C g(x, y)\,dy = \iint_R \frac{\partial g}{\partial x}\,dA \tag{2–3}$$

**Figura 15.4.1**

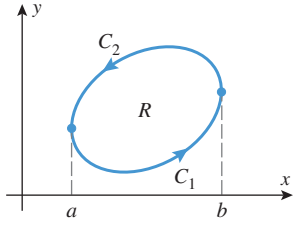



**Figura 15.4.2**

Para provar (2), considere $R$ como uma região do tipo I, e sejam $C_1$ e $C_2$ as curvas de fronteira inferior e superior, orientadas conforme a Figura 15.4.2. Então,

$$\int_C f(x, y)\,dx = \int_{C_1} f(x, y)\,dx + \int_{C_2} f(x, y)\,dx$$

ou, de maneira equivalente,

$$\int_C f(x, y)\,dx = \int_{C_1} f(x, y)\,dx - \int_{-C_2} f(x, y)\,dx \tag{4}$$

(Esse passo ajudará a simplificar os cálculos, uma vez que $C_1$ e $-C_2$ são, ambas, orientadas da esquerda para a direita.) As curvas $C_1$ e $-C_2$ podem ser expressas parametricamente como

$$C_1\colon x = t, \quad y = g_1(t) \quad (a \le t \le b)$$

$$-C_2\colon x = t, \quad y = g_2(t) \quad (a \le t \le b)$$

Assim, podemos reescrever (4) como

$$\int_C f(x, y)\,dx = \int_a^b f(t, g_1(t))x'(t)\,dt - \int_a^b f(t, g_2(t))x'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t, g_1(t))\,dt - \int_a^b f(t, g_2(t))\,dt$$

$$= -\int_a^b [f(t, g_2(t)) - f(t, g_1(t))]\,dt$$

$$= -\int_a^b \left[ f(t, y) \right]_{y=g_1(t)}^{y=g_2(t)} dt = -\int_a^b \left[ \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \right] dt$$

$$= -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\,dx = -\iint_R \frac{\partial f}{\partial y}\,dA$$

Pois $x = t$

Forneça os detalhes da demonstração de (3).

A demonstração de (3) é obtida de maneira análoga, considerando $R$ como uma região do tipo II. Omitimos os detalhes. ■

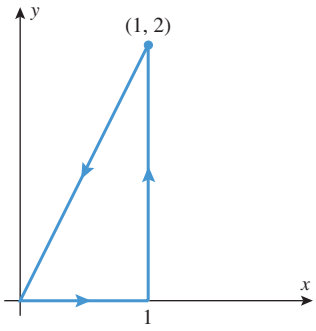



**Figura 15.4.3**

► **Exemplo 1** Use o Teorema de Green para calcular

$$\int_C x^2 y\,dx + x\,dy$$

ao longo do caminho triangular mostrado na Figura 15.4.3.

***Solução*** Como $f(x, y) = x^2y$ e $g(x, y) = x$, segue de (1) que

$$\int_C x^2 y\,dx + x\,dy = \iint_R \left[ \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) \right] dA = \int_0^1 \int_0^{2x} (1 - x^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 (2x - 2x^3)\,dx = \left[ x^2 - \frac{x^4}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Esse resultado está de acordo com o obtido no Exemplo 10 da Seção 15.2, no qual calculamos a integral de linha diretamente. Note como essa solução é muito mais simples. ◄

**George Green (1793 – 1841)** Matemático e físico inglês. Green abandonou a escola com pouca idade para trabalhar na padaria de seu pai e, consequentemente, teve pouca educação básica formal. Quando seu pai abriu um moinho, o rapaz usava o aposento superior como sala de estudo, e lá aprendeu Física e Matemática sozinho, lendo livros de bibliotecas. Em 1828, Green publicou seu trabalho mais importante, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (Um Ensaio sobre a Aplicação da Análise Matemática às Teorias de Eletricidade e Magnetismo). Apesar do Teorema de Green ter aparecido naquele trabalho, o resultado passou praticamente despercebido, devido à pequena tiragem e à distribuição apenas local. Após a morte de seu pai em 1829, Green foi instigado por amigos a procurar educação superior. Em 1833, após quatro anos de estudos autodidáticos para preencher lacunas de sua educação elementar, ele foi admitido na Universidade Caius, em Cambridge. Formou-se quatro anos mais tarde, com desempenho desapontador em seus exames finais – possivelmente, porque estava mais interessado na própria pesquisa. Depois de uma sucessão de trabalhos sobre luz e som, foi nomeado Membro Perse da Universidade Caius. Dois anos mais tarde, morreu. Em 1845, quatro anos após a sua morte, seu trabalho de 1828 foi publicado, e as teorias nele desenvolvidas por esse obscuro autodidata, filho de padeiro, ajudaram a desbravar o caminho das teorias modernas de eletricidade e magnetismo.

## UMA NOTAÇÃO PARA INTEGRAIS DE LINHA AO LONGO DE CURVAS FECHADAS SIMPLES

É prática comum denotar uma integral de linha ao longo de uma curva fechada simples por um sinal de integral com um círculo sobreposto. Com essa notação, a Fórmula (1) seria escrita como

$$\oint_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA$$

Algumas vezes, acrescentamos uma seta ao círculo para indicar se a integração é no sentido horário ou anti-horário. Assim, se desejarmos enfatizar o sentido anti-horário da integração requerida pelo Teorema 15.4.1, expressamos (1) com a notação

$$\oint_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA \tag{5}$$

## DETERMINAÇÃO DO TRABALHO USANDO O TEOREMA DE GREEN

Segue, da Fórmula (26) da Seção 15.2, que a integral do lado esquerdo de (5) é o trabalho realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ em uma partícula que se move no sentido anti-horário ao longo da curva fechada simples $C$. No caso em que esse campo vetorial for conservativo, segue do Teorema 15.3.2 que o integrando da integral dupla do lado direito de (5) é nulo, de modo que o trabalho realizado pelo campo é nulo, como esperado. Para campos vetoriais que não são conservativos, em geral é mais eficiente calcular o trabalho ao longo de curvas fechadas simples usando o Teorema de Green do que parametrizando a curva.

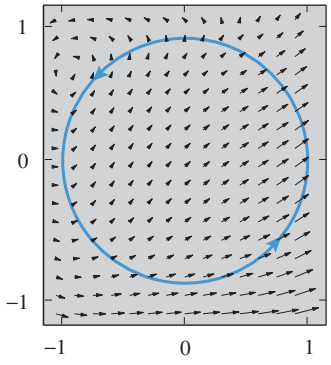


**Figura 15.4.4**

► **Exemplo 2** Encontre o trabalho realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$$

em uma partícula que percorre uma vez o círculo $x^2 + y^2 = 1$ no sentido anti-horário (Figura 15.4.4).

***Solução*** O trabalho $W$ realizado pelo campo é

$$\begin{aligned} W = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \oint_C (e^x - y^3)\,dx + (\cos y + x^3)\,dy \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(\cos y + x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x - y^3)\right] dA \qquad \text{Teorema de Green} \\ &= \iint_R (3x^2 + 3y^2)\,dA = 3\iint_R (x^2 + y^2)\,dA \\ &= 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2)r\,dr\,d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Convertemos para coordenadas polares

## DETERMINAÇÃO DE ÁREAS USANDO O TEOREMA DE GREEN

O Teorema de Green leva a algumas fórmulas novas para a área $A$ de uma região $R$ que satisfaça as condições do teorema. Duas de tais fórmulas podem ser obtidas como segue:

$$A = \iint_R dA = \oint_C x\,dy \quad \text{e} \quad A = \iint_R dA = \oint_C (-y)\,dx$$

Tome $f(x,y) = 0$ e $g(x,y) = x$ em (1).

Tome $f(x,y) = -y$ e $g(x,y) = 0$ em (1).

Apesar de a terceira fórmula em (6) parecer mais complicada do que as outras duas, ela leva frequentemente a integrações mais simples. Cada uma oferece vantagens em certas situações.

Pode-se obter uma terceira fórmula somando essas duas equações. Assim, temos as três fórmulas seguintes que expressam a área $A$ de uma região $R$ em termos de integrais de linha ao longo da fronteira:

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy \tag{6}$$

**▶ Exemplo 3** Use uma integral de linha para calcular a área envolvida pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

***Solução*** A elipse, com orientação no sentido anti-horário, pode ser representada parametricamente por

$$x = a\cos t, \quad y = b\,\text{sen}\,t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

Se denotarmos essa curva por $C$, então, pela terceira fórmula em (6), a área $A$ envolvida pela elipse é

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(-b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t) + (a\cos t)(b\cos t)]\,dt \\ &= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} (\text{sen}^2\,t + \cos^2 t)\,dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$ ◀

## O TEOREMA DE GREEN PARA REGIÕES MULTIPLAMENTE CONEXAS

Lembre que uma região plana é dita simplesmente conexa se não tiver buracos e é dita multiplamente conexa se tiver um ou mais buracos (ver Figura 15.3.6). No início desta seção, enunciamos o Teorema de Green para integração no sentido anti-horário ao longo da fronteira de uma região simplesmente conexa $R$ (Teorema 15.4.1). Nosso próximo objetivo é estender esse teorema para regiões multiplamente conexas. Para isso, precisamos que *a região fique à esquerda quando qualquer porção da fronteira é percorrida no sentido de sua orientação*. Isso implica que a curva da fronteira externa da região é orientada no sentido anti-horário e que as curvas da fronteira que envolvem buracos têm orientação no sentido horário (Figura 15.4.5*a*). Se todas as porções da fronteira de uma região multiplamente conexa $R$ forem orientadas desse modo, então dizemos que a fronteira de $R$ tem ***orientação positiva***.

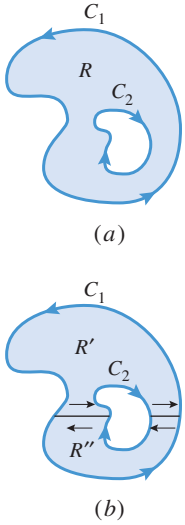



**Figura 15.4.5**

Vamos, agora, deduzir uma versão do Teorema de Green que se aplica a regiões multiplamente conexas com fronteira orientada positivamente. Para simplificar, vamos considerar uma região multiplamente conexa $R$ com um buraco e supor que $f(x, y)$ e $g(x, y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo $R$. Como mostrado na Figura 15.4.5*b*, dividimos $R$ em duas regiões, $R'$ e $R''$, introduzindo dois "cortes" em $R$. Os cortes são mostrados como segmentos de reta, mas quaisquer curvas lisas por partes servem. Supondo que $f$ e $g$ satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green em $R$ (e, portanto, em $R'$ e $R''$), podemos aplicar o teorema a $R'$ e $R''$ para obter

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA &= \iint_{R'} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA + \iint_{R''} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA \\ &= \underset{\text{Fronteira de } R'}{\oint} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy + \underset{\text{Fronteira de } R''}{\oint} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy \end{aligned}$$

Entretanto, as duas integrais de linha são tomadas em sentidos opostos ao longo dos cortes e, portanto, cancelam-se, deixando somente as contribuições ao longo de $C_1$ e $C_2$. Assim,

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA = \oint_{C_1} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy + \oint_{C_2} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy \tag{7}$$

que é uma extensão do Teorema de Green para uma região multiplamente conexa com um buraco. Observe que a integral ao longo da fronteira externa é tomada no sentido anti-horário, e a integral em torno do buraco é tomada no sentido horário. Mais geralmente, se $R$ for uma região multiplamente conexa com $n$ buracos, então o análogo de (7) envolve a soma de $n + 1$ integrais, uma tomada no sentido anti-horário em torno da fronteira externa e as demais tomadas no sentido horário em torno dos buracos.

**► Exemplo 4** Calcule a integral

$$\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

se $C$ for uma curva simples fechada lisa por partes orientada no sentido anti-horário, de modo que (a) $C$ não envolva a origem e (b) $C$ envolva a origem.

***Solução (a)*** Sejam

$$f(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \tag{8}$$

de modo que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

se $x$ e $y$ não forem nulas. Assim, se $C$ não envolver a origem, temos

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

na região simplesmente conexa envolvida por $C$ e, portanto, a integral é nula pelo Teorema de Green.

***Solução (b)*** Ao contrário da situação na parte (a), não podemos aplicar o Teorema de Green diretamente, porque as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ em (8) são descontínuas na origem. Nossos problemas complicam-se mais ainda pelo fato de que não temos uma curva específica $C$ que possamos parametrizar para calcular a integral. Nossa estratégia para contornar esses problemas será substituir $C$ por uma curva específica que produza o mesmo valor para a integral e, então, usar essa curva para o cálculo. Para obter tal curva, vamos aplicar o Teorema de Green para regiões multiplamente conexas a uma região que não contenha a origem. Com essa finalidade, construímos um círculo $C_a$ com orientação no sentido horário, centrado na origem e com raio $a$ suficientemente pequeno para que fique dentro da região envolvida por $C$ (Figura 15.4.6). Isso cria uma região multiplamente conexa $R$, cujas curvas de fronteira $C$ e $C_a$ têm as orientações requeridas pela Fórmula (7) e de modo que no interior de $R$ as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ em (8) satisfazem as hipóteses do Teorema de Green (a origem está fora de $R$). Assim, por (7) e (9) segue que

$$\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} + \oint_{C_a} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \iint_R 0\,dA = 0$$

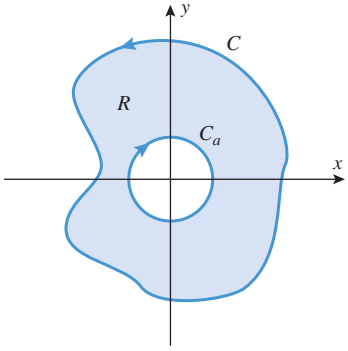



**Figura 15.4.6**

Dessa equação, obtemos

$$\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = -\oint_{C_a} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

que pode ser reescrita como

$$\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \oint_{-C_a} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

Invertendo a orientação de $C_a$ troca o sinal da integral.

No entanto, $C_a$ tem orientação no sentido horário, portanto $-C_a$ tem orientação no sentido anti-horário. Mostramos, assim, que a integral original pode ser calculada integrando no sentido anti-horário em torno de um círculo de raio $a$, centrado na origem e que fica no interior da região envolvida por $C$. Tal círculo pode ser expresso parametricamente como $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$ $(0 \le t \le 2\pi)$; portanto,

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t)\,dt + (a\cos t)(a\cos t)\,dt}{(a\cos t)^2 + (a\,\text{sen}\,t)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.4 (Ver página 1129 para respostas.)

**1.** Se $C$ for o quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$ orientado no sentido anti-horário, então

$$\int_C -y\,dx + x\,dy = _____$$

**2.** Se $C$ for o triângulo de vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 1) orientado no sentido anti-horário, então

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2 + x)\,dy = _____$$

**3.** Se $C$ for o círculo unitário centrado na origem e orientado no sentido anti-horário, então

$$\int_C (y^3 - y - x)\,dx + (x^3 + x + y)\,dy = _____$$

**4.** Qual região $R$ e qual escolha de funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ nos permitem usar a Fórmula (1) do Teorema 15.4.1 para afirmar que

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2x + 2y)\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2} (\text{sen}^3\,t + \cos^3 t)\,dt?$$

## EXERCÍCIOS 15.4 C CAS

**1-2** Calcule a integral de linha usando o Teorema de Green e verifique que a resposta calculando-a diretamente. ■

**1.** $\oint_C y^2\,dx + x^2\,dy$, onde $C$ é o quadrado de vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) e (0, 1) orientado no sentido anti-horário.

**2.** $\oint_C y\,dx + x\,dy$, onde $C$ é o círculo unitário orientado no sentido anti-horário.

**3-13** Use o Teorema de Green para calcular a integral. Em cada exercício, suponha que a curva $C$ seja orientada no sentido anti-horário. ■

**3.** $\oint_C 3xy\,dx + 2xy\,dy$, onde $C$ é o retângulo limitado por $x = -2$, $x = 4$, $y = 1$ e $y = 2$.

**4.** $\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + x\,dy$, onde $C$ é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

**5.** $\oint_C x\cos y\,dx - y\,\text{sen}\,x\,dy$, onde $C$ é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$ e $(0, \pi/2)$.

**6.** $\oint_C y\,\text{tg}^2 x\,dx + \text{tg}\,x\,dy$, onde $C$ é o círculo $x^2 + (y + 1)^2 = 1$.

**7.** $\oint_C (x^2 - y)\,dx + x\,dy$, onde $C$ é o círculo $x^2 + y^2 = 4$.

**8.** $\oint_C (e^x + y^2)\,dx + (e^y + x^2)\,dy$, onde $C$ é a fronteira da região compreendida por $y = x^2$ e $y = x$.

**9.** $\oint_C \ln(1 + y)\,dx - \dfrac{xy}{1 + y}\,dy$, onde $C$ é o triângulo de vértices (0, 0), (2, 0) e (0, 4).

**10.** $\oint_C x^2 y\,dx - y^2 x\,dy$, onde $C$ é a fronteira da região no primeiro quadrante compreendida pelos eixos coordenados e o círculo $x^2 + y^2 = 16$.

**11.** $\oint_C \text{arc tg}\,y\,dx - \dfrac{y^2 x}{1 + y^2}\,dy$, onde $C$ é o quadrado de vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) e (0, 1).

**12.** $\oint_C \cos x \operatorname{sen} y\,dx + \operatorname{sen} x \cos y\,dy$, onde $C$ é o triângulo de vértices (0, 0), (3, 3) e (0, 3).

**13.** $\oint_C x^2 y\,dx + (y + xy^2)\,dy$, onde $C$ é a fronteira da região compreendida por $y = x^2$ e $x = y^2$.

**14.** Seja $C$ a fronteira da região delimitada por $y = x^2$ e $y = 2x$. Supondo que $C$ esteja orientada no sentido anti-horário, calcule as integrais seguintes usando o Teorema de Green:

(a) $\oint_C (6xy - y^2)\,dx$ (b) $\oint_C (6xy - y^2)\,dy$.

**15-18 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. (Nos Exercícios 16 a 18, suponha que $C$ seja uma curva fechada simples lisa orientada no sentido anti-horário.) ■

**15.** O Teorema de Green nos permite substituir qualquer integral de linha por uma integral dupla.

**16.** Se

$$\int_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = 0$$

então $\partial g/\partial x = \partial f/\partial y$ em todos os pontos da região delimitada por $C$.

**17.** Sempre vale que

$$\int_C x\,dy > 0$$

**18.** Sempre vale que

$$\int_C e^{x^2}\,dx + \operatorname{sen} y^3\,dy = 0$$

C **19.** Use um CAS para verificar o Teorema de Green calculando ambas as integrais da equação

$$\oint_C e^y\,dx + ye^x\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(ye^x) - \frac{\partial}{\partial y}(e^y)\right] dA$$

onde

(a) $C$ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$;

(b) $C$ é a fronteira da região compreendida por $y = x^2$ e $x = y^2$.

**20.** No Exemplo 3, usamos o Teorema de Green para obter a área de uma elipse. Calcule essa área usando a primeira e depois a segunda fórmula de (6).

**21.** Use uma integral de linha para encontrar a área da região envolvida pelo astroide

$$x = a\cos^3\phi, \quad y = a\operatorname{sen}^3\phi \quad (0 \le \phi \le 2\pi)$$

**22.** Use uma integral de linha para encontrar a área do triângulo de vértices (0, 0), $(a, 0)$ e $(0, b)$, onde $a > 0$ e $b > 0$.

**23.** Use a fórmula

$$A = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy$$

para encontrar a área da região varrida pela reta da origem até a elipse $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$ se $t$ variar de $t = 0$ a $t = t_0$ $(0 \le t_0 \le 2\pi)$.

**24.** Use a fórmula

$$A = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy$$

para encontrar a área da região varrida pela reta da origem até a hipérbole $x = a\cosh t$, $y = b\operatorname{senh} t$ se $t$ variar de $t = 0$ a $t = t_0$ $(t_0 \ge 0)$.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**25.** Suponha que $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ seja um campo vetorial cujas funções componentes $f$ e $g$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Seja $C$ uma curva lisa por partes, simples e fechada, orientada no sentido anti-horário, que é a fronteira de uma região $R$ contida no domínio de $\mathbf{F}$. Podemos interpretar $\mathbf{F}$ como um campo vetorial no espaço tridimensional escrevendo-o como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Com essa convenção, explique por que

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dA$$

**26.** Suponha que $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ seja um campo vetorial no plano $xy$ e que $f$ e $g$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas, com $f_y = g_x$ em toda parte. Use o Teorema de Green para explicar por que

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

onde $C_1$ e $C_2$ são as curvas orientadas na figura a seguir. (Compare esse resultado com os Teoremas 15.3.2 e 15.3.3.)

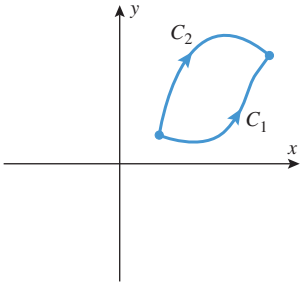



**Figura Ex-26**

**27.** Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ sejam funções contínuas com $g(x) \le f(x)$. Seja $R$ a região delimitada pelos gráficos de $f$ e de $g$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Seja $C$ a fronteira de $R$ orientada no sentido anti-horário. Qual é a fórmula conhecida que resulta da aplicação do Teorema de Green à integral $\int_C (-y)\,dx$?

**28.** Na figura a seguir, $C$ é uma curva lisa orientada de $P(x_0, y_0)$ a $Q(x_1, y_1)$, contida dentro do retângulo de vértices na origem e $Q$ e fora do retângulo de vértices na origem e $P$.

(a) Qual região na figura tem área $\int_C x\,dy$?

(b) Qual região na figura tem área $\int_C y\,dx$?

(c) Expresse $\int_C x\,dy + \int_C y\,dx$ em termos das coordenadas de $P$ e $Q$.

(d) Interprete o resultado de (c) em termos do Teorema Fundamental de Integrais de Linha.
(e) Interprete o resultado de (c) em termos de integração por partes.

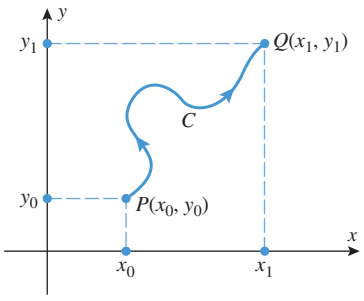



**Figura Ex-28**

**29-30** Use o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}$ em uma partícula que se move ao longo do caminho especificado. ■

**29.** $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right)\mathbf{j}$; a partícula começa em (5, 0), percorre o semicírculo superior $x^2 + y^2 = 25$ e retorna ao seu ponto de partida ao longo do eixo $x$.

**30.** $\mathbf{F}(x, y) = \sqrt{y}\,\mathbf{i} + \sqrt{x}\,\mathbf{j}$; a partícula percorre uma vez, no sentido anti-horário, a curva fechada dada pelas equações $y = 0$, $x = 2$ e $y = x^3/4$.

**31.** Calcule $\oint_C y\,dx - x\,dy$, onde $C$ é a cardioide

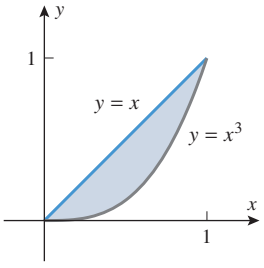
$$r = a\,(1 + \cos\theta) \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

**32.** Seja $R$ uma região do plano com área $A$, cuja fronteira é uma curva fechada simples lisa por partes $C$. Use o Teorema de Green para provar que o centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de $R$ é dado por

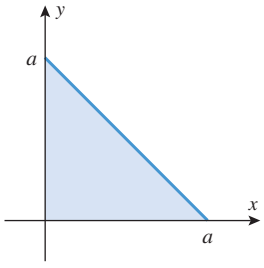
$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx$$

**33-36** Use o resultado do Exercício 32 para encontrar o centroide da região. ■

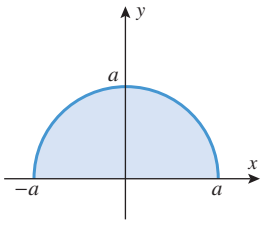
**33.**



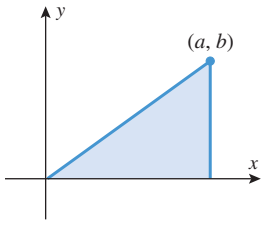

**34.**




**35.**




**36.**




**37.** Encontre uma curva fechada simples $C$ com orientação anti-horário que maximize o valor de

$$\oint_C \tfrac{1}{3}y^3\,dx + \left(x - \tfrac{1}{3}x^3\right)dy$$

e explique seu raciocínio.

**38.** (a) Seja $C$ o segmento de reta do ponto $(a, b)$ até o ponto $(c, d)$. Mostre que

$$\int_C -y\,dx + x\,dy = ad - bc$$

(b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que a área $A$ de um triângulo de vértices $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ e $(x_3, y_3)$, percorrido no sentido anti-horário, é

$$A = \tfrac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)]$$

(c) Determine uma fórmula para a área de um polígono de vértices sucessivos $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$,..., $(x_n, y_n)$, percorridos no sentido anti-horário.
(d) Use o resultado da parte (c) para calcular a área do quadrilátero de vértices (0, 0), (3, 4), (−2, 2), (−1, 0).

**39-40** Calcule a integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, onde $C$ é a fronteira da região $R$ e $C$ é orientada de modo que a região fique à esquerda quando a fronteira é percorrida no sentido de sua orientação. ■

**39.** $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y)\mathbf{i} + (4x - \cos y)\mathbf{j}$; $C$ é a fronteira da região $R$ que está no interior do quadrado de vértices (0, 0), (5, 0), (5, 5), (0, 5), mas está fora do retângulo de vértices (1, 1), (3, 1), (3, 2), (1, 2).

**40.** $\mathbf{F}(x, y) = (e^{-x} + 3y)\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$; $C$ é a fronteira da região $R$ entre os círculos $x^2 + y^2 = 16$ e $x^2 - 2x + y^2 = 3$.

**41.** **Texto** Discuta o papel do Teorema Fundamental do Cálculo na prova do Teorema de Green.

**42.** **Texto** Use a Internet ou outras fontes para obter informações sobre planímetros e, então, escreva um parágrafo que descreva a relação entre esses aparelhos e o Teorema de Green.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.4

**1.** 8 **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** $2\pi$ **4.** $R$ é a região $x^2 + y^2 \le 1$ $(0 \le x, 0 \le y)$ e $f(x, y) = -y^2$, $g(x, y) = x^2$.

# 15.5 INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

*Em seções anteriores, consideramos quatro tipos de integrais – integrais em intervalos, integrais duplas em regiões bidimensionais, integrais triplas em sólidos tridimensionais e integrais de linha ao longo de curvas nos espaços bi e tridimensionais. Nesta seção, discutiremos integrais em superfícies no espaço tridimensional. Tais integrais ocorrem em problemas envolvendo fluxo fluido e de calor, eletricidade, magnetismo, massa e centro de gravidade.*

A espessura de uma lâmina curva é desprezível.

**Figura 15.5.1**

## DEFINIÇÃO DE UMA INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

Nesta seção, definiremos o que significa integrar uma função $f(x, y, z)$ em uma superfície paramétrica lisa $\sigma$. Para motivar a definição, consideraremos o problema de encontrar a massa de uma lâmina curva cuja função densidade (massa por unidade de área) seja conhecida. Lembre que, na Seção 6.7, no Volume 1, definimos uma *lâmina* como um objeto achatado idealizado que é suficientemente fino para poder ser considerado como uma região plana bidimensional. Analogamente, uma ***lâmina curva*** é um objeto idealizado que é suficientemente fino para poder ser considerado como uma superfície no espaço tridimensional. Uma lâmina curva pode parecer uma chapa encurvada, como na Figura 15.5.1, ou englobar uma região tridimensional, como a casca de um ovo. Modelaremos a lâmina curva por uma superfície paramétrica lisa $\sigma$. Dado um ponto $(x, y, z)$ de $\sigma$, vamos denotar por $f(x, y, z)$ o valor correspondente da função densidade. Para calcular a massa da lâmina, procedemos como segue:

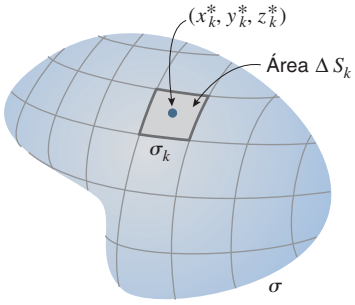



**Figura 15.5.2**

- Como mostra a Figura 15.5.2, dividimos $\sigma$ em $n$ pequenas porções $\sigma_1$, $\sigma_2$,..., $\sigma_n$ com áreas $\Delta S_1$, $\Delta S_2$, . . . , $\Delta S_n$, respectivamente. Seja $(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ um ponto amostral da $k$-ésima porção e $\Delta M_k$ a massa dessa porção.
- Se as dimensões de $\sigma_k$ forem muito pequenas, então o valor de $f$ não irá variar muito ao longo da $k$-ésima porção, e podemos aproximar $f$ nessa porção pelo valor $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$. Segue que a massa da $k$-ésima porção pode ser aproximada por

$$\Delta M_k \approx f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

- A massa $M$ de toda a lâmina pode, então, ser aproximada por

$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k \tag{1}$$

- Utilizaremos a notação $n \to \infty$ para indicar o processo de aumentar $n$ de tal forma que a dimensão máxima de cada porção tenda a 0. É plausível que o erro em (1) vá tender a 0 quando $n \to \infty$ e que o valor exato de $M$ seja dado por

$$M = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k \tag{2}$$

O limite em (2) é muito parecido com o limite usado para definir massa de um arame fino [Fórmula (2) da Seção 15.2]. Por analogia com a Definição 15.2.1, apresentamos a definição seguinte.

**15.5.1 DEFINIÇÃO** Se $\sigma$ for uma superfície paramétrica lisa, então a ***integral de superfície*** de $f(x, y, z)$ em $\sigma$ é

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k \tag{3}$$

desde que esse limite exista e não dependa da maneira como sejam feitas as subdivisões de $\sigma$ e de como os pontos amostrais $(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ sejam escolhidos.

Pode ser mostrado que se $f$ for contínua, então existe a integral de $f$ em $\sigma$.

Pela Definição 15.5.1 e por (2) vemos que se $\sigma$ modelar uma lâmina e se $f(x, y, z)$ for a função densidade da lâmina, então a massa $M$ da lâmina é dada por

$$M = \iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS \tag{4}$$

Ou seja, para obter a massa de uma lâmina, integramos a função densidade na superfície lisa que modela a lâmina.

Note que se $\sigma$ for uma superfície lisa de área de superfície $S$ e se $f$ for identicamente 1, então segue imediatamente da Definição 15.5.1 que

$$\iint_{\sigma} dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \lim_{n\to\infty} S = S \tag{5}$$

## CÁLCULO DE INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

Há vários procedimentos para calcular integrais de superfície que dependem de como a superfície $\sigma$ é representada. O seguinte teorema oferece um método de cálculo da integral de superfície quando $\sigma$ é representada parametricamente.

Explique como usar a Fórmula (6) para confirmar a Fórmula (5).

**15.5.2 TEOREMA** *Seja $\sigma$ uma superfície paramétrica lisa de equação vetorial*

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

*onde $(u, v)$ varia em uma região $R$ do plano $uv$. Se $f(x, y, z)$ for contínua em $\sigma$, então*

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \iint_{R} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA \tag{6}$$

Para motivar esse resultado, suponha que o domínio dos parâmetros $R$ seja subdividido como na Figura 14.4.14 e suponha que o ponto $(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ em (3) corresponda aos valores dos parâmetros $u_k^*$ e $v_k^*$. Se usarmos a Fórmula (11) da Seção 14.4 para aproximar $\Delta S_k$, e supondo que os erros de aproximação tendam para zero quando $n \to +\infty$, então segue de (3) que

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x(u_k^*, v_k^*), y(u_k^*, v_k^*), z(u_k^*, v_k^*)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta A_k$$

que sugere a Fórmula (6).

Embora o Teorema 15.5.2 tenha sido enunciado para superfícies paramétricas *lisas*, a Fórmula (6) permanece válida mesmo se permitirmos que $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v$ seja igual a $\mathbf{0}$ na fronteira de $R$.

**▶ Exemplo 1** Calcule a integral de superfície $\iint_\sigma x^2\,dS$ na esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

***Solução*** Como no Exemplo 11 da Seção 14.4 (com $a = 1$), a esfera é o gráfico da função vetorial

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} \quad (0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi) \tag{7}$$

e

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| = \operatorname{sen}\phi$$

Explique por que a função $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ dada em (7) deixa de ser lisa em seu domínio.

Pelo componente **i** de **r**, o integrando da integral de superfície pode ser dado em termos de $\phi$ e $\theta$ como $x^2 = \operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta$. Assim, segue de (6), com $\phi$ e $\theta$ no lugar de $u$ e $v$ e $R$ como a região retangular do plano $\phi\theta$ determinada pelas desigualdades de (7), que

$$\begin{aligned}
\iint_\sigma x^2\,dS &= \iint_R (\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\cos^2\theta\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\,d\phi\right]\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}\cos^3\phi - \cos\phi\right]_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta \qquad \text{Fórmula (11), Seção 7.3, no Volume 1} \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3} \qquad \text{Fórmula (8), Seção 7.3, no Volume 1}
\end{aligned}$$

◀

## ■ INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE EM $z = g(x, y)$, $y = g(x, z)$ E $x = g(y, z)$

No caso em que $\sigma$ for da forma $z = g(x, y)$, podemos tomar $x = u$ e $y = v$ como parâmetros e expressar a equação da superfície como

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + g(u, v)\mathbf{k}$$

caso em que obtemos

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

(verifique). Assim, segue de (6) que

$$\iint_\sigma f(x, y, z)\,dS = \iint_R f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA$$

Observe que, nessa fórmula, a região $R$ fica no plano $xy$ porque os parâmetros são $x$ e $y$. Geometricamente, essa região é a projeção de $\sigma$ no plano $xy$. O seguinte teorema resume esse resultado e dá fórmulas análogas para as integrais de superfície em superfícies da forma $y = g(x, z)$ e $x = g(y, z)$.

**15.5.3 TEOREMA**

(*a*) *Sejam $\sigma$ uma superfície com equação $z = g(x, y)$ e $R$ sua projeção no plano $xy$. Se $g$ tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $R$ e $f(x, y, z)$ for contínua em $\sigma$, então*

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \iint_{R} f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA \tag{8}$$

(*b*) *Sejam $\sigma$ uma superfície com equação $y = g(x, z)$ e $R$ sua projeção no plano $xz$. Se $g$ tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $R$ e $f(x, y, z)$ for contínua em $\sigma$, então*

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \iint_{R} f(x, g(x, z), z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA \tag{9}$$

(*c*) *Sejam $\sigma$ uma superfície com equação $x = g(y, z)$ e $R$ sua projeção no plano $yz$. Se $g$ tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $R$ e $f(x, y, z)$ for contínua em $\sigma$, então*

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \iint_{R} f(g(y, z), y, z)\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA \tag{10}$$

As Fórmulas (9) e (10) podem ser obtidas a partir da Fórmula (8). Explique como.

► **Exemplo 2** Calcule a integral de superfície

$$\iint_{\sigma} xz\, dS$$

onde $\sigma$ é a parte do plano $x + y + z = 1$ que fica no primeiro octante.

***Solução*** A equação do plano pode ser escrita como

$$z = 1 - x - y$$

Consequentemente, podemos aplicar a Fórmula (8) com $z = g(x, y) = 1 - x - y$ e $f(x, y, z) = xz$. Temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

portanto, (8) é dado por

$$\iint_{\sigma} xz\, dS = \iint_{R} x(1 - x - y)\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1}\, dA \tag{11}$$

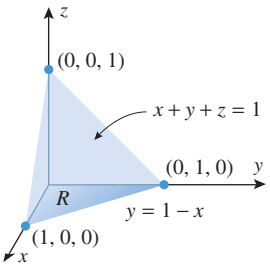



**Figura 15.5.3**

onde $R$ é a projeção de $\sigma$ no plano $xy$ (Figura 15.5.3). Reescrevendo a integral dupla em (11) como uma integral iterada, obtemos

$$\begin{aligned}\iint_\sigma xz\,dS &= \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x}(x - x^2 - xy)\,dy\,dx \\ &= \sqrt{3}\int_0^1\left[xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{1-x}dx \\ &= \sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2}\right)dx \\ &= \sqrt{3}\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{24}\end{aligned}$$

◀

**▶ Exemplo 3** Calcule a integral de superfície

$$\iint_\sigma y^2z^2\,dS$$

onde $\sigma$ é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ compreendida pelos planos $z = 1$ e $z = 2$ (Figura 15.5.4).

***Solução*** Vamos aplicar a Fórmula (8) com

$$z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad f(x, y, z) = y^2z^2$$

Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

de modo que

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

(verifique), e portanto (8) dá

$$\iint_\sigma y^2z^2\,dS = \iint_R y^2\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2\sqrt{2}\,dA = \sqrt{2}\iint_R y^2(x^2 + y^2)\,dA$$

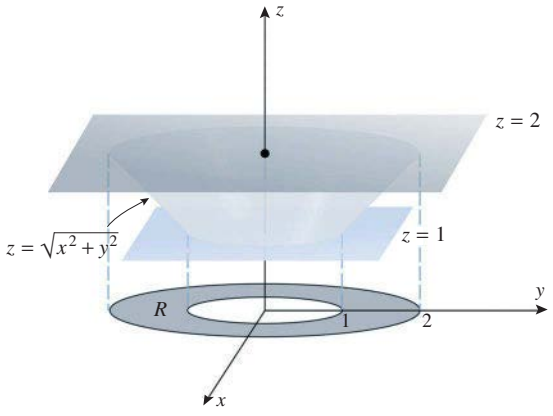



**Figura 15.5.4**

onde $R$ é o anel compreendido por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ (Figura 15.5.4). Usando coordenadas polares para calcular essa integral dupla no anel $R$, obtemos

Calcule a integral no Exemplo 3 com a ajuda da Fórmula (6) e a parametrização

$\mathbf{r} = \langle r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, r\rangle$
$(1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi)$

$$\begin{aligned}\iint_\sigma y^2z^2\,dS &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 (r\,\text{sen}\,\theta)^2(r^2)r\,dr\,d\theta\\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^5\,\text{sen}^2\,\theta\,dr\,d\theta\\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^6}{6}\,\text{sen}^2\,\theta\right]_{r=1}^{2} d\theta = \frac{21}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\text{sen}^2\,\theta\,d\theta\\ &= \frac{21}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{21\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Fórmula (7) da Seção 7.3, no Volume 1 ◀

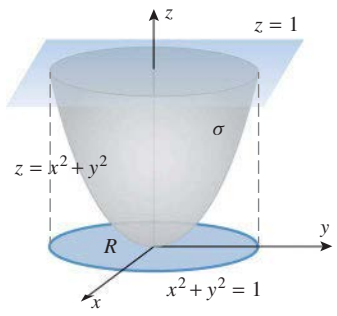



**Figura 15.5.5**

► **Exemplo 4** Suponha que uma lâmina curva $\sigma$ com densidade constante $\delta(x, y, z) = \delta_0$ seja a porção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$ (Figura 15.5.5). Determine a massa da lâmina.

***Solução*** Como $z = g(x, y) = x^2 + y^2$, segue que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Portanto

$$M = \iint_\sigma \delta_0\,dS = \iint_R \delta_0\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\,dA = \delta_0\iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dA \quad (12)$$

onde $R$ é a região circular envolvida por $x^2 + y^2 = 1$. Para calcular (12), usamos coordenadas polares:

$$\begin{aligned}M &= \delta_0\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\,r\,dr\,d\theta = \frac{\delta_0}{12}\int_0^{2\pi}(4r^2 + 1)^{3/2}\Big]_{r=0}^{1} d\theta\\ &= \frac{\delta_0}{12}\int_0^{2\pi}(5^{3/2} - 1)\,d\theta = \frac{\pi\delta_0}{6}(5\sqrt{5} - 1)\end{aligned}$$ ◀

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.5 (Ver página 1138 para respostas.)

**1.** Considere a integral de superfície $\iint_\sigma f(x, y, z)\,dS$.
(a) Se $\sigma$ for uma superfície paramétrica de equação vetorial

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

então calculamos a integral trocando $dS$ por _____.
(b) se $\sigma$ for o gráfico de uma função $z = g(x, y)$ com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então calculamos a integral trocando $dS$ por _____.

**2.** Se $\sigma$ for a região triangular de vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1), então

$$\iint_\sigma (x + y + z)\,dS = _____$$

**3.** Se $\sigma$ for a esfera de raio 2 centrada na origem, então

$$\iint_\sigma (x^2 + y^2 + z^2)\,dS = _____$$

**4.** Se $f(x, y, z)$ for a função densidade de massa de uma lâmina curva $\sigma$, então a massa de $\sigma$ é dada pela integral _____.

## EXERCÍCIOS 15.5 C CAS

**1-8** Calcule a integral de superfície

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS$$ ■

**1.** $f(x, y, z) = z^2$; $\sigma$ é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

**2.** $f(x, y, z) = xy$; $\sigma$ é a porção do plano $x + y + z = 1$ que fica no primeiro octante.

**3.** $f(x, y, z) = x^2y$; $\sigma$ é a porção do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ entre os planos $y = 0$, $y = 1$ e acima do plano $xy$.

**4.** $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$; $\sigma$ é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano $z = 1$.

**5.** $f(x, y, z) = x - y - z$; $\sigma$ é a porção do plano $x + y = 1$ no primeiro octante entre $z = 0$ e $z = 1$.

**6.** $f(x, y, z) = x + y$; $\sigma$ é a porção do plano $z = 6 - 2x - 3y$ no primeiro octante.

**7.** $f(x, y, z) = x + y + z$; $\sigma$ é a superfície do cubo definido pelas desigualdades $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. [*Sugestão*: Integre em cada face separadamente.]

**8.** $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; $\sigma$ é a superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**9-12 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**9.** Se $f(x, y, z) \ge 0$ em $\sigma$, então

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS \ge 0$$

**10.** Se $\sigma$ tiver área de superfície $S$ e se

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = S$$

então $f(x, y, z)$ será identicamente igual a 1 em $\sigma$.

**11.** Se $\sigma$ modelar uma lâmina curva e se $f(x, y, z)$ for a função densidade da lâmina, então

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS$$

representará a densidade total da lâmina.

**12.** Se $\sigma$ for a porção do plano $z = c$ acima de uma região $R$ do plano $xy$, então

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS = \iint_{R} f(x, y, c)\, dA$$

com qualquer função $f$ contínua em $\sigma$.

**13-14** O cálculo de uma integral de superfície resulta, às vezes, em uma integral imprópria. Quando isso ocorre, podemos tentar determinar o valor da integral usando um limite apropriado ou tentar outro método. Nestes exercícios, exploramos ambas as abordagens. ■

**13.** Considere a integral de $f(x, y, z) = z + 1$ no hemisfério superior $\sigma$: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $(0 \le x^2 + y^2 \le 1)$.

(a) Explique por que o cálculo dessa integral de superfície resulta em uma integral imprópria se for utilizado (8).

(b) Use (8) para calcular a integral de $f$ na superfície $\sigma_r : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $(0 \le x^2 + y^2 \le r^2 < 1)$. Tome o limite desse resultado quando $r \to 1^-$ para determinar a integral de $f$ em $\sigma$.

(c) Parametrize $\sigma$ usando coordenadas esféricas e calcule a integral de $f$ em $\sigma$ usando (6). Verifique que sua resposta confere com o resultado de (b).

**14.** Considere a integral de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ no cone $\sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \le z \le 1)$.

(a) Explique por que o cálculo dessa integral de superfície resulta em uma integral imprópria se for utilizado (8).

(b) Use (8) para calcular a integral de $f$ na superfície $\sigma_r : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 < r^2 \le x^2 + y^2 \le 1)$. Tome o limite desse resultado quando $r \to 1^+$ para determinar a integral de $f$ em $\sigma$.

(c) Parametrize $\sigma$ usando coordenadas esféricas e calcule a integral de $f$ em $\sigma$ usando (6). Verifique que sua resposta confere com o res ultado de (b).

### ENFOCANDO CONCEITOS

**15-18** Para calcular uma integral de superfície sem utilizar uma parametrização da superfície podemos, em alguns casos, usar a Definição 15.5.1, junto com algumas considerações de simetria. Nestes exercícios, $\sigma$ denota a esfera unitária centrada na origem. ■

**15.** (a) Explique por que é possível subdividir $\sigma$ em porções e escolher um ponto amostral $(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ tal que (i) a área de cada porção é tão pequena quanto se queira e (ii) para cada ponto amostral $(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$, existe um ponto amostral $(x_j^*, y_j^*, z_j^*)$ tal que

$$x_k = -x_j, \quad y_k = y_j, \quad z_k = z_j$$

e com $\Delta S_k = \Delta S_j$.

(b) Use a Definição 15.5.1, o resultado em (a) e o fato de que a integral de superfície existe para funções contínuas para provar que $\iint_{\sigma} x^n\, dS = 0$ vale com qualquer inteiro $n$ positivo ímpar.

**16.** Use o argumento no Exercício 15 para provar que se $f(x)$ for uma função contínua e ímpar de $x$ e se $g(y, z)$ for uma função contínua, então

$$\iint_{\sigma} f(x)g(y, z)\, dS = 0$$

**17.** (a) Explique por que

$$\iint_{\sigma} x^2\, dS = \iint_{\sigma} y^2\, dS = \iint_{\sigma} z^2\, dS$$

(b) Conclua de (a) que

$$\iint_\sigma x^2\,dS = \frac{1}{3}\left[\iint_\sigma x^2\,dS + \iint_\sigma y^2\,dS + \iint_\sigma y^2\,dS\right]$$

(c) Use (b) para calcular

$$\iint_\sigma x^2\,dS$$

sem efetuar uma integração.

**18.** Use os resultados dos Exercícios 16 e 17 para calcular

$$\iint_\sigma (x-y)^2\,dS$$

sem efetuar uma integração.

**19-20** Monte, mas não calcule, uma integral iterada igual à integral de superfície dada projetando $\sigma$ no (a) plano $xy$, (b) plano $yz$ (c) e plano $xz$. ■

**19.** $\iint_\sigma xyz\,dS$, onde $\sigma$ é a porção do plano $2x + 3y + 4z = 12$ no primeiro octante.

**20.** $\iint_\sigma xz\,dS$, onde $\sigma$ é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante.

C **21.** Use um CAS para confirmar que as três integrais obtidas no Exercício 19 são iguais e calcule o valor exato da integral de superfície.

C **22.** Tente confirmar com um CAS que as três integrais obtidas no Exercício 20 são iguais. Se não conseguir, qual é a dificuldade?

**23-24** Monte, mas não calcule, duas integrais iteradas diferentes iguais à integral dada. ■

**23.** $\iint_\sigma xyz\,dS$, onde $\sigma$ é a porção da superfície $y^2 = x$ entre os planos $z = 0$, $z = 4$, $y = 1$ e $y = 2$.

**24.** $\iint_\sigma x^2 y\,dS$, onde $\sigma$ é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ no primeiro octante entre os planos $x = 0$, $x = 9$, $z = y$ e $z = 2y$.

C **25.** Use um CAS para confirmar que as duas integrais obtidas no Exercício 23 são iguais e calcule o valor exato da integral de superfície.

C **26.** Use um CAS para determinar o valor da integral de superfície

$$\iint_\sigma x^2 yz\,dS$$

na porção $\sigma$ do paraboloide elíptico $z = 5 - 3x^2 - 2y^2$ que fica acima do plano $xy$.

**27-28** Encontre a massa da lâmina com densidade constante $\delta_0$. ■

**27.** A lâmina que é a porção do cilindro circular $x^2 + z^2 = 4$ que fica diretamente acima do retângulo $R = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 4\}$ no plano $xy$.

**28.** A lâmina que é a porção do paraboloide $2z = x^2 + y^2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 8$.

**29.** Encontre a massa da lâmina que é a porção da superfície $y^2 = 4 - z$ entre os planos $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ e $y = 3$ se a densidade for $\delta(x, y, z) = y$.

**30.** Encontre a massa da lâmina que é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 4$ se a densidade for $\delta(x, y, z) = x^2 z$.

**31.** Se uma lâmina curva tem densidade constante $\delta_0$, que relação deve existir entre sua massa e a área de superfície? Explique seu raciocínio.

**32.** Mostre que se a densidade da lâmina $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, em cada ponto, for igual à distância entre esse ponto e o plano $xy$, a massa da lâmina é $2\pi a^3$.

**33-34** O centroide de uma superfície $\sigma$ é definido por

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\iint_\sigma x\,dS}{\text{área de } \sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\displaystyle\iint_\sigma y\,dS}{\text{área de } \sigma}, \quad \bar{z} = \frac{\displaystyle\iint_\sigma z\,dS}{\text{área de } \sigma}$$

Encontre o centroide da superfície nestes exercícios. ■

**33.** A porção do paraboloide $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ abaixo do plano $z = 4$.

**34.** A porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ acima do plano $z = 1$.

**35-38** Calcule a integral $\iint_\sigma f(x, y, z)\,dS$ na superfície $\sigma$ representada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$. ■

**35.** $f(x, y, z) = xyz$; $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + 3u\mathbf{k}$
$(1 \le u \le 2, 0 \le v \le \pi/2)$

**36.** $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + z^2}{y}$; $\mathbf{r}(u, v) = 2\cos v\,\mathbf{i} + u\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,v\,\mathbf{k}$
$(1 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\pi)$

**37.** $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$;
$\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + u^2\mathbf{k} \quad (0 \le u \le \text{sen}\,v, 0 \le v \le \pi)$

**38.** $f(x, y, z) = e^{-z}$;
$\mathbf{r}(u, v) = 2\,\text{sen}\,u\cos v\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + 2\cos u\mathbf{k}$
$(0 \le u \le \pi/2, 0 \le v \le 2\pi)$

C **39.** Use um CAS para aproximar a massa da lâmina curva $z = e^{-x^2-y^2}$ que fica acima da região no plano $xy$ envolvida por $x^2 + y^2 = 9$, sabendo-se que a densidade é $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

C **40.** A superfície $\sigma$ mostrada na figura a seguir, chamada ***faixa de Möbius***, é representada pelas equações paramétricas

$$x = (5 + u\cos(v/2))\cos v$$
$$y = (5 + u\cos(v/2))\operatorname{sen} v$$
$$z = u\operatorname{sen}(v/2)$$

onde $-1 \le u \le 1$ e $0 \le v \le 2\pi$

(a) Use um CAS para gerar uma cópia razoável dessa superfície.

(b) Use um CAS para aproximar a localização do centroide de $\sigma$ (veja a definição que precede o Exercício 33).

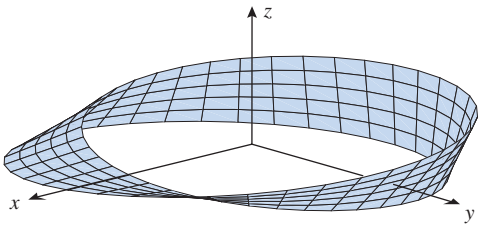



**Figura Ex-40**

**41.** Texto Discuta as semelhanças e as diferenças entre as definições de uma integral de superfície e de uma integral dupla.

**42.** Texto Suponha que uma superfície $\sigma$ no espaço tridimensional e uma função $f(x, y, z)$ sejam descritas geometricamente. Por exemplo, $\sigma$ poderia ser uma esfera de raio 1 centrada na origem e $f(x, y, z)$ poderia ser a distância do ponto $(x, y, z)$ ao eixo $z$. Como o leitor descreveria para um colega um procedimento para calcular integral de superfície de $f$ em $\sigma$?

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.5

**1.** (a) $\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA$ (b) $\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$ **2.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **3.** $64\pi$ **4.** $\displaystyle\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS$

# 15.6 APLICAÇÕES DE INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE; FLUXO

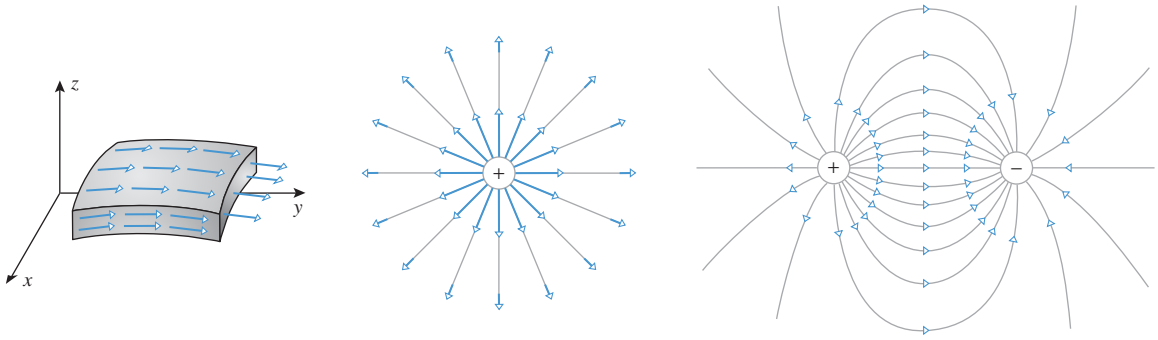
*Nesta seção, discutiremos aplicações das integrais de superfície a campos vetoriais associados com fluxos fluidos e forças eletrostáticas. Porém, as ideias que desenvolveremos serão de natureza geral e também aplicáveis a outros tipos de campos vetoriais.*

### CAMPOS DE FLUIDOS

Trataremos, nesta seção, de campos vetoriais no espaço tridimensional que envolvam algum tipo de "fluxo" – o fluxo de um fluido ou o fluxo de partículas carregadas em um campo eletrostático, por exemplo. No caso de fluxo fluido, o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ representa a velocidade de uma partícula fluida no ponto $(x, y, z)$, e as partículas do fluido fluem ao longo de "correntes" tangenciais aos vetores velocidade (Figura 15.6.1*a*). No caso de um campo eletrostático, $\mathbf{F}(x, y, z)$ é a força que o campo exerce em uma pequena unidade de carga positiva no ponto $(x, y, z)$, e tais cargas aceleram ao longo de "linhas elétricas" tangenciais aos vetores da força (Figuras 15.6.1*b* e 15.6.1*c*).

### SUPERFÍCIES ORIENTADAS

Nosso principal objetivo, nesta seção, é estudar os fluxos de campos vetoriais através de superfícies permeáveis colocadas no campo. Para essa finalidade, precisamos considerar algumas ideias básicas acerca de superfícies. A maioria das superfícies que encontramos nas aplicações tem dois lados – uma esfera tem um lado externo e um lado interno e um plano horizontal infinito tem um lado superior e um lado inferior, por exemplo. Existem, no entanto, superfícies matemáticas com apenas um lado. Por exemplo, a Figura 15.6.2*a* mostra a construção de uma superfície chamada de ***faixa de Möbius*** [em homenagem ao matemático alemão August Möbius (1790-1868)]. A faixa de Möbius tem um só lado, no sentido de que um inseto pode percorrer *toda* a superfície sem cruzar uma borda (Figura 15.6.2*b*). Em con-




Os vetores velocidade das partículas do fluido são tangentes à corrente.

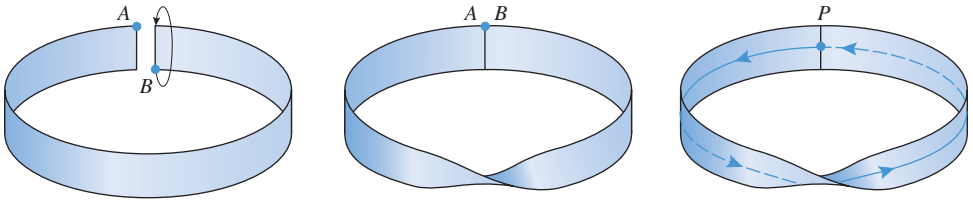
Pela Lei de Coulomb, o campo eletrostático resultante de uma única carga positiva é um campo de quadrado inverso, no qual **F** é a força repulsora em uma pequena carga positiva unitária.

O campo eletrostático **F** que resulta de duas cargas de mesma intensidade, mas de polaridade oposta.

(*a*) (*b*) (*c*)

**Figura 15.6.1**

Se uma formiga começa em $P$, com as costas viradas para o leitor, e dá uma volta completa em torno da faixa, então suas costas estarão viradas ao contrário quando ela retornar para $P$.




(*a*) (*b*)

**Figura 15.6.2**

trapartida, uma esfera tem dois lados, no sentido de que um inseto caminhando na esfera pode percorrer a superfície interna ou a externa, mas não pode percorrer ambas sem, de alguma maneira, passar através da esfera. Diz-se que uma superfície de dois lados é ***orientável*** e que uma superfície com um único lado é ***não orientável***. No restante do livro, trataremos somente de superfícies orientáveis.

Em aplicações, é importante ter algum meio de distinguir entre os dois lados de uma superfície orientável. Para isso, vamos supor que $\sigma$ seja uma superfície orientável que tenha um vetor normal unitário $\mathbf{n}$ em cada ponto. Como ilustrado na Figura 15.6.3, os vetores $\mathbf{n}$ e $-\mathbf{n}$ apontam para lados opostos da superfície e, portanto, servem para distinguir os dois lados. Pode ser provado que se $\sigma$ for uma superfície orientável lisa, então é sempre possível escolher o sentido de $\mathbf{n}$ em cada ponto de modo que $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y, z)$ seja contínuo na superfície. Esses vetores unitários são, então, denominados uma ***orientação*** da superfície. Pode-se provar também que uma superfície orientável lisa tem só duas orientações possíveis. Por exemplo, a superfície da Figura 15.6.4 é orientada para cima pelos vetores de cor cinza e para baixo pelos

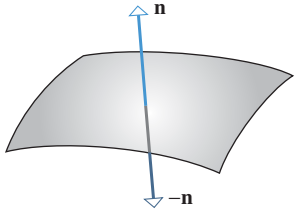



**Figura 15.6.3**

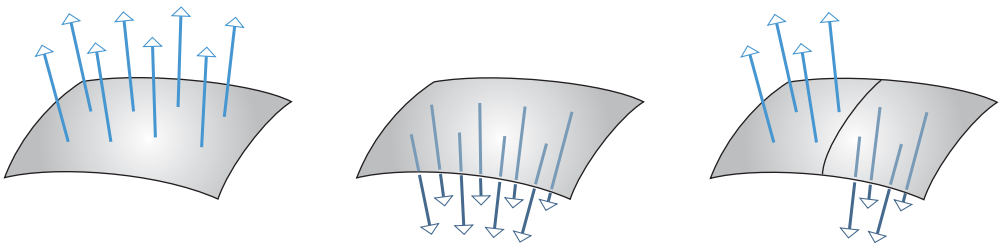


**Figura 15.6.4**

vetores de cor azul claro. Entretanto, não podemos criar uma terceira orientação misturando as duas, porque isso produz pontos na superfície nos quais há mudança abrupta de sentido (ao longo da curva de cor preta na figura, por exemplo).

## ORIENTAÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE PARAMÉTRICA LISA

Quando uma superfície é dada parametricamente, as equações paramétricas criam uma orientação natural para a superfície. Para ver isso, lembre da Seção 14.4, na qual foi mostrado que se uma superfície paramétrica lisa $\sigma$ for dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

então o vetor normal unitário

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v) = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \tag{1}$$

é uma função vetorial contínua de $u$ e $v$. Assim, a Fórmula (1) define uma orientação da superfície; essa é a ***orientação positiva*** da superfície paramétrica, e dizemos que $\mathbf{n}$ aponta no ***sentido positivo*** a partir da superfície. A orientação determinada por $-\mathbf{n}$ é chamada de ***orientação negativa*** da superfície, e dizemos que $-\mathbf{n}$ aponta no ***sentido negativo*** a partir da superfície. Por exemplo, considere o cilindro que é representado parametricamente pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} - \operatorname{sen} u\mathbf{k} \quad (0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 3)$$

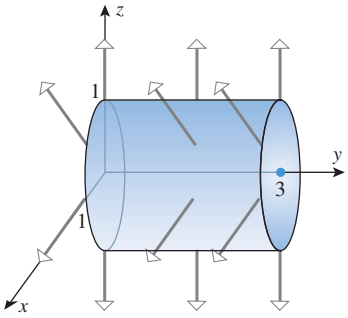



**Figura 15.6.5**

Então

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \cos u\mathbf{i} - \operatorname{sen} u\mathbf{k}$$

tem tamanho unitário, de modo que a Fórmula (1) é dada por

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \cos u\mathbf{i} - \operatorname{sen} u\mathbf{k}$$

O leitor pode tentar encontrar uma parametrização do cilindro em que o sentido positivo seja para dentro.

Como $\mathbf{n}$ tem os mesmos componentes $\mathbf{i}$ e $\mathbf{k}$ que $\mathbf{r}$, a orientação positiva do cilindro é *para fora* e a orientação negativa é *para dentro* (Figura 15.6.5).

## FLUXO

Na Física, o termo *fluido* é usado para descrever tanto líquidos quanto gases. Os líquidos são usualmente considerados como ***incompressíveis***, significando que o líquido tem uma densidade uniforme (massa por unidade de volume) que não pode ser alterada por forças de compressão. Os gases são considerados ***compressíveis***, significando que a densidade pode variar de um ponto para outro e pode ser alterada por forças de compressão. Neste livro, vamos considerar basicamente os fluidos incompressíveis. Além disso, vamos supor que a velocidade do fluido em um ponto fixado não varie com o tempo. Diz-se que campos de fluidos com essa propriedade estão em ***estado estacionário***.

Nosso próximo objetivo, nesta seção, é definir um conceito fundamental da Física, conhecido como *fluxo* (do latim *fluxu*). Esse conceito aplica-se a qualquer campo vetorial, mas vamos motivá-lo no contexto de campos de fluidos incompressíveis em estado estacionário. Imagine que um fluido esteja fluindo livremente através de uma superfície permeável, de um lado da superfície para o outro. Nesse contexto, podemos pensar no fluxo como:

*o volume de fluido que passa pela superfície em uma unidade de tempo.*

Essa ideia está ilustrada na Figura 15.6.6, que sugere que o volume de fluido que flui através uma porção da superfície depende de três fatores:

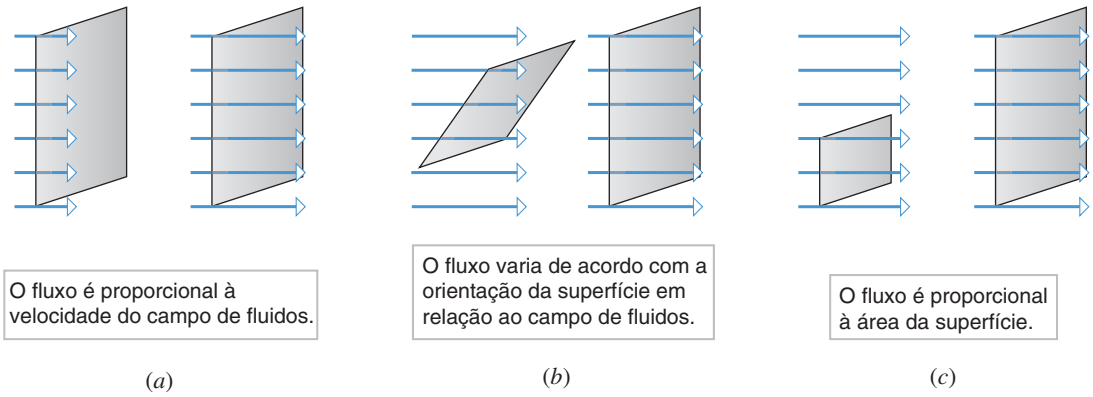



**Figura 15.6.6**

- A velocidade do campo de fluidos: quanto maior a velocidade, maior o volume (Figura 15.6.6*a*).
- A orientação da superfície em relação ao campo de fluidos: quanto mais perpendicular à superficie, maior o volume (Figura 15.6.6*b*).
- A área da porção de superfície: quanto maior a área, maior o volume (Figura 15.6.6*c*).

Essas ideias nos levam ao problema seguinte.

**15.6.1** **PROBLEMA** Suponha que uma superfície orientada $\sigma$ esteja imersa em um campo de fluidos incompressível em estado estacionário e suponha ainda que a superfície seja permeável, de modo que o fluido possa fluir através dela livremente em ambos os sentidos. Encontre o volume líquido do fluido $\Phi$ que passa através da superfície por unidade de tempo, onde volume líquido é interpretado como o volume que passa através da superfície no sentido positivo menos o volume que passa através da superfície no sentido negativo.

Para resolver esse problema, suponha que a velocidade do fluido em um ponto $(x, y, z)$ da superfície $\sigma$ seja dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

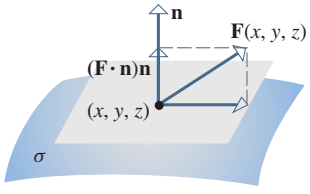



**Figura 15.6.7**

Seja $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário no sentido positivo de $\sigma$ no ponto $(x, y, z)$. Como ilustrado na Figura 15.6.7, o vetor velocidade $\mathbf{F}$ pode ser decomposto em dois componentes ortogonais – um componente ao longo da "face" da superfície $\sigma$ e um componente $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ perpendicular a $\sigma$. O componente da velocidade ao longo da face da superfície não contribui para o fluxo através de $\sigma$ e, portanto, pode ser ignorado nos nossos cálculos. Observe ainda que o sinal de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ determina a direção do fluxo – um valor positivo significa que o fluxo é no sentido de $\mathbf{n}$ e um valor negativo significa que é no sentido oposto a $\mathbf{n}$.

Para resolver o Problema 15.6.1, subdividimos $\sigma$ em $n$ porções $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ com áreas

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$$

Se as porções forem pequenas e o fluxo não for muito errático, é razoável supor que a velocidade não varie muito em cada porção. Assim, se $(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ for qualquer ponto na $k$-ésima porção, podemos supor que $\mathbf{F}(x, y, z)$ seja constante e igual a $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ em toda a porção e que o componente da velocidade através da superfície $\sigma_k$ seja

$$\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \tag{2}$$

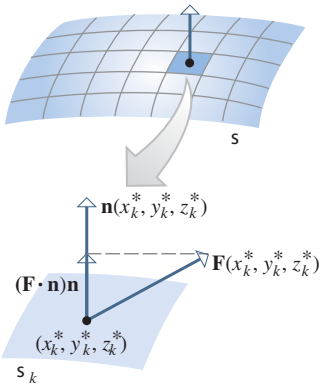



**Figura 15.6.8**

(Figura 15.6.8). Portanto, podemos interpretar

$$\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

como o valor aproximado do volume de fluido por unidade de tempo que cruza a porção $\sigma_k$ no sentido de $\mathbf{n}$ (Figura 15.6.9). Por exemplo, se o componente da velocidade no sentido de $\mathbf{n}$ for $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n} = 25$ cm/s e a área da porção for $\Delta S_k = 2$ cm$^2$, então o volume de fluido $\Delta V_k$ por unidade de tempo que atravessa a porção no sentido de $\mathbf{n}$ será aproximadamente

$$\Delta V_k \approx \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k = 25 \text{ cm/s} \cdot 2 \text{ cm}^2 = 50 \text{ cm}^3/\text{s}$$

No caso em que o componente da velocidade $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ for negativo, o fluxo será no sentido oposto a $\mathbf{n}$, de modo que $-\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$ será o volume aproximado de fluido por unidade de tempo que atravessa a porção $\sigma_k$ no sentido oposto a $\mathbf{n}$. Portanto, a soma

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

medirá o volume líquido aproximado de fluido que atravessa a superfície $\sigma$ por unidade de tempo no sentido de sua orientação $\mathbf{n}$.

Se, agora, aumentarmos $n$ de tal maneira que a dimensão máxima de cada porção tenda para zero, é plausível que os erros de aproximação tendam para zero e que o limite

$$\Phi = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \mathbf{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k \tag{3}$$

represente o volume líquido exato de fluido por unidade de tempo que atravessa a superfície $\sigma$ no sentido de sua orientação $\mathbf{n}$. A quantidade $\Phi$ definida pela Equação (3) é chamada de ***fluxo de F através de σ***. O fluxo também pode ser expresso como a integral de superfície

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\, dS \tag{4}$$

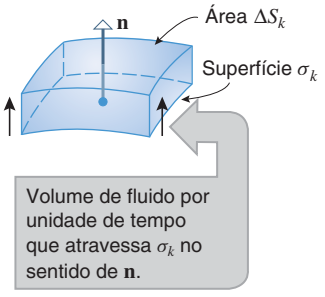



**Figura 15.6.9**

Se o fluido tem densidade de massa $\delta$, então $\Phi\delta$ (volume × densidade) representa a massa líquida de fluido, por unidade de tempo, que atravessa $\sigma$.

Um fluxo positivo significa que, em uma unidade de tempo, um volume de fluido maior atravessa $\sigma$ no sentido positivo do que no sentido negativo; um fluxo negativo significa que, em uma unidade de tempo, um volume de fluido maior atravessa $\sigma$ no sentido negativo do que no sentido positivo; e um fluxo nulo significa que o mesmo volume atravessa a superfície em cada sentido. As integrais da forma (4) também surgem em outros contextos e são chamadas de ***integrais de fluxo***.

## CÁLCULO DE INTEGRAIS DE FLUXO

Uma fórmula útil para calcular integrais de fluxo pode ser obtida aplicando o Teorema 15.5.2 e usando a Fórmula (1) de $\mathbf{n}$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_{R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA \\
&= \iint_{R} \mathbf{F} \cdot \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dA \\
&= \iint_{R} \mathbf{F} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dA
\end{aligned}$$

Em resumo, temos o resultado seguinte.

**15.6.2 TEOREMA** *Seja $\sigma$ uma superfície paramétrica lisa representada pela equação vetorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ em que $(u, v)$ varia em uma região $R$ do plano $uv$. Se as funções componentes do campo vetorial $\mathbf{F}$ forem contínuas em $\sigma$ e se $\mathbf{n}$ determinar a orientação positiva de $\sigma$, então*

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R} \mathbf{F} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dA \tag{5}$$

*onde se entende que o integrando do lado direito da equação deve ser dado em termos de $u$ e $v$.*

Embora o Teorema 15.6.2 tenha sido deduzido para superfícies paramétricas lisas, a Fórmula (5) vale mais geralmente. Por exemplo, sempre que $\sigma$ possuir um campo vetorial normal $\mathbf{n}$ contínuo e as funções componentes de $\mathbf{r}(u, v)$ tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, a Fórmula (5) pode ser aplicada, desde que $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v$ seja um múltiplo positivo de $\mathbf{n}$ no *interior* de $R$. (Ou seja, $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v$ pode ser nulo na fronteira de $R$.)

**▶ Exemplo 1** Encontre o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$ através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orientada para fora.

***Solução*** A esfera com orientação positiva para fora pode ser representada pela função vetorial

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}, \quad (0 \le \phi \le \pi, \ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

Dessa fórmula, obtemos (ver os cálculos no Exemplo 11 da Seção 14.4)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

Além disso, nos pontos da esfera temos $\mathbf{F} = z\mathbf{k} = a \cos \phi \mathbf{k}$; portanto

$$\mathbf{F} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right) = a^3 \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi$$

Assim, segue de (5), com os parâmetros $u$ e $v$ substituídos por $\phi$ e $\theta$, que

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\
&= \iint_{R} \mathbf{F} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right) dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^3 \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi \, d\phi \, d\theta \\
&= a^3 \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^{\pi} d\theta \\
&= \frac{2a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}
\end{aligned}$$

◀

Resolva o Exemplo 1 usando simetria: primeiro convença-se de que os campos vetoriais $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ e $z\mathbf{k}$ têm o mesmo fluxo através da esfera. Então, defina

$$\mathbf{H} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

e explique por que

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = a$$

Use isso para calcular $\Phi$.

**OBSERVAÇÃO** Inverter a orientação da superfície $\sigma$ em (5) troca o sinal de $\mathbf{n}$ e, portanto, o de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$; consequentemente, troca o sinal de $\Phi$. Isso também pode ser visto fisicamente pela interpretação da integral de fluxo como o volume de fluido por unidade de tempo que atravessa $\sigma$ no sentido positivo menos o volume de fluido por unidade de tempo que atravessa no sentido negativo – inverter a orientação de $\sigma$ muda o sinal da diferença. Assim, no Exemplo 1, uma orientação para dentro da esfera produz um fluxo de $-4\pi a^3/3$.

## ORIENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES NÃO PARAMÉTRICAS

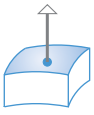
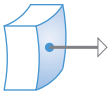
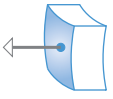
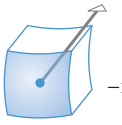
Superfícies não paramétricas da forma $z = g(x, y)$, $y = g(x, z)$ e $x = g(y, z)$ podem ser expressas parametricamente usando as variáveis independentes como parâmetros. Mais precisamente, essas superfícies podem ser representadas pelas equações vetoriais

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + g(u, v)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = v\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = g(u, v)\mathbf{i} + u\mathbf{j} + v\mathbf{k} \qquad (6\text{–}8)$$

$z = g(x, y)$ $\qquad$ $y = g(z, x)$ $\qquad$ $x = g(y, z)$

Essas representações impõem orientações positivas e negativas nas superfícies, de acordo com a Fórmula (1). Deixamos como exercício o cálculo de $\mathbf{n}$ e $-\mathbf{n}$ em cada caso e a demonstração de que as orientações positiva e negativa são as que aparecem na Tabela 15.6.1. (Para ajudar a perspectiva, cada gráfico aparece com uma porção da superfície de uma pequena região sólida.)

**Tabela 15.6.1**

| $z = g(x, y)$ | $y = g(z, x)$ | $x = g(y, z)$ |
|---|---|---|
|  $\mathbf{n} = \dfrac{-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$ <br> Componente $\mathbf{k}$ positivo — Orientação positiva |  $\mathbf{n} = \dfrac{-\frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ <br> Componente $\mathbf{j}$ positivo — Orientação positiva | $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{i} - \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ <br> Componente $\mathbf{i}$ positivo — Orientação positiva |
| $-\mathbf{n} = \dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$ <br> Componente $\mathbf{k}$ negativo — Orientação negativa |  $-\mathbf{n} = \dfrac{\frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ <br> Componente $\mathbf{j}$ negativo — Orientação negativa |  $-\mathbf{n} = \dfrac{-\mathbf{i} + \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ <br> Componente $\mathbf{i}$ negativo — Orientação negativa |

A variável dependente aumenta quando nos afastamos de uma superfície

$$z = g(x, y), \quad y = g(x, z)$$

ou

$$x = g(y, z)$$

no sentido da orientação positiva.

Os resultados da Tabela 15.6.1 também podem ser obtidos usando gradientes. Para ver como isso pode ser feito, reescreva as equações das superfícies como

$$z - g(x, y) = 0, \quad y - g(z, x) = 0, \quad x - g(y, z) = 0$$

Cada uma dessas equações é da forma $G(x, y, z) = 0$ e, portanto, pode ser considerada como uma superfície de nível de uma função $G(x, y, z)$. Como o gradiente de $G$ é normal à superfície de nível, segue que o vetor normal unitário $\mathbf{n}$ é ou $\nabla G/\|\nabla G\|$ ou $-\nabla G/\|\nabla G\|$. Entretanto, se $G(x, y, z) = z - g(x, y)$, então $\nabla G$ tem um componente $\mathbf{k}$ igual a 1; se $G(x, y, z) = y - g(z, x)$,

então $\nabla G$ tem um componente $\mathbf{j}$ igual a 1; e se $G(x, y, z) = x - g(y, z)$, então $\nabla G$ tem um componente $\mathbf{i}$ igual a 1. Portanto, é evidente, pela Tabela 15.6.1, que nos três casos temos

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \tag{9}$$

Além disso, deixamos como exercício mostrar que se as superfícies $z = g(x, y)$, $y = g(z, x)$ e $x = g(y, z)$ forem expressas nas formas vetoriais (6), (7) e (8), então

$$\nabla G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \tag{10}$$

[compare (1) e (9)]. Assim, somos levados à seguinte versão do Teorema 15.6.2 para superfícies não paramétricas.

**15.6.3 TEOREMA** *Seja $\sigma$ uma superfície lisa da forma $z = g(x, y)$, $y = g(z, x)$ ou $x = g(y, z)$, e suponha que as funções componentes do campo vetorial $\mathbf{F}$ sejam contínuas em $\sigma$. Suponha, também, que a equação de $\sigma$ seja reescrita como $G(x, y, z) = 0$ passando $g$ para o membro esquerdo da equação e que $R$ seja a projeção de $\sigma$ no plano coordenado determinado pelas variáveis independentes de $g$. Se $\sigma$ tiver orientação positiva, então*

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R} \mathbf{F} \cdot \nabla G\, dA \tag{11}$$

A Fórmula (11) pode ser usada tanto para cálculos diretos como para deduzir algumas fórmulas mais específicas para cada um dos três tipos de superfície. Por exemplo, se $z = g(x, y)$, então temos $G(x, y, z) = z - g(x, y)$, de modo que

$$\nabla G = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Substituindo essa expressão de $\nabla G$ em (11) e considerando $R$ como a projeção da superfície $z = g(x, y)$ no plano $xy$, obtemos

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R} \mathbf{F} \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dA \tag{12}$$

$\sigma$ da forma $z = g(x, y)$ e orientada para cima

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R} \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) dA \tag{13}$$

$\sigma$ da forma $z = g(x, y)$ e orientada para baixo

A dedução das fórmulas correspondentes quando $y = g(z, x)$ e $x = g(y, z)$ é deixada como exercício.

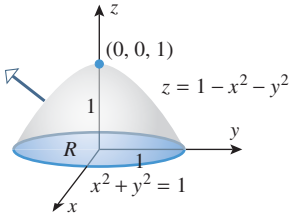



**Figura 15.6.10**

► **Exemplo 2** Seja $\sigma$ a porção da superfície $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano $xy$, e suponha que $\sigma$ seja orientada para cima, como mostrado na Figura 15.6.10. Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através de $\sigma$.

***Solução*** Por (12), o fluxo $\Phi$ é dado por

$$\Phi = \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dA$$

$$= \iint_R (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dA$$

$$= \iint_R (x^2 + y^2 + 1)\,dA \qquad \text{Pois } z = 1 - x^2 - y^2 \text{ na superfície}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2 + 1)r\,dr\,d\theta \qquad \text{Usando coordenadas polares para calcular a integral}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}\right)d\theta = \frac{3\pi}{2} \quad \blacktriangleleft$$

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.6 (Ver página 1148 para respostas.)

Nestes exercícios, seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ um campo vetorial definido em uma superfície $\sigma$ orientada por um campo vetorial normal unitário $\mathbf{n}(x, y, z)$ e seja $\Phi$ o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $\sigma$.

**1.** (a) $\Phi$ é o valor da integral de superfície _____.
(b) Se $\sigma$ for a esfera unitária e $\mathbf{n}$ for o normal unitário para fora, então o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

através de $\sigma$ é $\Phi =$ _____.

**2.** (a) Suponha que $\sigma$ seja parametrizada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ cujo domínio é uma região $R$ no plano $uv$ e que $\mathbf{n}$ seja um múltiplo positivo de

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Então _____ é a integral dupla em $R$ cujo valor é $\Phi$.
(b) Suponha que $\sigma$ seja a superfície paramétrica

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u + v)\mathbf{k} \quad (0 \le u^2 + v^2 \le 1)$$

e que $\mathbf{n}$ seja um múltiplo positivo de

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Então o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através de $\sigma$ é $\Phi =$ _____.

**3.** (a) Suponha que $\sigma$ seja o gráfico de uma função $z = g(x, y)$ sobre uma região $R$ do plano $xy$ e que $\mathbf{n}$ tenha um componente $\mathbf{k}$ positivo em cada ponto de $\sigma$. Então _____ é uma integral dupla em $R$ cujo valor é $\Phi$.
(b) Suponha que $\sigma$ seja a região triangular de vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1) com orientação para cima. Então o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

através de $\sigma$ é $\Phi =$ _____.

**4.** No caso de um campo de fluidos incompressível em estado estacionário, com velocidade do fluido dada por $\mathbf{F}(x, y, z)$ em cada ponto $(x, y, z)$ de $\sigma$, podemos interpretar $\Phi$ como _____.

## EXERCÍCIOS 15.6 C CAS

### ENFOCANDO CONCEITOS

**1.** Suponha que a superfície $\sigma$ do cubo unitário da figura tenha orientação para fora. Em cada parte, determine se o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j}$ através da face especificada é positivo, negativo ou nulo.
(a) A face $x = 1$ (b) A face $x = 0$
(c) A face $y = 1$ (d) A face $y = 0$
(e) A face $z = 1$ (f) A face $z = 0$

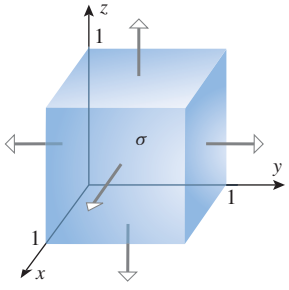



**Figura Ex-1**

**2.** Encontre o fluxo do campo vetorial constante $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ através de toda a superfície $\sigma$ da Figura Ex-1. Explique seu raciocínio.

**3.** Encontre o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i}$ através de um quadrado de lado 4 no plano $x = -5$ orientado no sentido de $x$ positivo.

**4.** Encontre o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + 1)\mathbf{j}$ através de um quadrado de lado 5 no plano $xz$ orientado no sentido de $y$ negativo.

**5.** Encontre o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z^2 + 4)\mathbf{k}$ através de um retângulo $2 \times 3$ no plano $z = 1$ orientado no sentido de $z$ positivo.

**6.** Encontre o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ através de um disco de raio 5 no plano $y = 3$ orientado no sentido de $y$ crescente.

**7.** Encontre o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = 9\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ através de um disco de raio 5 no plano $z = 2$ orientado para cima.

**8.** Seja $\sigma$ a superfície cilíndrica representada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, com $0 \le u \le 1$ e $0 \le v \le 2\pi$.
(a) Encontre o vetor normal unitário $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ que define a orientação positiva de $\sigma$.
(b) A orientação positiva é para dentro ou para fora? Justifique sua resposta.

**9-16** Encontre o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}$ através de $\sigma$. ■

**9.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{k}$; $\sigma$ é o quadrado $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$ no plano $xy$, orientado para cima.

**10.** $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$; $\sigma$ é o retângulo $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$ no plano $z = 2$, orientado no sentido de $z$ positivo.

**11.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção da superfície $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano $xy$, orientada por normais para cima.

**12.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + (x + e^y)\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\sigma$ é o retângulo vertical $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le 4$ no plano $y = -1$, orientado no sentido de $y$ negativo.

**13.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, orientada por vetores normais unitários para cima.

**14.** $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 4$, orientada por vetores normais unitários para baixo.

**15.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = y$, orientada por vetores normais unitários para baixo.

**16.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + yx\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção do plano $6x + 3y + 2z = 6$, no primeiro octante, orientada por vetores normais unitários com componentes positivos.

**17-20** Encontre o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}$ através de $\sigma$ na direção da orientação positiva. ■

**17.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção do paraboloide

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + (1 - u^2)\mathbf{k}$$

com $1 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$.

**18.** $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-y}\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} z\mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção do cilindro elíptico

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

com $0 \le u \le 5$, $0 \le v \le 2\pi$.

**19.** $\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção do cone

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$$

com $0 \le u \le \operatorname{sen} v$, $0 \le v \le \pi$.

**20.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção da esfera

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + 2 \cos u\mathbf{k}$$

com $0 \le u \le \pi/3$, $0 \le v \le 2\pi$.

**21.** Seja $\sigma$ a superfície do cubo limitado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$, orientada por vetores normais unitários para fora. Em cada parte, determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $\sigma$.
(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i}$
(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

**22.** Seja $\sigma$ a superfície fechada consistindo na porção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com $0 \le z \le 1$ e tampada pelo disco $x^2 + y^2 \le 1$ no plano $z = 1$. Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ na direção para fora através de $\sigma$.

**23-26 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**23.** A faixa de Möbius é uma superfície com duas orientações.

**24.** O fluxo de um campo vetorial é um outro campo vetorial.

**25.** Se o volume líquido de fluido que passa por uma superfície por unidade de tempo no sentido positivo for zero, então a velocidade do fluido será tangente à superfície em cada ponto.

**26.** Se uma superfície $\sigma$ for orientada por um vetor normal unitário $\mathbf{n}$, então o fluxo de $\mathbf{n}$ através de $\sigma$ será numericamente igual à área de superfície de $\sigma$.

**27-28** Encontre o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $\sigma$ expressando $\sigma$ parametricamente. ■

**27.** $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; a superfície $\sigma$ é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, orientado por vetores normais unitários para baixo.

**28.** $\mathbf{F}(x, y, z) = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção do cilindro $x^2 + z^2 = 16$ entre os planos $z = -2$ e $z = 2$, orientada por vetores normais unitários para fora.

**29.** Sejam $x$, $y$ e $z$ medidos em metros e suponha que $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 3y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ seja o vetor velocidade (em m/s) de uma partícula de fluido no ponto $(x, y, z)$ em um campo de fluidos em estado estacionário.
(a) Calcule o volume líquido de fluido que passa em 1s na direção para cima através da porção do plano $x + y + z = 1$ do primeiro octante.
(b) Supondo que o fluido tenha densidade de massa de 806 kg/m$^3$, encontre a massa líquida do fluido que passa em 1s através da superfície de (a) na direção para cima.

**30.** Sejam $x$, $y$ e $z$ medidos em metros e suponha que $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 3x\mathbf{k}$ seja o vetor velocidade (em m/s) de uma partícula de fluido no ponto $(x, y, z)$ em um fluxo fluido incompressível em estado estacionário.
(a) Determine o volume líquido de fluido que passa em 1s através do hemisfério $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ na direção para cima.
(b) Supondo que o fluido tenha densidade de massa de 1.060 kg/m$^3$, encontre a massa líquida do fluido que passa em 1s através da superfície da parte (a) na direção para cima.

**31.** (a) Deduza os análogos das Fórmulas (12) e (13) para superfícies da forma $x = g(y, z)$.
(b) Seja $\sigma$ a porção do paraboloide $x = y^2 + z^2$ com $x \le 1$ e $z \ge 0$, orientada por vetores normais unitários com componentes $x$ negativos. Use o resultado da parte (a) para encontrar o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

através de $\sigma$.

**32.** (a) Deduza os análogos das Fórmulas (12) e (13) para superfícies da forma $y = g(z, x)$.
(b) Seja $\sigma$ a porção do paraboloide $y = z^2 + x^2$ com $y \le 1$ e $z \ge 0$ orientada por vetores normais unitários com componentes $y$ positivos. Use o resultado da parte (a) para determinar o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

através de $\sigma$.

**33.** Seja $\mathbf{F} = \|\mathbf{r}\|^k\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $k$ é uma constante. (Note que se $k = -3$, isso é um campo de quadrado inverso.) Seja $\sigma$ a esfera de raio $a$ centrada na origem e orientada pelo vetor normal $\mathbf{n} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\| = \mathbf{r}/a$ para fora.
(a) Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $\sigma$ sem fazer nenhuma integração. [*Sugestão*: A área da superfície de uma esfera de raio $a$ é $4\pi a^2$.]
(b) Com qual valor de $k$ o fluxo é independente do raio da esfera?

C **34.** Sejam

$$\mathbf{F}(x, y, z) = a^2x\mathbf{i} + (y/a)\mathbf{j} + az^2\mathbf{k}$$

e $\sigma$ a esfera de raio 1, centrada na origem e orientada para fora. Use um CAS para encontrar todos os valores de $a$ tais que o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $\sigma$ seja $3\pi$.

C **35.** Seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{6}{a} + 1\right)x\mathbf{i} - 4ay\mathbf{j} + a^2z\mathbf{k}$$

e seja $\sigma$ a esfera de raio $a$, centrada na origem e orientada para fora. Use um CAS para encontrar todos os valores de $a$ tais que o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $\sigma$ seja zero.

**36.** **Texto** Discuta as semelhanças e as diferenças entre o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície e a integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva.

**37.** **Texto** Escreva um parágrafo explicando o conceito de fluxo para uma pessoa que desconheça tal conceito.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.6

**1.** (a) $\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ (b) $4\pi$ **2.** (a) $\iint_R \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) dA$ (b) 0 **3.** (a) $\iint_R \mathbf{F} \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dA$ (b) $\frac{1}{2}$

**4.** o volume líquido de fluido cruzando $\sigma$ no sentido positivo por unidade de tempo.

## 15.7 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

*Nesta seção, ocuparemo-nos do fluxo através de superfícies que, tais como esferas, "envolvem" uma região do espaço. Mostraremos que o fluxo através de tais superfícies pode ser expresso em termos da divergência do campo vetorial e usaremos esse resultado para fazer a interpretação física do conceito de divergência.*

### ORIENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES FECHADAS LISAS POR PARTES

Na seção anterior, estudamos o fluxo através de superfícies gerais. Aqui, vamos nos preocupar exclusivamente com superfícies que sejam fronteiras de sólidos finitos – a superfície de uma esfera sólida, a superfície de uma caixa sólida ou a superfície de um cilindro sólido, por exemplo. Tais superfícies são ditas ***fechadas***. Uma superfície fechada pode ou não ser lisa, mas a maioria das superfícies que aparecem nas aplicações geralmente é ***lisa por partes***; isto é, consistem em um número finito de superfícies lisas unidas pelas bordas (uma caixa, por exemplo). Limitaremos nossa discussão a superfícies lisas por partes às quais possamos

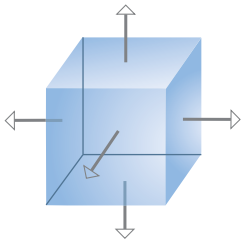



**Figura 15.7.1**

associar uma ***orientação para dentro*** (para o interior do sólido) e uma ***orientação para fora*** (saindo do interior). É muito difícil tornar esse conceito matematicamente preciso, mas a ideia básica é que cada parte da superfície é orientável, e partes orientadas encaixam-se de tal modo que pode ser determinada uma orientação para a superfície inteira (Figura 15.7.1).

## TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Na Seção 15.1, definimos a divergência de um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\,\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

mas, naquela ocasião, não tentamos dar uma explicação física de seu significado. O resultado seguinte, conhecido como ***Teorema da Divergência*** ou ***Teorema de Gauss***, vai nos fornecer uma interpretação física da divergência no contexto de campos de fluidos.

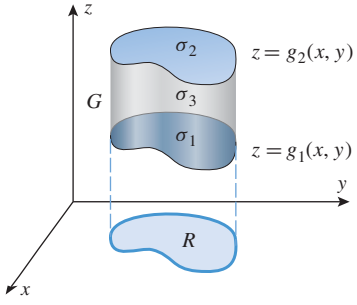
**15.7.1 TEOREMA** (***Teorema da Divergência***) *Seja $G$ um sólido cuja superfície $\sigma$ é orientada para fora. Se*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\,\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

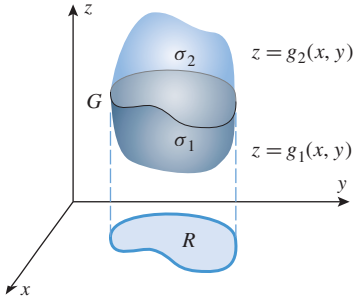
*onde $f$, $g$ e $h$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo $G$, e se $\mathbf{n}$ for o vetor normal unitário para fora de $\sigma$, então*

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{G} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \tag{1}$$

A demonstração desse teorema para um sólido geral $G$ é muito difícil para ser apresentada aqui. No entanto, podemos fazer a prova para um caso especial em que $G$ seja simultaneamente um sólido $xy$ simples, um sólido $yz$ simples e um sólido $zx$ simples (ver terminologia na Figura 14.5.3 e na discussão associada).




(*a*)




(*b*)

**Figura 15.7.2**

**DEMONSTRAÇÃO** A Fórmula (1) pode ser expressa como

$$\iint_{\sigma} [f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\,\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{G} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dV$$

portanto, é suficiente demonstrar as três igualdades

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{G} \frac{\partial f}{\partial x}\, dV \tag{2a}$$

$$\iint_{\sigma} g(x, y, z)\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{G} \frac{\partial g}{\partial y}\, dV \tag{2b}$$

$$\iint_{\sigma} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{G} \frac{\partial h}{\partial z}\, dV \tag{2c}$$

Como as provas para as três igualdades são análogas, demonstraremos somente a terceira.

Suponha que $G$ tenha superfície superior $z = g_2(x, y)$, superfície inferior $z = g_1(x, y)$ e projeção $R$ no plano $xy$. Denote a superfície inferior por $\sigma_1$, a superfície superior por $\sigma_2$ e a superfície lateral por $\sigma_3$ (Figura 15.7.2*a*). Se as superfícies superior e inferior se intersectam

como na Figura 15.7.2*b*, então não existe superfície lateral $\sigma_3$. Nossa demonstração considera ambos os casos mostrados nessas figuras.

Temos, pelo Teorema 14.5.2, que

$$\iiint_G \frac{\partial h}{\partial z}\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial h}{\partial z}\,dz\right] dA = \iint_R \Big[h(x, y, z)\Big]_{z=g_1(x,y)}^{g_2(x,y)}\,dA$$

portanto,

$$\iiint_G \frac{\partial h}{\partial z}\,dV = \iint_R [h(x, y, g_2(x, y)) - h(x, y, g_1(x, y))]\,dA \tag{3}$$

**Carl Friedrich Gauss (1777-1855)** Matemático e cientista alemão. Chamado algumas vezes de "príncipe dos matemáticos", Gauss é classificado, juntamente a Newton e Arquimedes, como um dos três maiores matemáticos da História. Seu pai, um trabalhador, era um homem rude mas honesto que teria preferido que Gauss abraçasse uma profissão como jardineiro ou pedreiro; mas o gênio do rapaz na Matemática não poderia ser negado. Em toda a história da Matemática, nunca houve uma criança tão precoce como Gauss – por sua própria iniciativa, trabalhou os rudimentos da Aritmética antes de poder falar. Um dia, antes que tivesse completado três anos, seu gênio tornou-se aparente para seus pais de um modo muito contundente. Seu pai estava preparando a folha de pagamento semanal dos trabalhadores sob sua responsabilidade, enquanto o garoto observava calmamente de um canto. No fim dos cálculos longos e cansativos, Gauss disse a seu pai que havia um erro no resultado e deu a resposta que ele obteve de cabeça. Para grande surpresa de seus pais, a verificação dos cálculos mostrou que Gauss estava certo!

Para sua educação elementar, Gauss foi matriculado em uma escola fraca, dirigida por um homem chamado Buttner, cuja principal técnica de ensino era o espancamento. Buttner tinha por hábito passar longos problemas de adição que, desconhecidos de seus alunos, eram progressões aritméticas que ele resolvia usando fórmulas. No primeiro dia que Gauss entrou na aula de Aritmética, foi pedido aos alunos que somassem os números de 1 a 100. Contudo, nem bem Buttner havia terminado de enunciar o problema, Gauss mostrou sua lousa e exclamou em seu dialeto camponês "Ligget se" (Aqui está). Por quase uma hora, Buttner fitou Gauss, que ficou sentado com os dedos entrelaçados enquanto seus colegas se esfalfavam. Quando Buttner examinou as lousas ao fim da aula, a lousa de Gauss continha um único número, 5050 – a única solução correta na classe. Para seu crédito, Buttner reconheceu o gênio de Gauss e, com a ajuda de seu assistente, John Bartels, levou-o ao conhecimento de Karl Wilhelm Ferdinand, Duque de Brunswick. O rapaz tímido e desajeitado que tinha, então, quatorze anos, cativou de tal maneira o Duque que ele subsidiou seus estudos preparatórios, universitários e o início de sua carreira.

De 1795 a 1798, Gauss estudou Matemática na Universidade de Göttingen, recebendo seu diploma "in absentia" da Universidade de Helmstadt. Em sua dissertação, fez a primeira demonstração completa do teorema fundamental da Álgebra, que diz que cada polinômio tem tantas soluções quanto seu grau. Com 19 anos, resolveu o problema que aturdiu Euclides, inscrevendo um polígono regular de 17 lados em um círculo usando régua e compasso; e em 1801, com 24 anos, publicou sua primeira obra-prima, *Disquisitiones Arithmeticae*, considerado por muitos como uma das mais brilhantes realizações na Matemática. Neste livro, Gauss sistematizou o estudo da teoria dos números (propriedades dos inteiros) e formulou os conceitos básicos que constituem o fundamento desse assunto.

No mesmo ano em que *Disquisitiones* foi publicado, Gauss aplicou novamente sua fenomenal habilidade de cálculo de maneira contundente. O astrônomo Giuseppi Piazzi tinha observado o asteroide Ceres ao longo de $\frac{1}{40}$ de sua órbita, mas perdeu-o no Sol. Usando somente três observações e o "método dos mínimos quadrados", que tinha desenvolvido em 1795, Gauss calculou a órbita com tal precisão que os astrônomos não tiveram qualquer dificuldade em reencontrá-lo no ano seguinte. Essa realização trouxe-lhe reconhecimento imediato como o principal matemático da Europa e, em 1807, ele foi nomeado Professor de Astronomia e chefe do observatório astronômico de Göttingen.

Nos anos que se seguiram, Gauss revolucionou a Matemática, introduzindo padrões de precisão e rigor nunca imaginados por seus predecessores. Ele tinha paixão pela perfeição, o que o levou a polir e retrabalhar seus escritos, em vez de publicar trabalhos menos elaborados em maior quantidade – seu lema favorito era "Pauca, sed matura" (Pouco, mas maduro). Como resultado, muitas das suas descobertas importantes ficaram escondidas em diários que permaneceram sem publicação durante anos após sua morte.

Entre a miríade de suas realizações, Gauss descobriu a curva de Gauss, ou curva em forma de sino, fundamental na Probabilidade, fez a primeira interpretação geométrica dos números complexos e estabeleceu seu papel fundamental na Matemática, desenvolveu métodos de caracterização de superfícies intrinsecamente por meio das curvas que elas contêm, desenvolveu a teoria das aplicações conformes (que preservam ângulo) e descobriu a Geometria não euclidiana 30 anos antes que as ideias fossem publicadas por outros. Na Física, fez contribuições relevantes na teoria das lentes e ação capilar e, com Wilhelm Weber, realizou trabalho fundamental em eletromagnetismo. Gauss inventou o heliotrópio, o magnetômetro bifilar e um eletrotelégrafo.

Ele era profundamente religioso e aristocrático na conduta. Dominava línguas estrangeiras com facilidade, lia extensivamente tinha Mineralogia e Botânica como hobby. Detestava lecionar e usualmente era frio e desencorajador com outros matemáticos, possivelmente porque já havia antecipado o trabalho deles. Já foi dito que se Gauss tivesse publicado todas as suas descobertas, o estado atual da Matemática estaria avançado em 50 anos. Ele foi, sem dúvida, o maior matemático da era moderna.

*[Imagem: ©SSPL/The Image Works]*

Em seguida, vamos calcular a integral de superfície de (2c) integrando separadamente em cada superfície de $G$. Se houver uma superfície lateral $\sigma_3$, então, em cada ponto dessa superfície, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$, visto que $\mathbf{n}$ é horizontal e $\mathbf{k}$ é vertical. Assim,

$$\iint_{\sigma_3} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

Portanto, independentemente de $G$ ter ou não uma superfície lateral, podemos escrever

$$\iint_{\sigma} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{\sigma_1} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{\sigma_2} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{4}$$

Na superfície superior $\sigma_2$, o vetor normal externo aponta para cima, e na superfície inferior $\sigma_1$, o vetor normal externo aponta para baixo. Assim, as Fórmulas (12) e (13) da Seção 15.6 implicam que

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma_2} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_{R} h(x, y, g_2(x, y))\mathbf{k} \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dA \\ &= \iint_{R} h(x, y, g_2(x, y))\, dA \end{aligned} \tag{5}$$

e

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma_1} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_{R} h(x, y, g_1(x, y))\mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) dA \\ &= -\iint_{R} h(x, y, g_1(x, y))\, dA \end{aligned} \tag{6}$$

Explique como a dedução de (2c) deve ser modificada para fornecer uma demonstração de (2a) ou (2b).

Substituindo (5) e (6) em (4) e combinando os termos em um único sinal de integral, obtemos

$$\iint_{\sigma} h(x, y, z)\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R} [h(x, y, g_2(x, y)) - h(x, y, g_1(x, y))]\, dA \tag{7}$$

A equação em (2c) segue agora de (3) e (7). ■

O fluxo de um campo vetorial através de uma superfície com orientação para fora costuma ser denominado ***fluxo de saída*** através da superfície. Em palavras, o Teorema da Divergência afirma:

*O fluxo de saída de um campo vetorial através de uma superfície fechada é igual à integral tripla da divergência na região envolvida pela superfície.*

## ■ USO DO TEOREMA DA DIVERGÊNCIA PARA CALCULAR O FLUXO

Às vezes, é mais fácil calcular o fluxo através de uma superfície fechada usando o Teorema da Divergência do que calculando a integral de fluxo diretamente. Isso é ilustrado no seguinte exemplo.

**► Exemplo 1** Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de saída do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$ através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

***Solução*** Seja $\sigma$ a superfície esférica orientada para fora e $G$ a região envolvida por ela. A divergência do campo vetorial é

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

portanto, por (1), o fluxo através de $\sigma$ é

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{G} dV = \text{volume de } G = \frac{4\pi a^3}{3}$$

Note como esse cálculo é muito mais simples do que o do Exemplo 1 da Seção 15.6. ◀

O Teorema da Divergência é, geralmente, o método escolhido para determinar o fluxo através de superfícies fechadas lisas por partes com múltiplas seções, visto que elimina a necessidade de calcular integrais separadas para cada seção. Isso é ilustrado nos três próximos exemplos.

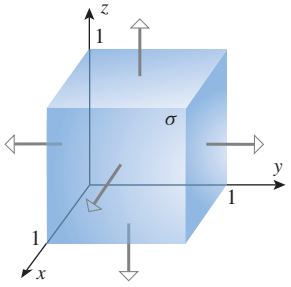


**Figura 15.7.3**

**▶ Exemplo 2** Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de saída do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

através do cubo unitário da Figura 15.7.3.

***Solução*** Seja $\sigma$ a superfície do cubo orientada para fora e $G$ a região envolvida por ele. A divergência do campo vetorial é

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(3y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 5 + 2z$$

portanto, por (1), o fluxo através de $\sigma$ é

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{G} (5 + 2z)\, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (5 + 2z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left[5z + z^2\right]_{z=0}^{1} dy\, dx = \int_0^1 \int_0^1 6\, dy\, dx = 6 \quad ◀$$

Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ o campo vetorial do Exemplo 2. Mostre que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ é constante em cada uma das seis faces do cubo na Figura 15.7.3. Use essas contas para confirmar o resultado no Exemplo 2.

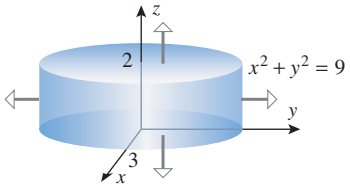


**Figura 15.7.4**

**▶ Exemplo 3** Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de saída do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

através da superfície da região compreendida pelo cilindro circular $x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 0$ e $z = 2$ (Figura 15.7.4).

***Solução*** Seja $\sigma$ a superfície orientada para fora e $G$ a região envolvida por ela. A divergência do campo vetorial é

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 3x^2 + 3y^2 + 2z$$

portanto, por (1), o fluxo através de $\sigma$ é

$$\Phi = \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_G (3x^2+3y^2+2z)\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^2 (3r^2+2z)r\,dz\,dr\,d\theta \qquad \text{Uso de coordenadas esféricas}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left[3r^3z+z^2r\right]_{z=0}^{2} dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (6r^3+4r)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{3r^4}{2}+2r^2\right]_0^3 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{279}{2}\,d\theta = 279\pi \quad \blacktriangleleft$$

► **Exemplo 4** Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de saída do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$$

através da superfície da região compreendida pelo hemisfério $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ e o plano $z=0$ (Figura 15.7.5).

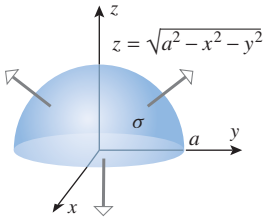



**Figura 15.7.5**

***Solução*** Seja $\sigma$ a superfície orientada para fora e $G$ a região envolvida por ela. A divergência do campo vetorial é

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3)+\frac{\partial}{\partial y}(y^3)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3x^2+3y^2+3z^2$$

portanto, por (1), o fluxo através de $\sigma$ é

$$\Phi = \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_G (3x^2+3y^2+3z^2)\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a (3\rho^2)\rho^2\,\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \qquad \text{Uso de coordenadas esféricas}$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho^4\,\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^5}{5}\operatorname{sen}\phi\right]_{\rho=0}^{a} d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{3a^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{3a^5}{5}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \frac{3a^5}{5}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{6\pi a^5}{5} \quad \blacktriangleleft$$

## A DIVERGÊNCIA CONSIDERADA COMO DENSIDADE DE FLUXO

O Teorema da Divergência oferece um meio de interpretar a divergência de um campo vetorial $\mathbf{F}$. Suponha que $G$ seja uma região esférica *pequena* centrada no ponto $P_0$ e que sua superfície, denotada por $\sigma(G)$, seja orientada para fora. Denote o volume da região por $\text{vol}(G)$ e o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $\sigma(G)$ por $\Phi(G)$. Se div $\mathbf{F}$ for contínua em $G$, então, através da região pequena $G$, o valor de div $\mathbf{F}$ não varia muito de seu valor div $\mathbf{F}(P_0)$ no centro, e é razoável aproximar div $\mathbf{F}$ pela constante div $\mathbf{F}(P_0)$ em $G$. Assim, o Teorema da Divergência implica que o fluxo $\Phi(G)$ de $\mathbf{F}$ através de $\sigma(G)$ pode ser aproximado como

$$\Phi(G) = \iint_{\sigma(G)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_G \text{div}\, \mathbf{F}\, dV \approx \text{div}\, \mathbf{F}(P_0) \iiint_G dV = \text{div}\, \mathbf{F}(P_0)\ \text{vol}(G)$$

do que decorre a aproximação

$$\text{div}\, \mathbf{F}(P_0) \approx \frac{\Phi(G)}{\text{vol}(G)} \tag{8}$$

A expressão do lado direito de (8) é chamada de ***densidade de fluxo de saída de F através de G***. Se agora permitirmos que o raio da esfera se aproxime de zero [de modo que $\text{vol}(G)$ tenda para zero], então é plausível que o erro de aproximação tenda para zero e a divergência de $\mathbf{F}$ no ponto $P_0$ seja dada exatamente por

$$\text{div}\, \mathbf{F}(P_0) = \lim_{\text{vol}(G)\to 0} \frac{\Phi(G)}{\text{vol}(G)}$$

A Fórmula (9), algumas vezes, é tomada como a definição da divergência. Essa é uma alternativa útil para a Definição 15.1.4, pois não requer um sistema de coordenadas.

que pode ser expressa como

$$\text{div}\, \mathbf{F}(P_0) = \lim_{\text{vol}(G)\to 0} \frac{1}{\text{vol}(G)} \iint_{\sigma(G)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{9}$$

Esse limite, que é chamado de ***densidade de fluxo de saída de F em $P_0$***, diz que se $\mathbf{F}$ denotar o campo de velocidade de um fluido, então, em um *campo de fluido em estado estacionário*, div $\mathbf{F}$ *pode ser interpretada como o fluxo limite por unidade de volume em um ponto*. Além disso, temos por (8) que para uma região esférica pequena $G$ centrada no ponto $P_0$ no fluxo, o fluxo de saída através da superfície de $G$ pode ser aproximado por

$$\Phi(G) \approx (\text{div}\, \mathbf{F}\ (P_0))\ (\text{vol}\ (G)) \tag{10}$$

## FONTES E POÇOS

Se $P_0$ for um ponto em um fluido incompressível no qual div $\mathbf{F}(P_0) > 0$, segue de (8) que $\Phi(G) > 0$ para uma esfera $G$ suficientemente pequena centrada em $P_0$. Portanto, há um volume de fluido maior saindo através da superfície do que entrando. No entanto, isso só pode ocorrer se houver algum ponto *no interior* da esfera no qual entra fluido no campo de fluido a partir de uma fonte externa (digamos, por condensação, fusão de um sólido ou reação química); caso contrário, o fluxo líquido para fora através da superfície resultaria em um decréscimo de densidade no interior da esfera, contradizendo a hipótese de incompressibilidade. De maneira análoga, se div $\mathbf{F}(P_0) < 0$, haveria um ponto no interior da esfera no qual estaria saindo fluido do campo de fluidos (digamos, por evaporação); caso contrário o fluxo líquido para dentro através da superfície resultaria em um aumento de densidade no interior da esfera. Em um fluido incompressível, os pontos em que div $\mathbf{F}(P_0) > 0$ são chamados de ***fontes*** e os pontos em que div $\mathbf{F}(P_0) < 0$ são chamados de ***poços*** ou sumidouros. O fluido entra no campo de fluido em uma fonte e é drenado em um poço. Em um fluido incompressível sem fontes nem poços, devemos ter

$$\text{div}\, \mathbf{F}\ (P) = 0$$

em cada ponto $P$. Em Hidrodinâmica, essa equação é chamada de ***equação de continuidade para fluidos incompressíveis*** e, algumas vezes, é usada como a característica que define um fluido incompressível.

## LEI DE GAUSS PARA CAMPOS DE QUADRADO INVERSO

O Teorema da Divergência aplicado a campos de quadrado inverso (ver Definição 15.1.2) produz um resultado chamado de ***Lei de Gauss para Campos de Quadrado Inverso***. Esse resultado é a base de muitos princípios importantes da Física.

**15.7.2 LEI DE GAUSS PARA CAMPOS DE QUADRADO INVERSO** Se

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

for um campo de quadrado inverso no espaço tridimensional, e se $\sigma$ for uma superfície orientável fechada que circunda a origem, então o fluxo de saída de $\mathbf{F}$ através de $\sigma$ é

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 4\pi c \tag{11}$$

Para deduzir esse resultado, lembremos que, pela Fórmula (5) da Seção 15.1, $\mathbf{F}$ pode ser expresso em forma de componentes como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \tag{12}$$

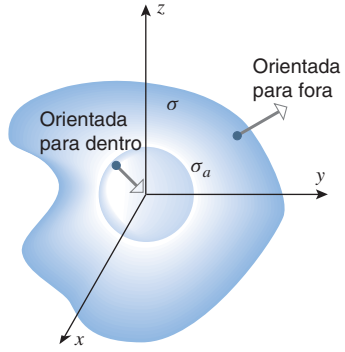



**Figura 15.7.6**

Como os componentes de $\mathbf{F}$ não são contínuos na origem, não podemos aplicar o Teorema da Divergência através do sólido envolvido por $\sigma$. Entretanto, podemos contornar essa dificuldade construindo uma esfera de raio $a$ centrada na origem, na qual o raio seja suficientemente pequeno para que a esfera fique inteiramente dentro da região envolvida por $\sigma$ (Figura 15.7.6). Denotaremos a superfície dessa esfera por $\sigma_a$. O sólido $G$ compreendido entre $\sigma_a$ e $\sigma$ é um exemplo de sólido tridimensional com uma "cavidade" interna. Da mesma maneira que pudemos ampliar o Teorema de Green para regiões multiplamente conexas no plano (regiões com buracos), também é possível ampliar o Teorema da Divergência para sólidos do espaço tridimensional com cavidades internas, desde que a integral de superfície do teorema abranja *toda a fronteira*, sendo a fronteira externa do sólido orientada para fora e as fronteiras das cavidades orientadas para dentro. Assim, se $\mathbf{F}$ for o campo de quadrado inverso em (12) e se $\sigma_a$ for orientada para dentro, então o Teorema da Divergência dá

$$\iiint_{G} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{\sigma_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{13}$$

No entanto, mostramos no Exemplo 5 da Seção 15.1 que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, de modo que (13) dá

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_{\sigma_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{14}$$

Podemos calcular a integral de superfície em $\sigma_a$ expressando o integrando em termos de componentes; entretanto, é mais fácil deixar em forma vetorial. Em cada ponto da esfera, o vetor normal unitário $\mathbf{n}$ aponta para dentro ao longo de um raio da origem e, então, $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Assim, (14) fornece

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= -\iint_{\sigma_a} \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}\cdot\left(-\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right) dS \\
&= \iint_{\sigma_a} \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^4}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\,dS \\
&= \iint_{\sigma_a} \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^2}\,dS \\
&= \frac{c}{a^2}\iint_{\sigma_a} dS \qquad \boxed{\|\mathbf{r}\| = a \text{ em } \sigma_a} \\
&= \frac{c}{a^2}(4\pi a^2) \qquad \boxed{\text{A integral é a área de superfície da esfera.}} \\
&= 4\pi c
\end{aligned}$$

que estabelece (11).

## LEI DE GAUSS NA ELETROSTÁTICA

Segue do Exemplo 1 da Seção 15.1 com $q = 1$ que uma particula isolada carregada com uma carga $Q$ localizada na origem cria um campo de quadrado inverso

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

no qual $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ é a força elétrica exercida por $Q$ em uma carga positiva unitária ($q = 1$) localizada no ponto com vetor posição $\mathbf{r}$. Nesse caso, a lei de Gauss (15.7.2) diz que o fluxo de saída $\Phi$ através de qualquer superfície orientável fechada $\sigma$ que circunde $Q$ é

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 4\pi\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Esse resultado, que é chamado de ***Lei de Gauss para Campos Elétricos***, pode ser estendido para mais de uma carga. É uma das leis fundamentais em Eletricidade e Magnetismo.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.7 (Ver página 1158 para respostas.)

1. Seja $G$ um sólido cuja superfície $\sigma$ está orientada para fora pelo vetor normal unitário $\mathbf{n}$ e seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto que contém $G$. O Teorema da Divergência afirma que a integral de superfície _____ e a integral tripla _____ têm o mesmo valor.

2. O fluxo de saída de $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através de qualquer cubo unitário é _____.

3. Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ for o campo de velocidades de um campo de fluidos incompressível em estado estacionário, então um ponto em que div $\mathbf{F}$ for positivo será chamado de _____ e um ponto em que div $\mathbf{F}$ for negativo será chamado de _____. A equação de continuidade de um fluido incompressível afirma que _____.

4. Se

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

for um campo vetorial de quadrado inverso e se $\sigma$ for uma superfície fechada orientável que circunda a origem, então a lei de Gauss afirma que o fluxo de saída de $\mathbf{F}$ através de $\sigma$ é _____. Por outro lado, se $\sigma$ não circunda a origem, então segue do Teorema da Divergência que o fluxo de saída de $\mathbf{F}$ através de $\sigma$ é _____.

## EXERCÍCIOS 15.7 C CAS

**1-4** Verifique a Fórmula (1) do Teorema da Divergência calculando a integral de superfície e a integral tripla. ■

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do cubo limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; a superfície $\sigma$ é o paraboloide $z = x^2 + y^2$ tampado pelo disco $x^2 + y^2 \le 1$ no plano $z = 1$.
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do cubo limitado pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2$.

**5-8** Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

5. O Teorema da Divergência iguala uma integral de superfície com uma integral de linha.
6. Se $G$ for um sólido cuja superfície $\sigma$ é orientada para fora e se div $\mathbf{F} > 0$ em cada ponto de $G$, então o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $\sigma$ será positivo.
7. A equação de continuidade para fluidos incompressíveis afirma que é nula a divergência do campo vetorial das velocidades desses fluidos.
8. Como é nula a divergência de um campo de quadrado inverso, também é nulo o fluxo de um campo desses através de qualquer superfície orientável fechada.

**9-19** Use o Teorema da Divergência para encontrar o fluxo de $\mathbf{F}$ através da superfície $\sigma$ com orientação para fora. ■

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + (e^y - z)\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do sólido retangular limitado pelos planos coordenados e os planos $x = 3$, $y = 1$ e $z = 2$.
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^3\mathbf{i} - x^3\,\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$; $\sigma$ é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + (z - y)\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do sólido cilíndrico limitado por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ e $z = 1$.
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do sólido limitado pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano $xy$.
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do sólido cilíndrico limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ e $z = 3$.
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} - (2xz + y)\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do tetraedro do primeiro octante limitado por $x + y + z = 1$ e os planos coordenados.
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 - e^y)\mathbf{i} + (y^3 + \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + (z^3 - xy)\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do sólido limitado acima por $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e abaixo pelo plano $xy$. [Sugestão: Use coordenadas esféricas.]
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do sólido hemisférico limitado acima por $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e abaixo pelo plano $xy$.
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do sólido cônico compreendido por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = 1$.
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j} + (z + 2)\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do sólido limitado acima pelo plano $z = 2x$ e abaixo pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$.
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; $\sigma$ é a superfície do sólido limitado por $z = 4 - x^2$, $y + z = 5$, $z = 0$ e $y = 0$.
20. Prove que se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\sigma$ for a superfície de um sólido $G$ orientado por vetores normais unitários para fora, então

$$\text{vol}(G) = \frac{1}{3}\iint_{\sigma} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

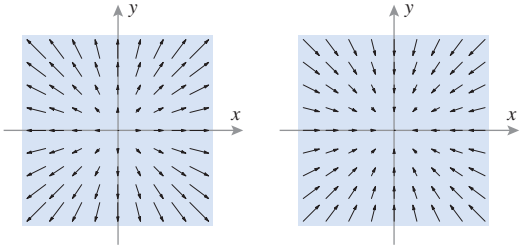
onde vol($G$) é o volume de $G$.

21. Use o resultado do Exercício 20 para determinar o fluxo para fora do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através da superfície $\sigma$ do sólido cilíndrico limitado por $x^2 + 4x + y^2 = 5$, $z = -1$ e $z = 4$.

### ENFOCANDO CONCEITOS

22. Sejam $\mathbf{F}(x, y, z) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ um campo vetorial constante e $\sigma$ a superfície de um sólido $G$. Use o Teorema da Divergência para mostrar que o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $\sigma$ é nulo. Dê uma explicação física informal desse resultado.
23. Encontre um o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ que tenha
    (a) divergência positiva em todos os pontos;
    (b) divergência negativa em todos os pontos.
24. Em cada parte, a figura mostra uma camada horizontal do campo vetorial de um fluxo fluido na qual o fluxo é paralelo ao plano $xy$ em cada ponto e é idêntico em cada camada (isto é, é independente de $z$). Para cada fluxo, o que pode ser dito acerca do sinal da divergência na origem? Explique seu raciocínio.

(a) (b)




25. Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ um campo vetorial não nulo no espaço tridimensional, cujas funções componentes têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e suponha que div $\mathbf{F} = 0$ em toda parte. Se $\sigma$ for qualquer esfera no espaço tridimensional, explique por que existe uma infinidade de pontos em $\sigma$ nos quais $\mathbf{F}$ é tangente à esfera.

**26.** O resultado do Exercício 25 permanecerá verdadeiro se trocarmos a esfera $\sigma$ por um cubo? Explique.

**27-31** Prove a identidade, supondo que $\mathbf{F}$, $\sigma$ e $G$ satisfaçam as hipóteses do Teorema da Divergência e que todos os requisitos necessários de diferenciabilidade das funções $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ estejam satisfeitos. ■

**27.** $\iint_\sigma \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$ [*Sugestão:* Ver Exercício 37, Seção 15.1.]

**28.** $\iint_\sigma \nabla f \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_G \nabla^2 f\, dV$

$\left(\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$

**29.** $\iint_\sigma (f \nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_G (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$

**30.** $\iint_\sigma (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_G (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f)\, dV$

[*Sugestão*: Troque $f$ com $g$ no Exercício 29.]

**31.** $\iint_\sigma (f \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}\, dS = \iiint_G \nabla f \cdot \mathbf{v}\, dV$ ($\mathbf{v}$ um vetor fixo)

**32.** Use o Teorema da Divergência para encontrar todos os valores positivos de $k$ tais que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^k}$$

satisfaça a condição div $\mathbf{F} = 0$ quando $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.
[*Sugestão*: Modifique a demonstração de (11).]

**33-36** Determine se o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ é livre de fontes e poços. Se não for, localize-os. ■

**33.** $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} - xz^3\mathbf{j} + (x^2 \operatorname{sen} y)\mathbf{k}$

**34.** $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

**35.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$

**36.** $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 - x)\mathbf{i} + (y^3 - y)\mathbf{j} + (z^3 - z)\mathbf{k}$

**C** **37.** Seja $\sigma$ a superfície do sólido $G$ delimitado pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano $z = 0$. Use um CAS para verificar a Fórmula (1) do Teorema da Divergência para o campo vetorial

$$\mathbf{F} = (x^2y - z^2)\mathbf{i} + (y^3 - x)\mathbf{j} + (2x + 3z - 1)\mathbf{k},$$

calculando a integral de superfície e a integral tripla.

**38.** **Texto** Discuta o que significa dizer que a divergência de um campo vetorial independe do sistema de coordenadas. Explique como sabemos que isso é verdadeiro.

**39.** **Texto** Discuta algumas aplicações geométricas e físicas do Teorema da Divergência.

### ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.7

**1.** $\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$; $\iiint_G \text{div } \mathbf{F}\, dV$ **2.** 3 **3.** fonte; poço; div $\mathbf{F} = 0$ **4.** $4\pi c$; 0

## 15.8 TEOREMA DE STOKES

*Nesta seção, discutiremos uma generalização do Teorema de Green para três dimensões que tem aplicações importantes no estudo dos campos vetoriais, particularmente na análise do movimento de rotação dos fluidos. Esse teorema também vai fornecer uma interpretação física do rotacional de um campo vetorial.*

### ■ ORIENTAÇÃO RELATIVA DE CURVAS E SUPERFÍCIES

Nesta seção, ocuparemo-nos de superfícies orientadas do espaço tridimensional limitadas por curvas paramétricas fechadas simples (Figura 15.8.1*a*). Se $\sigma$ for uma superfície orientada delimitada por uma curva paramétrica fechada simples $C$, então há duas relações possíveis entre as orientações de $\sigma$ e $C$, que podem ser descritas como segue. Imagine uma pessoa andando ao longo da curva $C$, com sua cabeça no sentido da orientação de $\sigma$. Diz-se que a pessoa está andando no ***sentido positivo*** de $C$ relativo à orientação de $\sigma$ se a superfície estiver à sua esquerda (Figura 15.8.1*b*) e que a pessoa está andando no ***sentido negativo*** de $C$ relativo à orientação de $\sigma$ se a superfície estiver à sua direita (Figura 15.8.1*c*). O sentido positivo de $C$ estabelece uma relação de mão direita entre as orientações de $\sigma$ e $C$, o que significa que se os

dedos da mão direita estiverem curvados na direção positiva de $C$, então o polegar apontará (aproximadamente) na direção da orientação de $\sigma$.

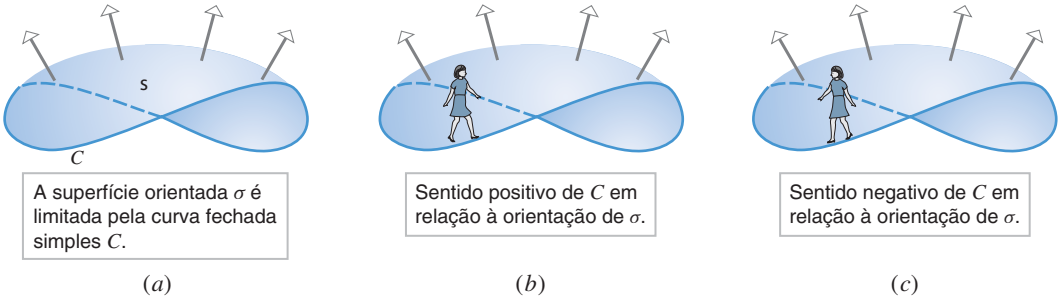



**Figura 15.8.1**

## TEOREMA DE STOKES

Na Seção 15.1, definimos o rotacional de um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\,\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

como

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \tag{1}$$

mas não tentamos dar uma explicação física do seu significado naquela ocasião. O seguinte resultado, conhecido como ***Teorema de Stokes***, fornece uma interpretação física do rotacional no contexto de fluxos fluidos.

**15.8.1** TEOREMA **(*Teorema de Stokes*)** *Seja $\sigma$ uma superfície orientada lisa por partes delimitada por uma curva $C$ lisa por partes, fechada, simples* e *com orientação positiva. Se os componentes do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

*forem contínuos e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo $\sigma$ e se $\mathbf{T}$ for o vetor tangente unitário a $C$, então*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_\sigma (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{2}$$

A prova desse teorema está além do escopo deste livro, portanto focalizaremos somente suas aplicações.

Lembre-se das Fórmulas (30) e (34) da Seção 15.2, nas quais a integral do lado esquerdo de (2) representa o trabalho realizado pelo campo vetorial $\mathbf{F}$ em uma partícula que percorre a curva $C$. Portanto, em um fraseado livre, o Teorema de Stokes diz que:

*O trabalho realizado por um campo de forças que percorre no sentido positivo uma curva $C$ lisa por partes, fechada e simples pode ser obtido integrando o componente normal do rotacional em uma superfície orientada $\sigma$ delimitada por $C$.*

## USO DO TEOREMA DE STOKES PARA CALCULAR TRABALHO

Para fins de cálculo é, em geral, preferível usar a Fórmula (30) da Seção 15.2 para reescrever a fórmula do Teorema de Stokes como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\sigma (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{3}$$

O Teorema de Stokes é, geralmente, a alternativa preferida para calcular trabalho ao longo de curvas lisas por partes com seções múltiplas, uma vez que elimina a necessidade de calcular uma integral separada para cada seção. Isso é ilustrado no exemplo seguinte.

**▶ Exemplo 1** Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + 4xy^3\mathbf{j} + y^2x\mathbf{k}$$

em uma partícula que percorre o retângulo $C$ no plano $z = y$, mostrado na Figura 15.8.2.

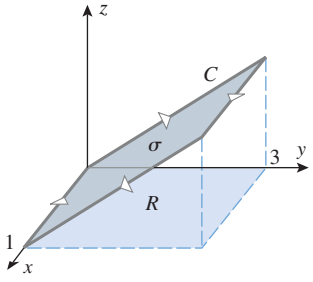



**Figura 15.8.2**

***Solução*** O trabalho realizado pelo campo é

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

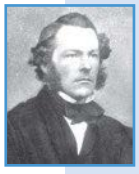
Entretanto, para calcular essa integral diretamente seriam necessárias quatro integrações separadas, uma para cada lado do retângulo. Em vez disso, vamos usar a Fórmula (3) para expressar o trabalho como uma integral de superfície

$$W = \iint_\sigma (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

na qual escolhemos uma orientação *para baixo* para a superfície plana $\sigma$ envolvida por $C$, a fim de tornar a orientação de $C$ positiva, como requerido pelo Teorema de Stokes.

Como a superfície $\sigma$ tem por equação $z = y$ e

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 4xy^3 & xy^2 \end{vmatrix} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4y^3\mathbf{k}$$



**George Gabriel Stokes (1819 – 1903)** Matemático e físico irlandês. Nascido em Skreen, Irlanda, Stokes veio de uma família de raízes profundas na Igreja da Irlanda. Seu pai era pároco, sua mãe era filha de um pároco e três de seus irmãos receberam ordens sagradas. Recebeu sua educação elementar de seu pai e de um escriturário paroquial local. Em 1837, entrou na Universidade de Pembroke e, depois de formar-se com honrarias, aceitou um cargo na faculdade. Em 1847, foi nomeado professor lucasiano de Matemática em Cambridge, posição que já havia sido ocupada por Isaac Newton, mas que havia perdido seu prestígio ao longo dos anos. Em virtude de suas realizações, Stokes acabou restaurando a posição à eminência que teve um dia. Infelizmente, o cargo pagava muito pouco, e Stokes viu-se forçado a lecionar na Escola de Minas do Governo durante a década de 1850 para suplementar sua receita.

Stokes foi um dos muitos cientistas de destaque do século XIX que ajudou a voltar as ciências físicas para uma direção mais empírica. Estudou sistematicamente hidrodinâmica, elasticidade dos sólidos, comportamento das ondas em sólidos elásticos e difração da luz. Para Stokes, a Matemática era uma ferramenta para seus estudos físicos. Escreveu artigos clássicos sobre o movimento de fluidos viscosos estabelecendo as fundações da Hidrodinâmica moderna; aperfeiçoou a teoria das ondas de luz e escreveu artigos sobre variação gravitacional que o consagraram como um fundador da Geodésia moderna.

Stokes foi homenageado nos seus últimos anos com graus, medalhas e participações em sociedades estrangeiras. Em 1889, recebeu o título de nobre. Durante toda a sua vida, dedicou generosamente seu tempo para sociedades eruditas e auxiliou imediatamente aqueles que procuravam sua ajuda para resolver problemas. Era profundamente religioso e preocupado com a relação entre ciência e religião.

*[Imagem: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stokes_George_G.jpg]*

segue da Fórmula (13) da Seção 15.6, com rot **F** substituindo **F**, que

$$W = \iint_{\sigma} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dA$$

$$= \iint_{R} (2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4y^3\mathbf{k}) \cdot (0\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^3 (-y^2 - 4y^3)\, dy\, dx$$

$$= -\int_0^1 \left[ \frac{y^3}{3} + y^4 \right]_{y=0}^{3} dx$$

$$= -\int_0^1 90\, dx = -90 \quad \blacktriangleleft$$

Explique como o resultado no Exemplo 1 mostra que o campo de forças dado não é conservativo.

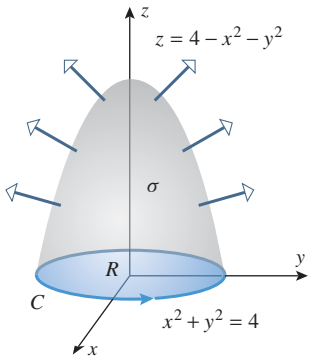



**Figura 15.8.3**

► **Exemplo 2** Verifique o Teorema de Stokes para o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$, considerando que $\sigma$ seja a porção do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e orientação para cima e que $C$ seja o círculo $x^2 + y^2 = 4$ com orientação positiva que forma a fronteira de $\sigma$ no plano $xy$ (Figura 15.8.3).

***Solução*** Vamos verificar a Fórmula (3). Como $\sigma$ é orientada para cima, a orientação positiva de $C$ é anti-horária, olhando no eixo $z$ positivo de cima para baixo. Desse modo, $C$ pode ser representada parametricamente (com orientação positiva) por

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\,\text{sen}\, t, \quad z = 0 \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \tag{4}$$

Logo,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C 2z\, dx + 3x\, dy + 5y\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} [0 + (6\cos t)(2\cos t) + 0]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 12\cos^2 t\, dt = 12\left[ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\,\text{sen}\, 2t \right]_0^{2\pi} = 12\pi$$

Para calcular o lado direito de (3), começamos determinando rot **F**. Obtemos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 3x & 5y \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

Como $\sigma$ é orientada para cima e é expressa na forma $z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, temos, pela Fórmula (12) da Seção 15.6, com rot $\mathbf{F}$ substituindo $\mathbf{F}$, que

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_{R} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \left( -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dA \\
&= \iint_{R} (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dA \\
&= \iint_{R} (10x + 4y + 3)\, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (10r\cos\theta + 4r\,\text{sen}\,\theta + 3)r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{10r^3}{3}\cos\theta + \frac{4r^3}{3}\,\text{sen}\,\theta + \frac{3r^2}{2} \right]_{r=0}^{2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left( \frac{80}{3}\cos\theta + \frac{32}{3}\,\text{sen}\,\theta + 6 \right) d\theta \\
&= \left[ \frac{80}{3}\,\text{sen}\,\theta - \frac{32}{3}\cos\theta + 6\theta \right]_0^{2\pi} = 12\pi
\end{aligned}$$

Como é assegurado pelo Teorema de Stokes, o valor dessa integral de superfície é o mesmo que o valor da integral de linha obtido anteriormente. Observe, porém, que o cálculo da integral de linha foi mais simples e, portanto, seria o método escolhido nesse caso. ◀

**OBSERVAÇÃO** Observe que na Fórmula (3) a única relação necessária entre $\sigma$ e $C$ é que $C$ seja a fronteira de $\sigma$ e que $C$ seja orientada positivamente em relação à orientação de $\sigma$. Portanto, se $\sigma_1$ e $\sigma_2$ forem superfícies com orientações *diferentes*, mas que tenham a *mesma* curva de fronteira $C$ com orientação positiva, então, por (3), temos que

$$\iint_{\sigma_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{\sigma_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Por exemplo, a superfície parabólica do Exemplo 2 tem a mesma fronteira $C$ com orientação positiva que o disco $R$ da Figura 15.8.3 com orientação para cima. Dessa forma, o valor da integral de superfície daquele exemplo não mudaria se $\sigma$ fosse substituída por $R$ (ou por qualquer outra superfície orientada que tenha o círculo $C$ orientado positivamente como sua fronteira). Isso pode ser conveniente nos cálculos pois, algumas vezes, é possível evitar uma integração difícil mudando a superfície de integração.

## RELAÇÃO ENTRE OS TEOREMAS DE GREEN E DE STOKES

Às vezes, é conveniente considerar um campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

do espaço bidimensional como um campo vetorial do espaço tridimensional expressando-o como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \tag{5}$$

Se $R$ for uma região do plano $xy$ envolvida por uma curva $C$, lisa por partes, fechada e simples, então podemos considerar $R$ como uma superfície plana e tratar a integral de superfície em $R$ como uma integral dupla ordinária em $R$. Portanto, se orientarmos $R$ para cima e $C$ no sentido anti-horário olhando para baixo do eixo $z$ positivo, então a Fórmula (3) aplicada a (5) resulta em

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA \tag{6}$$

Contudo,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f & g & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

visto que $\partial g/\partial z = \partial f/\partial z = 0$. Substituindo essa expressão em (6) e expressando as integrais em função dos componentes, obtemos

$$\oint_C f\,dx + g\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA$$

que é o Teorema de Green [Fórmula (1) da Seção 15.4]. Mostramos, pois, que o Teorema de Green pode ser considerado como um caso especial do Teorema de Stokes.

## O ROTACIONAL CONSIDERADO COMO CIRCULAÇÃO

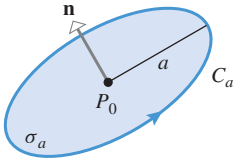



**Figura 15.8.4**

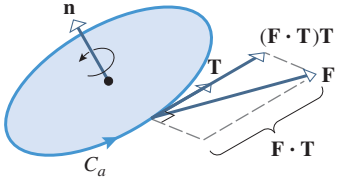



**Figura 15.8.5**

O Teorema de Stokes fornece um meio de interpretar o rotacional de um campo vetorial **F** no contexto de campo de fluidos. Para ver isso, considere que $\sigma_a$ seja um pequeno disco orientado de raio $a$ com centro em um ponto $P_0$ de um campo de fluidos em estado estacionário e seja **n** um vetor normal unitário no centro do disco que aponta no sentido da orientação. Vamos supor que o fluxo do líquido que passa pelo disco faz com que ele gire em torno do eixo dado por **n** e vamos tentar determinar a direção de **n** que produza a taxa máxima de rotação no sentido positivo da curva de fronteira $C_a$ (Figura 15.8.4). Por conveniência, vamos denotar a área do disco $\sigma_a$ por $A(\sigma_a)$; ou seja, $A(\sigma_a) = \pi a^2$.

Se a direção de **n** for fixada, então em cada ponto de $C_a$ o único componente de **F** que contribui para a rotação do disco em torno de **n** é o componente $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ tangente a $C_a$ (Figura 15.8.5). Desse modo, para um **n** fixado, a integral

$$\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds \tag{7}$$

pode ser considerada como uma medida da tendência do fluido fuir no sentido positivo ao longo de $C_a$. Como consequência, a integral (7) é denominada ***circulação de* F *ao longo de* $C_a$**. Por exemplo, no caso extremo em que o campo de fluidos é normal ao círculo em cada ponto, a circulação em torno de $C_a$ é nula, visto que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = 0$ em cada ponto. Quanto mais **F** alinhar-se com **T** ao longo do círculo, tanto maior será o valor de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ e maior o valor da circulação.

Para ver a relação entre a circulação e o rotacional, suponha que rot **F** seja contínuo em $\sigma_a$, de modo que quando $\sigma_a$ for pequeno, o valor de rot **F** em cada ponto de $\sigma_a$ não difira muito do valor de rot $\mathbf{F}(P_0)$ no centro. Portanto, para um disco pequeno $\sigma_a$ é razoável supor que rot **F** tenha o valor constante de rot $\mathbf{F}(P_0)$ em $\sigma_a$. Além disso, como a superfície $\sigma_a$ é plana, os vetores normais unitários que orientam $\sigma_a$ são todos iguais. Assim, a quantidade vetorial **n** da Fórmula (3) pode ser tratada como uma constante, e podemos escrever

$$\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \iint_{\sigma_a} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS \approx \text{rot } \mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n} \iint_{\sigma_a} dS$$

onde a integral de linha é tomada no sentido positivo de $C_a$. No entanto, a última integral dupla nessa equação representa a área de superfície de $\sigma_a$, portanto

$$\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds \approx [\text{rot } \mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n}]A(\sigma_a)$$

da qual obtemos

$$\text{rot } \mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n} \approx \frac{1}{A(\sigma_a)} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds \tag{8}$$

A Fórmula (9) é tomada, às vezes, como a definição do rotacional. Essa é uma alternativa útil para a Definição 15.1.5, porque não requer um sistema de coordenadas.

A quantidade no lado direito de (8) é denominada ***densidade de circulação de* F *ao longo de* $C_a$**. Se permitirmos, agora, que o raio do disco tenda para zero (com **n** fixo), então é plausível que o erro de aproximação tenda para zero e o valor exato de rot $\mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n}$ seja dado por

$$\text{rot } \mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{A(\sigma_a)} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \tag{9}$$

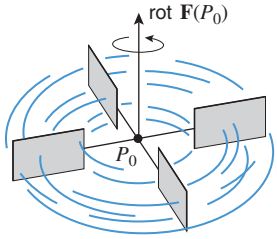



**Figura 15.8.6**

Chamamos rot $\mathbf{F}(P_0) \cdot \mathbf{n}$ de ***densidade de circulação de* F *em* $P_0$ *no sentido de* n**. Essa quantidade tem seu valor máximo quando **n** está na mesma direção e sentido de rot $\mathbf{F}(P_0)$; isso nos diz que *em cada ponto de um campo de fluidos em estado estacionário, a densidade de circulação máxima ocorre na direção do rotacional*. Fisicamente, isso significa que se uma pequena roda-d'água for imersa em um fluido de modo que o pivô seja o ponto $P_0$, então as pás giram mais rapidamente quando o eixo estiver alinhado com rot $\mathbf{F}(P_0)$ (Figura 15.8.6). Se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ em cada ponto da região, então se diz que **F** é ***irrotacional*** naquela região, uma vez que não ocorre circulação em torno de qualquer ponto da região.

## ✔ EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.8 (Ver página 1166 para respostas.)

**1.** Seja $\sigma$ uma superfície lisa por partes, orientada, cuja fronteira é uma curva lisa por partes $C$, fechada e simples, com orientação positiva. Se as funções componentes do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo $\sigma$ e se **T** for o vetor tangente unitário a $C$, então o Teorema de Stokes afirma que a integral de linha _____ e a integral de superfície _____ serão iguais.

**2.** Mostramos no Exemplo 2 que o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$$

satisfaz a equação rot $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Segue do Teorema de Stokes que se $C$ for qualquer círculo de raio $a$ no plano $xy$ orientado no sentido anti-horário quando visto do eixo $z$ positivo, então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = _____$$

onde **T** denota o vetor tangente unitário a $C$.

**3.** (a) Se $\sigma_1$ e $\sigma_2$ forem duas superfícies orientadas que têm a mesma curva de fronteira $C$ orientada positivamente e se o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ tiver derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo $\sigma_1$ e $\sigma_2$, então segue do Teorema de Stokes que as integrais de superfície _____ e _____ serão iguais.

(b) Sejam $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$, $a$ um número positivo e $\sigma$ a parte do paraboloide $z = a^2 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e orientação para cima. Usando (a) e o Exercício 2, segue que

$$\iint_\sigma (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = _____$$

**4.** Para um campo de fluidos em estado estacionário, a densidade de circulação máxima ocorre na direção e sentido do _____ do campo de velocidades do campo.

## EXERCÍCIOS 15.8 C CAS

**1-4** Verifique a Fórmula (2) do Teorema de Stokes calculando a integral de linha e a integral dupla. Suponha que a superfície tenha orientação para cima. ■

**1.** $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante.

**2.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abaixo do plano $z = 1$.

**3.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\sigma$ é o hemisfério superior $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

**4.** $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - y)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$; $\sigma$ é a porção do paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano $xy$.

**5-12** Use o Teorema de Stokes para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. ■

**5.** $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - y^3\mathbf{k}$; $C$ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano $xy$ com orientação anti-horária olhando no eixo $z$ positivo de cima para baixo.

**6.** $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j} + yx\mathbf{k}$; $C$ é o retângulo no plano $z = y$ mostrado na Figura 15.8.2.

**7.** $\mathbf{F}(x, y, z) = 3z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$; $C$ é a fronteira do paraboloide mostrado na Figura 15.8.3.

**8.** $\mathbf{F}(x, y, z) = -3y^2\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + 6x\mathbf{k}$; $C$ é o triângulo no plano $z = \frac{1}{2}y$ de vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 1)$ e $(0, 0, 0)$, com orientação anti-horária olhando no eixo $z$ positivo de cima para baixo.

**9.** $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; $C$ é a interseção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = y$ com orientação anti-horária olhando no eixo $z$ positivo de cima para baixo.

**10.** $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$; $C$ é o triângulo no plano $x + y + z = 1$ de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, com orientação anti-horária olhando do primeiro octante para a origem.

**11.** $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$; $C$ é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ no plano $xy$ com orientação anti-horária olhando no eixo $z$ positivo de cima para baixo.

**12.** $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j} + (y + e^z)\mathbf{k}$; $C$ é a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com orientação anti-horária olhando no eixo $z$ positivo de cima para baixo.

**13-16 Verdadeiro/Falso** Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

**13.** O Teorema de Stokes iguala uma integral de linha com uma integral de superfície.

**14.** O Teorema de Stokes é um caso particular do Teorema de Green.

**15.** A circulação de um campo vetorial $\mathbf{F}$ em torno de uma curva fechada $C$ é definida por

$$\int_C (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{T}\, ds$$

**16.** Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ estiver definido em cada ponto do espaço tridimensional e se rot $\mathbf{F}$ não tiver componente $k$ em qualquer ponto do plano $xy$, então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$$

qualquer que seja a curva fechada simples e lisa $C$ do plano $xy$.

**17.** Considere o campo vetorial dado pela fórmula

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + (z - xy)\mathbf{k}$$

(a) Use o Teorema de Stokes para encontrar a circulação em torno do triângulo de vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, 1)$, orientado no sentido anti-horário olhando da origem para o primeiro octante.

(b) Encontre a densidade de circulação de $\mathbf{F}$ na origem na direção de $\mathbf{k}$.

(c) Encontre o vetor unitário $\mathbf{n}$ tal que a densidade de circulação de $\mathbf{F}$ na origem seja máxima na direção de $\mathbf{n}$.

## ENFOCANDO CONCEITOS

**18.** (a) Seja $\sigma$ a superfície de um sólido $G$ com vetor normal unitário $\mathbf{n}$ para fora de $\sigma$. Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $\sigma$. Prove que

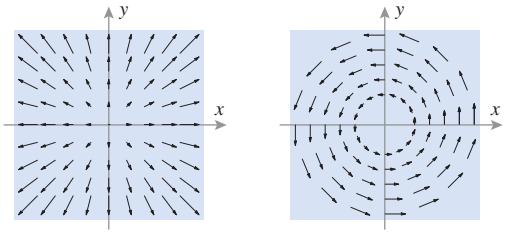
$$\iint_\sigma (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

[*Sugestão*: Seja $C$ uma curva fechada simples em $\sigma$ que separa a superfície em duas subsuperfícies $\sigma_1$ e $\sigma_2$ com fronteira comum $C$. Aplique o Teorema de Stokes a $\sigma_1$ e a $\sigma_2$ e some os resultados.]

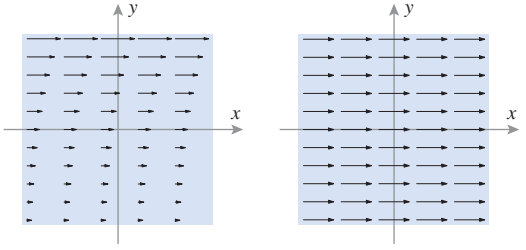
(b) O campo vetorial rot($\mathbf{F}$) é denominado ***campo rotacional* de $\mathbf{F}$**. Em palavras, interprete a fórmula de (a) como uma afirmação sobre o fluxo do campo rotacional.

**19-20** As figuras nestes exercícios mostram uma camada horizontal do campo vetorial de um fluxo fluido, no qual o fluxo é paralelo ao plano $xy$ em cada ponto e é idêntico em cada camada (ou seja, é independente de $z$). Para cada fluxo, decida se rotacional é diferente de zero na origem e explique seu raciocínio. Se o rotacional for diferente de zero, diga se aponta na direção positiva ou negativa de $z$. ■

**19.** (a) (b)




**20.** (a) (b)




**21.** Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ um campo vetorial conservativo no espaço tridimensional cujas funções componentes têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Explique como usar a Fórmula (9) para provar que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

**22.** Em 1831, o físico Michael Faraday descobriu que uma corrente elétrica pode ser produzida variando o fluxo magnético através de um arco condutor. Suas experiências mostraram que a força eletromotriz $\mathbf{E}$ está relacionada com a indução magnética $\mathbf{B}$ pela equação

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Use esse resultado para fazer uma conjectura acerca da relação entre rot $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e explique seu raciocínio.

C **23.** Sejam $\sigma$ a porção do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e $C$ o círculo $x^2 + y^2 = 1$ que forma a fronteira de $\sigma$ no plano $xy$. Supondo que $\sigma$ seja orientada para cima, use um CAS para verificar a Fórmula (2) do Teorema de Stokes para o campo vetorial

$$\mathbf{F} = (x^2y - z^2)\mathbf{i} + (y^3 - x)\mathbf{j} + (2x + 3z - 1)\mathbf{k}$$

calculando a integral de linha e a integral de superfície.

**24. Texto** Discuta o que significa dizer que o rotacional de um campo vetorial independe do sistema de coordenadas. Explique como sabemos que isso é verdadeiro.

**25. Texto** Compare e contraste o Teorema Fundamental de Integrais de Linha, o Teorema da Divergência e o Teorema de Stokes.

## ✔ RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE COMPREENSÃO 15.8

1. $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$; $\iint_\sigma (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$ 2. $3\pi a^2$ 3. (a) $\iint_{\sigma_1} (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$; $\iint_{\sigma_2} (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$ (b) $3\pi a^2$ 4. rotacional

## EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 15

**1.** Responda com palavras: o que é um campo vetorial? Dê alguns exemplos físicos de campos vetoriais.

**2.** (a) Dê um exemplo físico de um campo de quadrado inverso $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ no espaço tridimensional.
(b) Escreva uma fórmula para um campo de quadrado inverso $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ geral em função do raio vetor $\mathbf{r}$.
(c) Escreva uma fórmula para um campo de quadrado inverso $\mathbf{F}(x, y, z)$ no espaço tridimensional usando coordenadas retangulares.

**3.** Encontre uma expressão explícita em coordenadas para o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y)$ que, em cada ponto $(x, y) \neq (1, 2)$ é o vetor unitário que aponta de $(x, y)$ para $(1, 2)$.

**4.** Encontre $\nabla\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$.

**5.** Encontre rot $(z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k})$.

**6.** Seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j} + \frac{z}{x^2+y^2}\mathbf{k}$$

Esboce a superfície de nível div $\mathbf{F} = 1$.

**7.** Suponha que $C$ seja a curva paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, onde $t$ varia de $a$ até $b$. Em cada parte, expresse a integral de linha como uma integral definida com variável de integração $t$.
(a) $\int_C f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy$ (b) $\int_C f(x, y)\,ds$

**8.** (a) Expresse a massa $M$ de um arame fino no espaço tridimensional como uma integral de linha.
(b) Expresse o comprimento de uma curva como uma integral de linha.

**9.** Dê uma interpretação física de $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$.

**10.** Escreva algumas notações alternativas para $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$.

**11-13** Calcule a integral de linha. ■

**11.** $\int_C (x - y)\,ds$; $C : x^2 + y^2 = 1$

**12.** $\int_C x\,dx + z\,dy - 2y^2\,dz$;
$C : x = \cos t, \quad y = \text{sen } t, \quad z = t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

**13.** $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = (x/y)\mathbf{i} - (y/x)\mathbf{j}$;
$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad (1 \le t \le 2)$

**14.** Encontre o trabalho efetuado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$$

para mover uma partícula de $(0, 0)$ até $(1, 1)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

**15.** Enuncie o Teorema Fundamental das Integrais de Trabalho, incluindo todas as hipóteses requeridas.

**16.** Calcule $\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r}$, onde $f(x, y, z) = xy^2z^3$ e

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + t)\mathbf{j} + \text{sen}(3\pi t/2)\mathbf{k} \quad (0 \le t \le 1)$$

**17.** Seja $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$.
(a) Obtenha uma função não nula $h(x)$ tal que $h(x)\mathbf{F}(x, y)$ seja um campo vetorial conservativo.
(b) Obtenha uma função não nula $g(y)$ tal que $g(y)\mathbf{F}(x, y)$ seja um campo vetorial conservativo.

**18.** Seja $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy} - 1)\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$.
(a) Mostre que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo.
(b) Calcule uma função potencial de $\mathbf{F}$.
(c) Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial em uma partícula que se move ao longo da curva em ziguezague, representada pelas equações paramétricas

$$x = t + \text{arc sen}(\text{sen } t)$$
$$y = (2/\pi)\,\text{arc sen}(\text{sen } t) \qquad (0 \le t \le 8\pi)$$

(ver figura a seguir).

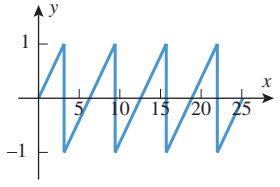



**Figura Ex-18**

**19.** Enuncie o Teorema de Green, incluindo todas as hipóteses requeridas.

**20.** Expresse a área de uma região plana como uma integral de linha.

**21.** Sejam $\alpha$ e $\beta$ dois ângulos que satisfazem $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$ e suponha que $r = f(\theta)$ seja uma curva polar lisa com $f(\theta) > 0$ no intervalo $[\alpha, \beta]$. Use a fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$$

para encontrar a área da região $R$ englobada pela curva $r = f(\theta)$ e os raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$.

**22.** (a) Use o Teorema de Green para provar que

$$\int_C f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

se $f$ e $g$ forem funções diferenciáveis e $C$ for uma curva simples, fechada, lisa por partes.

(b) O que isso nos diz sobre o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j}$?

**23.** Suponha que $\sigma$ seja a superfície paramétrica

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

onde $(u, v)$ varia numa região $R$. Expresse a integral de superfície

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS$$

como uma integral dupla com variáveis de integração $u$ e $v$.

**24.** Calcule $\iint_{\sigma} z\, dS$; $\sigma : x^2 + y^2 = 1$ $(0 \le z \le 1)$.

**25.** A superfície da figura é orientável? Explique seu raciocínio.

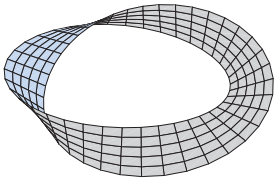


**Figura Ex-25**

**26.** Dê uma interpretação física de $\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

**27.** Encontre o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ através da parte do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está no plano ou acima do plano $xy$ com orientação para cima.

**28.** Encontre o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ através da esfera unitária centrada na origem com orientação para fora.

**29.** Enuncie o Teorema da Divergência e o Teorema de Stokes, incluindo todas as hipóteses requeridas.

**30.** Seja $G$ um sólido com a superfície $\sigma$ orientada por vetores normais unitários para fora, suponha que $\phi$ tenha derivadas parciais de primeira e segunda ordens contínuas em algum conjunto aberto contendo $G$ e seja $D_{\mathbf{n}}\phi$ a derivada direcional de $\phi$, onde $\mathbf{n}$ é um vetor normal unitário para fora de $\sigma$. Mostre que

$$\iint_{\sigma} D_{\mathbf{n}}\phi\, dS = \iiint_{G} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] dV$$

**31.** Sejam $\sigma$ a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\mathbf{n}$ um vetor normal unitário para dentro e $D_{\mathbf{n}}f$ a derivada direcional da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Use o resultado do Exercício 30 para calcular a integral de superfície

$$\iint_{\sigma} D_{\mathbf{n}} f\, dS$$

**32.** Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_{\sigma} \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - y)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$ e $\sigma$ é a parte do paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ que está no plano ou acima do plano $z = 1$, com orientação para cima.

**33.** Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ e suponha que $f$, $g$ e $h$ sejam contínuas e tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa região. No Exercício 31 da Seção 15.3, foi mostrado que, se $\mathbf{F}$ for conservativo na região, então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

nessa região. Use esse resultado para mostrar que se $\mathbf{F}$ for conservativo em uma região esférica aberta, então rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ nessa região.

**34-35** Use o resultado do Exercício 33 para determinar se $\mathbf{F}$ é conservativo. ■

**34.** (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + e^{-y}\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$
(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \text{sen}\, z\mathbf{k}$

**35.** (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{sen}\, x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

**36.** Como discutido no Exemplo 1 da Seção 15.1, a *Lei de Coulomb* afirma que a força eletrostática $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ que uma partícula com carga $Q$ exerce sobre uma partícula com carga $q$ é dada pela fórmula

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição de $Q$ para $q$ e $\epsilon_0$ é a constante de permissividade.

(a) Expresse o campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ em forma de coordenadas $\mathbf{F}(x, y, z)$ com $Q$ na origem.
(b) Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial $\mathbf{F}$ em uma carga $q$ que se move ao longo de uma reta de (3, 0, 0) para (3, 1, 5).

## CAPÍTULO 15 ESTABELECENDO CONEXÕES

Suponha que o movimento de uma partícula de massa $m$ seja descrito por uma função vetorial lisa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (a \le t \le b)$$

em que $t$ denota o tempo. Sejam $C$ o gráfico da função vetorial e $v(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ a velocidade escalar e a aceleração da partícula no instante $t$, respectivamente.

**1.** Diremos que a partícula está se movendo "livremente" sob a influência do campo de forças $\mathbf{F}(x, y, z)$ se $\mathbf{F}$ for a *única* força atuante na particular. Nesse caso, a Segunda Lei do Movimento de Newton é dada por

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = m\mathbf{a}(t)$$

Use o Teorema 12.6.2 para provar que, quando a partícula se move livremente, temos

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C m\left(\frac{dv}{dt}\right)ds &= m\int_a^b v(t)\left(\frac{dv}{dt}\right)dt \\ &= m\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}[v(t)]^2\right)dt \\ &= \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2\end{aligned}$$

Isso significa que o trabalho efetuado por $\mathbf{F}$ na partícula é igual à variação da energia cinética da partícula.

**2.** Suponha que a partícula mova-se sob a ação de um campo de forças $\mathbf{F}(x, y, z)$ ao longo de uma curva *prescrita* $C$. Além da força $\mathbf{F}$, a partícula estará sujeita a uma "força de suporte" $\mathbf{S}(x(t), y(t), z(t))$ da curva. (Imagine um carrinho em uma montanha russa caindo sem fricção sob a influência da força gravitacional $\mathbf{F}$: a força de suporte $\mathbf{S}$ é fornecida pelos trilhos da montanha russa.) Nesse caso, diremos que a partícula tem um "movimento condicionado" sob a influência de $\mathbf{F}$. Prove que o trabalho efetuado por $\mathbf{F}$ em uma partícula em movimento condicionado também é igual à variação na energia cinética da partícula. [*Sugestão*: Aplique o argumento do Exercício 1 à força resultante $\mathbf{F} + \mathbf{S}$ na partícula. Use o fato de que a força $\mathbf{S}$ será normal a $C$ em cada ponto da curva.]

**3.** Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial conservativo. Use os Exercícios 1 e 2, junto à discussão na Seção 15.3, para desenvolver o princípio da conservação da energia para movimentos livres e condicionados sob a ação de $\mathbf{F}$.

**4.** Conforme a figura, uma criança de massa $m$ está deslizando (sem atrito) para baixo de um escorregador que forma um ângulo $\theta$ com a horizontal. Se a aceleração devido à gravidade for $g$ e o comprimento do escorregador for $l$, prove que a velocidade da criança ao chegar à base do escorregador será $v = \sqrt{2gl\,\operatorname{sen}\theta}$, supondo que a criança comece a partir do repouso no alto.

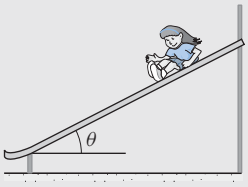
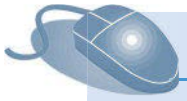



**Figura Ex-4**



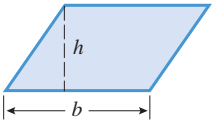
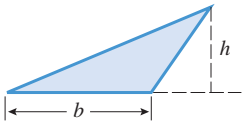
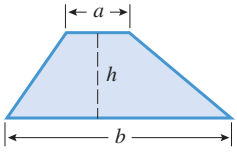
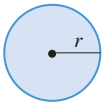
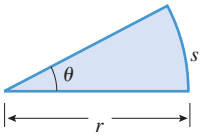
### EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO

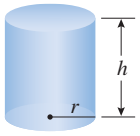
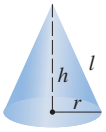
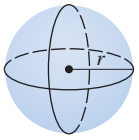
Para aprender como os tópicos deste capítulo podem ser usadas na modelagem do comportamento de furacões, veja o módulo intitulado **Modelando Furacões** em

www.grupoa.com.br

# FÓRMULAS DE GEOMETRIA

$A$ = área, $S$ = área da superfície lateral, $V$ = volume, $h$ = altura, $B$ = área da base, $r$ = raio, $l$ = altura inclinada, $C$ = circunferência, $s$ = comprimento de arco

| Paralelogramo | Triângulo | Trapézio | Círculo | Setor |
|---|---|---|---|---|
|   $A = bh$ |   $A = \frac{1}{2}bh$ |   $A = \frac{1}{2}(a+b)h$ |   $A = \pi r^2,\ C = 2\pi r$ |   $A = \frac{1}{2}r^2\theta,\ s = r\theta$ ($\theta$ em radianos) |

| Cilindro circular reto | Cone circular reto | Cilindro ou prisma com bases paralelas | Esfera |
|---|---|---|---|
|   $V = \pi r^2 h,\ S = 2\pi rh$ |   $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,\ S = \pi rl$ | $V = Bh$ |   $V = \frac{4}{3}\pi r^3,\ S = 4\pi r^2$ |

# FÓRMULAS DE ÁLGEBRA

## A FÓRMULA QUADRÁTICA

As soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## A FÓRMULA BINOMIAL

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

$$(x-y)^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \cdots \pm nxy^{n-1} \mp y^n$$

# TABELA DE INTEGRAIS

## FUNÇÕES BÁSICAS

1. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
3. $\int e^u\,du = e^u + C$
4. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
5. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
6. $\int \operatorname{tg} u\,du = \ln|\sec u| + C$
7. $\int \operatorname{arc\,sen} u\,du = u\operatorname{arc\,sen} u + \sqrt{1-u^2} + C$
8. $\int \operatorname{arc\,cos} u\,du = u\operatorname{arc\,cos} u - \sqrt{1-u^2} + C$
9. $\int \operatorname{arc\,tg} u\,du = u\operatorname{arc\,tg} u - \ln\sqrt{1+u^2} + C$
10. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
11. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$
12. $\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
13. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}u\right)\right| + C$
14. $\int \operatorname{cossec} u\,du = \ln|\operatorname{cossec} u - \operatorname{cotg} u| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}u\right| + C$
15. $\int \operatorname{arc\,cotg} u\,du = u\operatorname{arc\,cotg} u + \ln\sqrt{1+u^2} + C$
16. $\int \operatorname{arc\,sec} u\,du = u\operatorname{arc\,sec} u - \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C$
17. $\int \operatorname{arc\,cossec} u\,du = u\operatorname{arc\,cossec} u + \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C$

## RECÍPROCOS DE FUNÇÕES BÁSICAS

18. $\displaystyle\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{sen} u}\,du = \operatorname{tg} u \mp \sec u + C$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{1 \pm \cos u}\,du = -\operatorname{cotg} u \pm \operatorname{cossec} u + C$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{tg} u}\,du = \tfrac{1}{2}(u \pm \ln|\cos u \pm \operatorname{sen} u|) + C$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} u \cos u}\,du = \ln|\operatorname{tg} u| + C$

22. $\displaystyle\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{cotg} u}\,du = \tfrac{1}{2}(u \mp \ln|\operatorname{sen} u \pm \cos u|) + C$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{1 \pm \sec u}\,du = u + \operatorname{cotg} u \mp \operatorname{cossec} u + C$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{1 \pm \operatorname{cossec} u}\,du = u - \operatorname{tg} u \pm \sec u + C$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{1 \pm e^u}\,du = u - \ln(1 \pm e^u) + C$

## POTÊNCIAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

26. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

27. $\displaystyle\int \cos^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

28. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 u\,du = \operatorname{tg} u - u + C$

29. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

30. $\displaystyle\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

31. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^n u\,du = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u\,du$

32. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u - u + C$

33. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$

34. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$

35. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cotg}^{n-1} u - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u\,du$

36. $\displaystyle\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

37. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cossec}^{n-2} u \operatorname{cotg} u + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cossec}^{n-2} u\,du$

## PRODUTOS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

38. $\displaystyle\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\,du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

39. $\displaystyle\int \cos mu \cos nu\,du = \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

40. $\displaystyle\int \operatorname{sen} mu \cos nu\,du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$

41. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} u \cos^n u\,du$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m u \cos^{n-2} u\,du$$

## PRODUTOS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E EXPONENCIAIS

42. $\displaystyle\int e^{au} \operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C$

43. $\displaystyle\int e^{au} \cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$

## POTÊNCIAS DE *u* MULTIPLICANDO OU DIVIDINDO FUNÇÕES BÁSICAS

44. $\displaystyle\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

45. $\displaystyle\int u \cos u\,du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

46. $\displaystyle\int u^2 \operatorname{sen} u\,du = 2u \operatorname{sen} u + (2 - u^2)\cos u + C$

47. $\displaystyle\int u^2 \cos u\,du = 2u \cos u + (u^2 - 2)\operatorname{sen} u + C$

48. $\displaystyle\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1} \cos u\,du$

49. $\displaystyle\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1} \operatorname{sen} u\,du$

50. $\displaystyle\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

51. $\displaystyle\int ue^u\,du = e^u(u-1) + C$

52. $\displaystyle\int u^n e^u\,du = u^n e^u - n\int u^{n-1} e^u\,du$

53. $\displaystyle\int u^n a^u\,du = \frac{u^n a^u}{\ln a} - \frac{n}{\ln a}\int u^{n-1} a^u\,du + C$

54. $\displaystyle\int \frac{e^u\,du}{u^n} = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{e^u\,du}{u^{n-1}}$

55. $\displaystyle\int \frac{a^u\,du}{u^n} = -\frac{a^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{\ln a}{n-1}\int \frac{a^u\,du}{u^{n-1}}$

56. $\displaystyle\int \frac{du}{u \ln u} = \ln|\ln u| + C$

## POLINÔMIOS MULTIPLICANDO FUNÇÕES BÁSICAS

57. $\displaystyle\int p(u)e^{au}\,du = \frac{1}{a}p(u)e^{au} - \frac{1}{a^2}p'(u)e^{au} + \frac{1}{a^3}p''(u)e^{au} - \cdots$ [sinais alternados: $+ - + - \cdots$]

58. $\displaystyle\int p(u) \operatorname{sen} au\,du = -\frac{1}{a}p(u)\cos au + \frac{1}{a^2}p'(u)\operatorname{sen} au + \frac{1}{a^3}p''(u)\cos au - \cdots$ [sinais alternados em pares depois do primeiro termo: $+ + - - + + - - \cdots$]

59. $\displaystyle\int p(u) \cos au\,du = \frac{1}{a}p(u)\operatorname{sen} au + \frac{1}{a^2}p'(u)\cos au - \frac{1}{a^3}p''(u)\operatorname{sen} au - \cdots$ [sinais alternados em pares: $+ + - - + + - - \cdots$]

## FUNÇÕES RACIONAIS CONTENDO POTÊNCIAS DE $a + bu$ NO DENOMINADOR

60. $\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}[bu - a\ln|a+bu|] + C$

61. $\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bu)^2 - 2a(a+bu) + a^2\ln|a+bu|\right] + C$

62. $\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right] + C$

63. $\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left[bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right] + C$

64. $\int \frac{u\,du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{2(a+bu)^2} - \frac{1}{a+bu}\right] + C$

65. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

66. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

67. $\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

## FUNÇÕES RACIONAIS CONTENDO $a^2 \pm u^2$ NO DENOMINADOR ($a > 0$)

68. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} + C$

69. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

70. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

71. $\int \frac{bu+c}{a^2+u^2}\,du = \frac{b}{2}\ln(a^2+u^2) + \frac{c}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} + C$

## INTEGRAIS DE $\sqrt{a^2+u^2}$, $\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{u^2-a^2}$ E SUAS RECÍPROCAS ($a > 0$)

72. $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

73. $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

74. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$

75. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

76. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

77. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$

## POTÊNCIAS DE $u$ MULTIPLICANDO OU DIVIDINDO $\sqrt{a^2-u^2}$ OU SUA RECÍPROCA

78. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$

79. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}\,du}{u} = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

80. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$

81. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$

82. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

83. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C$

## POTÊNCIAS DE $u$ MULTIPLICANDO OU DIVIDINDO $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ OU SUAS RECÍPROCAS

84. $\int u\sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{3}(u^2+a^2)^{3/2} + C$

85. $\int u\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{3}(u^2-a^2)^{3/2} + C$

86. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C$

87. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

88. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2-a^2} - a\operatorname{arc\,sec}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

89. $\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C$

90. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2\pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{u^2\pm a^2}}{a^2u} + C$

91. $\int u^2\sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2+a^2)\sqrt{u^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

92. $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

93. $\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u} + \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

94. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

95. $\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

96. $\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

## INTEGRAIS CONTENDO $(a^2+u^2)^{3/2}$, $(a^2-u^2)^{3/2}$, $(u^2-a^2)^{3/2}$ ($a > 0$)

97. $\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

98. $\int \frac{du}{(u^2\pm a^2)^{3/2}} = \pm\frac{u}{a^2\sqrt{u^2\pm a^2}} + C$

99. $\int (a^2-u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$

100. $\int (u^2+a^2)^{3/2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2+5a^2)\sqrt{u^2+a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

101. $\int (u^2-a^2)^{3/2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{u^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

## POTÊNCIAS DE $u$ MULTIPLICANDO OU DIVIDINDO $\sqrt{a+bu}$ OU SUA RECÍPROCA

102. $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}+C$

103. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{105b^3}(15b^2u^2-12abu+8a^2)(a+bu)^{3/2}+C$

104. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2u^n(a+bu)^{3/2}}{b(2n+3)} - \frac{2an}{b(2n+3)}\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du$

105. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu}+C$

106. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(3b^2u^2-4abu+8a^2)\sqrt{a+bu}+C$

107. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2an}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

108. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right|+C & (a>0) \\ \dfrac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{a+bu}{-a}}+C & (a<0) \end{cases}$

109. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

110. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

111. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^n} = -\frac{(a+bu)^{3/2}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-5)}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^{n-1}}$

## POTÊNCIAS DE $u$ MULTIPLICANDO OU DIVIDINDO $\sqrt{2au-u^2}$ OU SUA RECÍPROCA

112. $\displaystyle\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u-a}{a}\right)+C$

113. $\displaystyle\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u-a}{a}\right)+C$

114. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au-u^2}\,du}{u} = \sqrt{2au-u^2} + a\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u-a}{a}\right)+C$

115. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au-u^2}\,du}{u^2} = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u-a}{a}\right)+C$

116. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u-a}{a}\right)+C$

117. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au}+C$

118. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u-a}{a}\right)+C$

119. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u-a}{a}\right)+C$

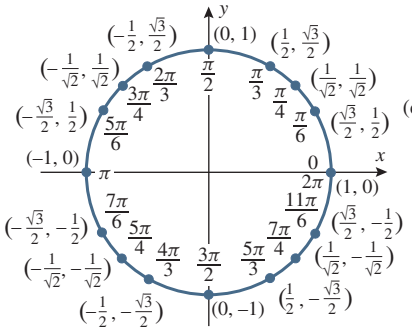
## INTEGRAIS CONTENDO $(2au-u^2)^{3/2}$

120. $\displaystyle\int \frac{du}{(2au-u^2)^{3/2}} = \frac{u-a}{a^2\sqrt{2au-u^2}}+C$

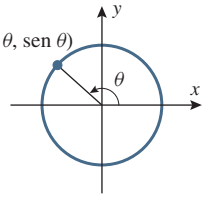
121. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(2au-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a\sqrt{2au-u^2}}+C$

## A FÓRMULA DE WALLIS

122. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n u\,du = \int_0^{\pi/2}\cos^n u\,du = \begin{cases} \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot n}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \left(\begin{array}{l}n\text{ um número}\\ \text{inteiro par e}\\ n\geq 2\end{array}\right) \\ \text{ou} \quad \dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot n} & \left(\begin{array}{l}n\text{ um número}\\ \text{inteiro ímpar e}\\ n\geq 3\end{array}\right) \end{cases}$




# REVISÃO DE TRIGONOMETRIA




## IDENTIDADES DE PITÁGORAS

$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$ $\quad$ $\operatorname{tg}^2\theta+1=\sec^2\theta$ $\quad$ $1+\operatorname{cotg}^2\theta=\operatorname{cossec}^2\theta$

## IDENTIDADES DE SINAL

$\operatorname{sen}(-\theta)=-\operatorname{sen}\theta$ $\quad$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\quad$ $\operatorname{tg}(-\theta)=-\operatorname{tg}\theta$

$\operatorname{cossec}(-\theta)=-\operatorname{cossec}\theta$ $\quad$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(-\theta)=-\operatorname{cotg}\theta$

## IDENTIDADES COMPLEMENTARES

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{sen}\theta$ $\quad$ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cotg}\theta$

$\operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$ $\quad$ $\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cossec}\theta$ $\quad$ $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{tg}\theta$

## IDENTIDADES SUPLEMENTARES

$\operatorname{sen}(\pi-\theta)=\operatorname{sen}\theta$ $\quad$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\quad$ $\operatorname{tg}(\pi-\theta)=-\operatorname{tg}\theta$

$\operatorname{cossec}(\pi-\theta)=\operatorname{cossec}\theta$ $\quad$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(\pi-\theta)=-\operatorname{cotg}\theta$

$\operatorname{sen}(\pi+\theta)=-\operatorname{sen}\theta$ $\quad$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\quad$ $\operatorname{tg}(\pi+\theta)=\operatorname{tg}\theta$

$\operatorname{cossec}(\pi+\theta)=-\operatorname{cossec}\theta$ $\quad$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(\pi+\theta)=\operatorname{cotg}\theta$

## FÓRMULAS DE ADIÇÃO

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

## FÓRMULAS DO ÂNGULO DUPLO

$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ $\quad$ $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$ $\quad$ $\cos2\alpha=1-2\operatorname{sen}^2\alpha$

## FÓRMULAS DO ÂNGULO METADE

$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ $\quad$ $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

# D

# PROVAS SELECIONADAS

## DEMONSTRAÇÕES DE TEOREMAS BÁSICOS DE LIMITE

Uma excursão extensiva nas demonstrações dos teoremas sobre limites consumiria muito tempo; assim, selecionamos algumas demonstrações de resultados da Seção 1.2, no Volume 1, que ilustram algumas das ideias básicas.

**D.1 TEOREMA** *Sejam $a$ um número real qualquer e $k$ uma constante, e vamos supor que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e que $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$. Então*

(a) $\lim_{x \to a} k = k$

(b) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$

(c) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = L_1 L_2$

**DEMONSTRAÇÃO (*a*)** Vamos aplicar a Definição 1.4.1, no Volume 1, com $f(x) = k$ e $L = k$. Assim, dado $\epsilon > 0$, precisamos encontrar um número $\delta > 0$ tal que

$$|k - k| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

ou, equivalentemente,

$$0 < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Contudo, a condição do lado esquerdo dessa afirmativa é *sempre* verdadeira, não importando como $\delta$ é escolhido. Assim, qualquer valor positivo de $\delta$ irá servir.

**DEMONSTRAÇÃO (*b*)** Precisamos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um número $\delta > 0$ tal que

$$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \tag{1}$$

Porém, dos limites de $f$ e $g$ na hipótese do teorema, podemos encontrar números $\delta_1$ e $\delta_2$ tais que

$$|f(x) - L_1| < \epsilon/2 \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

$$|g(x) - L_2| < \epsilon/2 \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Além disso, *ambas* as desigualdades do lado esquerdo dessas afirmativas são válidas se substituirmos $\delta_1$ e $\delta_2$ por qualquer número positivo $\delta$ que seja menor do que $\delta_1$ e $\delta_2$. Assim, para qualquer desses $\delta$ temos

$$|f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \tag{2}$$

Porém, da desigualdade triangular [Teorema 5 do Apêndice F na Internet] decorre

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x))-(L_1+L_2)| &= |(f(x)-L_1)+(g(x)-L_2)| \\ &\le |f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|\end{aligned}$$

Assim, (1) segue de (2).

**DEMONSTRAÇÃO (*c*)** Precisamos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um $\delta > 0$ positivo tal que

$$|f(x)g(x)-L_1L_2| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x-a| < \delta \tag{3}$$

Para encontrar $\delta$, é conveniente expressar (3) de uma forma diferente. Reescrevendo $f(x)$ e $g(x)$ como

$$f(x) = L_1 + (f(x)-L_1) \quad \text{e} \quad g(x) = L_2 + (g(x)-L_2)$$

então a desigualdade no lado esquerdo de (3) pode ser escrita como (verifique)

$$|L_1(g(x)-L_2) + L_2(f(x)-L_1) + (f(x)-L_1)(g(x)-L_2)| < \epsilon \tag{4}$$

Como

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

podemos encontrar números positivos $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ e $\delta_4$ tais que

$$\begin{aligned}
&|f(x)-L_1| < \sqrt{\epsilon/3} && \text{se} \quad 0<|x-a|<\delta_1 \\
&|f(x)-L_1| < \frac{\epsilon}{3(1+|L_2|)} && \text{se} \quad 0<|x-a|<\delta_2 \\
&|g(x)-L_2| < \sqrt{\epsilon/3} && \text{se} \quad 0<|x-a|<\delta_3 \\
&|g(x)-L_2| < \frac{\epsilon}{3(1+|L_1|)} && \text{se} \quad 0<|x-a|<\delta_4
\end{aligned} \tag{5}$$

Além disso, as desigualdades à esquerda das quatro afirmativas serão *todas* válidas se substituirmos $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ e $\delta_4$ por qualquer número $\delta$ menor do que eles. Assim, para qualquer um desses $\delta$, pela desigualdade triangular segue

$$\begin{aligned}
&|L_1(g(x)-L_2) + L_2(f(x)-L_1) + (f(x)-L_1)(g(x)-L_2)| \\
&\quad \le |L_1(g(x)-L_2)| + |L_2(f(x)-L_1)| + |(f(x)-L_1)(g(x)-L_2)| \\
&\quad = |L_1||g(x)-L_2| + |L_2||f(x)-L_1| + |f(x)-L_1||g(x)-L_2| \\
&\quad < |L_1|\frac{\epsilon}{3(1+|L_1|)} + |L_2|\frac{\epsilon}{3(1+|L_2|)} + \sqrt{\epsilon/3}\sqrt{\epsilon/3} \qquad \boxed{\text{De (5)}} \\
&\quad = \frac{\epsilon}{3}\frac{|L_1|}{1+|L_1|} + \frac{\epsilon}{3}\frac{|L_2|}{1+|L_2|} + \frac{\epsilon}{3} \\
&\quad < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon \qquad \boxed{\text{Pois } \frac{|L_1|}{1+|L_1|} < 1 \text{ e } \frac{|L_2|}{1+|L_2|} < 1}
\end{aligned}$$

mostrando que (4) é válida para o $\delta$ selecionado. ■

Não fique alarmado se a demonstração da parte (c) parecer difícil; é necessária alguma experiência com demonstrações desse tipo para desenvolver uma intuição na escolha do $\delta$ correto. Seu objetivo inicial deve ser entender as ideias e os cálculos.

## ■ DEMONSTRAÇÃO DE UMA PROPRIEDADE BÁSICA DE CONTINUIDADE

A seguir, vamos demonstrar o Teorema 1.5.5, no Volume 1, para limites bilaterais.

**D.2 TEOREMA** (***Teorema 1.5.5***) *Se* $\lim_{x\to c} g(x) = L$ *e se a função* $f$ *for contínua em* $L$, *então* $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$, *isto é,*

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

**DEMONSTRAÇÃO** Precisamos mostrar que, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon \quad \text{se} \quad 0 < |x - c| < \delta \tag{6}$$

Uma vez que $f$ é contínua em $L$, temos

$$\lim_{u \to L} f(u) = f(L)$$

e, portanto, podemos encontrar um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(u) - f(L)| < \epsilon \quad \text{se} \quad |u - L| < \delta_1$$

Em particular, se $u = g(x)$, então

$$|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon \quad \text{se} \quad |g(x) - L| < \delta_1 \tag{7}$$

No entanto, $\lim_{x \to c} g(x) = L$ e, portanto, existe um número $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - L| < \delta_1 \quad \text{se} \quad 0 < |x - c| < \delta \tag{8}$$

Assim, se $x$ satisfizer a condição à direita de (8), segue que $g(x)$ irá satisfazer a condição à direita de (7), e isso implica que a condição à esquerda de (6) está satisfeita, completando a demonstração. ■

## DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DA CADEIA

A seguir, vamos demonstrar a regra da cadeia (Teorema 2.6.1, no Volume 1), mas primeiro precisamos de um resultado preliminar.

**D.3 TEOREMA** *Se $f$ for diferenciável em $x$ e se $y = f(x)$, então*

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

*onde $\epsilon \to 0$ quando $\Delta x \to 0$ e $\epsilon = 0$ se $\Delta x = 0$.*

**DEMONSTRAÇÃO** Vamos definir

$$\epsilon = \begin{cases} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) & \text{se } \Delta x \neq 0 \\ 0 & \text{se } \Delta x = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Se $\Delta x \neq 0$, segue de (9) que

$$\epsilon \Delta x = [f(x + \Delta x) - f(x)] - f'(x)\Delta x \tag{10}$$

No entanto,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{11}$$

logo, (10) pode ser escrito como

$$\epsilon \Delta x = \Delta y - f'(x)\Delta x$$

ou

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x \tag{12}$$

Se $\Delta x = 0$, então (12) ainda é válida (por quê?), logo (12) é válida para todos os valores de $\Delta x$. Resta mostrar que $\epsilon \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Contudo, isso segue a partir da hipótese de que $f$ é diferenciável em $x$, já que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right] = f'(x) - f'(x) = 0 \ ■$$

Estamos prontos para demonstrar a regra da cadeia.

**D.4 TEOREMA** (***Teorema 2.6.1***) *Se $g$ for diferenciável no ponto $x$ e $f$ for diferenciável no ponto $g(x)$, então a composição $f \circ g$ será diferenciável no ponto $x$. Além disso, se $y = f(g(x))$ e $u = g(x)$, então*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

**DEMONSTRAÇÃO** Uma vez que $g$ é diferenciável em $x$ e $u = g(x)$, segue do Teorema D.3 que

$$\Delta u = g'(x)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x \tag{13}$$

onde $\epsilon_1 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. E como $y = f(u)$ é diferenciável em $u = g(x)$, segue do Teorema D.3 que

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u \tag{14}$$

onde $\epsilon_2 \to 0$ se $\Delta u \to 0$.

Fatorando $\Delta u$ em (14) e, então, substituindo (13) resulta

$$\Delta y = [f'(u) + \epsilon_2][g'(x)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x]$$

ou

$$\Delta y = [f'(u) + \epsilon_2][g'(x) + \epsilon_1]\Delta x$$

ou se $\Delta x \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(u) + \epsilon_2][g'(x) + \epsilon_1] \tag{15}$$

No entanto, (13) implica que $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$ e, portanto, $\epsilon_1 \to 0$ e $\epsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Assim, de (15)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \blacksquare$$

## DEMONSTRAÇÃO DE QUE EXTREMOS RELATIVOS OCORREM EM PONTOS CRÍTICOS

Nesta subseção, demonstraremos o Teorema 4.2.2, no Volume 1, que estabelece que os extremos relativos de uma função ocorrem em pontos críticos.

**D.5 TEOREMA** (***Teorema 4.2.2***) *Suponha que $f$ seja uma função definida em um intervalo aberto contendo o ponto $x_0$. Se $f$ tiver um extremo relativo em $x = x_0$, então $x = x_0$ será um ponto crítico de $f$; assim, ou $f'(x_0) = 0$ ou $f$ não é diferenciável em $x_0$.*

**DEMONSTRAÇÃO** Suponha que $f$ tenha um máximo relativo em $x_0$. Há duas possibilidades – ou $f$ é diferenciável no ponto $x_0$ ou não é. Se não for, então $x_0$ é um ponto crítico de $f$ e não há nada a demonstrar. Se $f$ for diferenciável em $x_0$, então precisamos mostrar que $f'(x_0) = 0$. Vamos fazer isso mostrando que $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$, do que segue $f'(x_0) = 0$. A partir da definição de derivada, temos

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e, portanto,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{16}$$

e

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{17}$$

Como $f$ tem um máximo relativo em $x_0$, existe um intervalo aberto $(a, b)$ contendo $x_0$ no qual $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x$ em $(a, b)$.

Suponha que $h$ seja suficientemente pequeno de tal forma que $x_0 + h$ esteja no intervalo $(a, b)$. Segue que

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$$

Assim, se $h$ for negativo,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \tag{18}$$

e se $h$ for positivo,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \tag{19}$$

Porém, uma expressão que nunca assume valores negativos não pode ter um limite negativo, e uma expressão que nunca assume valores positivos não pode ter um limite positivo, de modo que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \qquad \boxed{\text{De (17) e (18)}}$$

e

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad \boxed{\text{De (16) e (19)}}$$

Como $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$, segue que $f'(x_0) = 0$.

Um argumento análogo é aplicável quando $f$ tem um mínimo relativo em $x_0$. ■

## ■ DEMONSTRAÇÕES DE DUAS FÓRMULAS DE SOMATÓRIOS

Demonstraremos as partes $(a)$ e $(b)$ do Teorema 5.4.2. A demonstração da parte $(c)$ é análoga à da parte $(b)$ e será, por isso, omitida.

**D.6 TEOREMA** ***(Teorema 5.4.2)***

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(b) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(c) \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

**DEMONSTRAÇÃO** $(a)$ Escrevendo

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

de duas maneiras, primeiro com as parcelas em ordem crescente e depois com as parcelas em ordem decrescente e, em seguida, somando, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
\sum_{k=1}^{n} k &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \\
\hline
2\sum_{k=1}^{n} k &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1) \\
&= n(n+1)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

**DEMONSTRAÇÃO (*b*)** Observe que

$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Portanto

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1) \tag{20}$$

A soma em (21) é um exemplo de uma ***soma telescópica***, pois os cancelamentos de cada uma das duas partes de uma parcela interna com partes das parcelas vizinhas permite que a soma toda colapse como um telescópio retrátil.

Escrevendo o lado esquerdo de (20) com os índices em ordem *decrescente* de $k = n$ até $k = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] &= [(n+1)^3 - n^3] + \cdots + [4^3 - 3^3] + [3^3 - 2^3] + [2^3 - 1^3] \\
&= (n+1)^3 - 1
\end{aligned} \tag{21}$$

Combinando (21) com (20) e expandindo o lado direito de (2) usando o Teorema 5.4.1 e a parte (*a*) que acabamos de demonstrar, obtemos

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - 1 &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= [(n+1)^3 - 1] - 3\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= (n+1)^3 - 3(n+1)\left(\frac{n}{2}\right) - (n+1) \\
&= \frac{n+1}{2}[2(n+1)^2 - 3n - 2] \\
&= \frac{n+1}{2}[2n^2 + n] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \blacksquare$$

## DEMONSTRAÇÃO DO TESTE DA COMPARAÇÃO NO LIMITE

**D.7 TEOREMA** ***(Teorema 9.5.4)*** *Sejam $\sum a_k$ e $\sum b_k$ séries de termos positivos e suponha que*

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

*Se $\rho$ for finito e $\rho > 0$, então ambas as séries convergem ou divergem.*

**DEMONSTRAÇÃO** Precisamos apenas mostrar que $\sum b_k$ converge quando $\sum a_k$ converge e que $\sum b_k$ diverge quando $\sum a_k$ diverge, uma vez que os casos restantes são implicações lógicas destes (por quê?). A ideia da demonstração é aplicar o teste da comparação para $\sum a_k$ e múltiplos adequados de $\sum b_k$. Para isso, seja $\epsilon$ um número positivo qualquer. Como

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

segue que os termos na sequência $\{a_k/b_k\}$ devem estar, a partir de um certo termo, a menos de $\epsilon$ unidades de $\rho$; ou seja, há um número positivo $K$ tal que para $k \geq K$ temos

$$\rho - \epsilon < \frac{a_k}{b_k} < \rho + \epsilon$$

Em particular, se tomarmos qualquer $\epsilon = \rho/2$, então para $k \geq K$ temos

$$\frac{1}{2}\rho < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3}{2}\rho \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\rho b_k < a_k < \frac{3}{2}\rho b_k$$

Assim, pelo teste da comparação, podemos concluir que

$$\sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{2}\rho b_k \quad \text{converge se} \quad \sum_{k=K}^{\infty} a_k \quad \text{converge} \tag{22}$$

$$\sum_{k=K}^{\infty} \frac{3}{2}\rho b_k \quad \text{diverge se} \quad \sum_{k=K}^{\infty} a_k \quad \text{diverge} \tag{23}$$

No entanto, a convergência e a divergência de uma série não é afetada retirando-se finitos termos ou multiplicando o termo geral por uma constante não nula, de modo que (22) e (23) implicam que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{converge se} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{converge se} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{diverge} \quad \blacksquare$$

## DEMONSTRAÇÃO DO TESTE DA RAZÃO

**D.8 TEOREMA** **(*Teorema 9.5.5*)** *Seja $\sum u_k$ uma série com termos positivos e suponha que*

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

*(a) Se $\rho < 1$, a série converge.*

*(b) Se $\rho > 1$ ou $\rho = +\infty$, a série diverge.*

*(c) Se $\rho = 1$, a série pode convergir ou divergir, de modo que deve ser tentado outro teste.*

**DEMONSTRAÇÃO *(a)*** O número $\rho$ deve ser não negativo, uma vez que é o limite de $u_{k+1}/u_k$, que é positivo para todo $k$. Nessa parte da demonstração, vamos supor que $\rho < 1$, de modo que $0 \leq \rho < 1$.

Demonstraremos a convergência mostrando que os termos da série dada são, a partir de um certo termo, menores do que os termos de uma série geométrica convergente. Para isso, vamos escolher qualquer número real $r$ tal que $0 < \rho < r < 1$. Como o limite de $u_{k+1}/u_k$ é $\rho$, e $\rho < r$, os termos da sequência $\{u_{k+1}/u_k\}$ devem ser, a partir de um certo termo, menores do que $r$. Assim, existe um inteiro positivo $K$ tal que para $k \geq K$ temos

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < r \quad \text{ou} \quad u_{k+1} < ru_k$$

Disso resultam as desigualdades

$$\begin{aligned} u_{K+1} &< ru_K \\ u_{K+2} &< ru_{K+1} < r^2u_K \\ u_{K+3} &< ru_{K+2} < r^3u_K \\ u_{K+4} &< ru_{K+3} < r^4u_K \\ &\vdots \end{aligned} \tag{24}$$

Contudo, $0 < r < 1$, portanto

$$ru_K + r^2u_K + r^3u_K + \cdots$$

é uma série geométrica convergente. A partir das desigualdades em (24) e do teste da comparação segue que

$$u_{K+1} + u_{K+2} + u_{K+3} + \cdots$$

deve também ser uma série convergente. Assim, $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_K + \cdots$ converge pelo Teorema 9.4.3($c$).

**DEMONSTRAÇÃO ($b$)** Nesta parte, demonstraremos a divergência mostrando que o limite do termo geral não é zero. Uma vez que o limite de $u_{k+1}/u_k$ é $\rho$ e $\rho > 1$, os termos na sequência $\{u_{k+1}/u_k\}$ devem ser, a partir de um certo termo, maiores do que 1. Assim, existe um inteiro positivo $K$ tal que para $k \geq K$ temos

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \quad \text{ou} \quad u_{k+1} > u_k$$

Disso resultam as desigualdades

$$\begin{aligned} u_{K+1} &> u_K \\ u_{K+2} &> u_{K+1} > u_K \\ u_{K+3} &> u_{K+2} > u_K \\ u_{K+4} &> u_{K+3} > u_K \\ &\vdots \end{aligned} \tag{25}$$

Como $u_K > 0$, segue das desigualdades em (25) que $\lim_{k \to +\infty} u_k \neq 0$ e, assim, a série $u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots$ diverge pela parte ($a$) do Teorema 9.4.1. A demonstração no caso em que $\rho = +\infty$ é omitida.

**DEMONSTRAÇÃO ($c$)** A série harmônica divergente e a série $p$ convergente com $p = 2$, ambas, têm $\rho = 1$(verifique); assim, o teste da razão, quando $\rho = 1$, não distingue entre convergência e divergência. ■

## ■ DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA ESTIMATIVA DO RESTO

**D.9 TEOREMA (*Teorema 9.7.4*)** *Se a função $f$ puder ser diferenciada $n + 1$ vezes em um intervalo contendo o ponto $x_0$ e se $M$ for uma cota superior para $|f^{(n+1)}(x)|$ no intervalo, isto é, se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ em qualquer $x$ do intervalo, então*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

*com qualquer $x$ do intervalo.*

**DEMONSTRAÇÃO** Estamos supondo que $f$ possa ser diferenciada $n + 1$ vezes em um intervalo contendo o ponto $x_0$ e que

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \tag{26}$$

em qualquer $x$ do intervalo. Queremos mostrar que

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \tag{27}$$

em qualquer $x$ do intervalo, onde

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{28}$$

Em nossa demonstração, iremos precisar das duas seguintes propriedades de $R_n(x)$:

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0 \tag{29}$$

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \quad \text{em qualquer } x \text{ do intervalo} \tag{30}$$

Essas propriedades podem ser obtidas analisando o que acontece se a expressão para $R_n(x)$ na Fórmula (28) for diferenciada $j$ vezes e, então, $x_0$ for substituído na derivada. Se $j$ for menor do que $n$, a $j$-ésima derivada da soma na Fórmula (28) consiste em um termo constante $f^{(j)}(x_0)$ mais termos envolvendo potências de $x - x_0$ (verifique). Assim, $R_n^{(j)}(x_0) = 0$ com $j < n$, o que demonstra tudo menos a última equação em (29). Para a última equação, observe que a enésima derivada da soma em (28) é a constante $f^{(n)}(x_0)$, portanto $R_n^{(n)}(x_0) = 0$. A Fórmula (30) segue da observação de que a $(n + 1)$-ésima derivada da soma em (28) é zero (por quê?).

Vamos, agora, para a parte principal da demonstração. Para simplificar, daremos a demonstração no caso $x \geq x_0$ e deixamos para o leitor o caso $x < x_0$. Tem-se, a partir de (26) e (30), que $|R_n^{(n+1)}(x)| \leq M$ e, portanto,

$$-M \leq R_n^{(n+1)}(x) \leq M$$

Assim,

$$\int_{x_0}^{x} -M\,dt \leq \int_{x_0}^{x} R_n^{(n+1)}(t)\,dt \leq \int_{x_0}^{x} M\,dt \tag{31}$$

Porém, de (29) segue que $R_n^{(n)}(x_0) = 0$, portanto

$$\int_{x_0}^{x} R_n^{(n+1)}(t)\,dt = R_n^{(n)}(t)\Big]_{x_0}^{x} = R_n^{(n)}(x)$$

Assim, efetuando as integrações em (31), obtemos as desigualdades

$$-M(x - x_0) \leq R_n^{(n)}(x) \leq M(x - x_0)$$

Agora, vamos integrar novamente. Substituindo $x$ por $t$ nessas desigualdades, integrando de $x_0$ até $x$ e usando $R_n^{(n-1)}(x_0) = 0$, obtemos

$$-\frac{M}{2}(x - x_0)^2 \leq R_n^{(n-1)}(x) \leq \frac{M}{2}(x - x_0)^2$$

Se continuarmos repetindo esse processo, depois de $n + 1$ integrações iremos obter

$$-\frac{M}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \leq R_n(x) \leq \frac{M}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

o que pode ser reescrito como

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Isso completa a prova de (27), uma vez que os sinais de valor absoluto podem ser omitidos naquela fórmula quando $x \geq x_0$ (que é o caso sob consideração). ■

## ■ DEMONSTRAÇÃO DA IGUALDADE DE PARCIAIS MISTAS

**D.10 TEOREMA** (***Teorema 13.3.2***) *Seja f uma função de duas variáveis. Se $f_{xy}$ e $f_{yx}$ forem contínuas em algum disco aberto, então $f_{xy} = f_{yx}$ nesse disco.*

**DEMONSTRAÇÃO** Suponha que $f$ seja uma função de duas variáveis tal que $f_{xy}$ e $f_{yx}$ sejam contínuas em algum disco aberto. Seja $(x, y)$ um ponto desse disco e defina a função

$$w(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)$$

Fixemos, agora, $y$ e $\Delta y$ e seja

$$g(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

de modo que

$$w(\Delta x, \Delta y) = g(x + \Delta x) - g(x) \tag{32}$$

Como $f$ é diferenciável em um disco aberto contendo $(x, y)$, a função $g$ é derivável em algum intervalo contendo $x$ e $x + \Delta x$, com $\Delta x$ suficientemente pequeno. Então, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio a $g$ nesse intervalo e, portanto, obter algum $c$ entre $x$ e $x + \Delta$x tal que

$$g(x + \Delta x) - g(x) = g'(c)\Delta x$$

No entanto,

$$g'(c) = f_x(c, y + \Delta y) - f_x(c, y)$$

portanto, pela equação (32),

$$w(\Delta x, \Delta y) = g(x + \Delta x) - g(x) = g'(c)\Delta x = (f_x(c, y + \Delta y) - f_x(c, y))\Delta x \tag{33}$$

Seja, agora, $h(y) = f_x(c, y)$. Como $f_x$ é diferenciável em um disco aberto contendo $(x, y)$, a função $h$ é derivável em algum intervalo contendo $y$ e $y + \Delta y$, com $\Delta y$ suficientemente pequeno. Aplicando o Teorema do Valor Médio a $h$ nesse intervalo, obtemos algum $d$ entre $y$ e $y + \Delta y$ tal que

$$h(y + \Delta y) - h(y) = h'(d)\Delta y$$

No entanto, $h'(d) = f_{xy}(c, d)$, de modo que, por (33) e a definição de $h$, obtemos

$$\begin{aligned} w(\Delta x, \Delta y) &= (f_x(c, y + \Delta y) - f_x(c, y))\Delta x \\ &= (h(y + \Delta y) - h(y))\Delta x = h'(d)\Delta y \Delta x \\ &= f_{xy}(c, d)\Delta y \Delta x \end{aligned}$$

e

$$f_{xy}(c, d) = \frac{w(\Delta x, \Delta y)}{\Delta y \Delta x} \tag{34}$$

Como $c$ está entre $x$ e $x + \Delta x$ e $d$ está entre $y$ e $y + \Delta y$, vemos que $(c, d)$ tende a $(x, y)$ quando $(x, y)$ tende a $(0, 0)$. Assim, segue da continuidade de $f_{xy}$ e (34) que

$$f_{xy}(x, y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_{xy}(c, d) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{w(\Delta x, \Delta y)}{\Delta y \Delta x}$$

De maneira análoga, pode ser demonstrado que

$$f_{yx}(x, y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{w(\Delta x, \Delta y)}{\Delta y \Delta x}$$

e, portanto, segue o resultado. ■

## DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DA CADEIA PARA DUAS VARIÁVEIS

**D.11 TEOREMA** ***(Teorema 13.5.1)*** *Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem diferenciáveis em $t$ e se $z = f(x, y)$ for diferenciável no ponto $(x(t), y(t))$, então $z = f(x(t), y(t))$ será diferenciável em $t$ e*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

**DEMONSTRAÇÃO** Sejam $\Delta x$, $\Delta y$ e $\Delta z$ as variações em $x$, $y$ e $z$, respectivamente, que correspondem a variações de $\Delta t$ em $t$. Então

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Como $f(x, y)$ é diferenciável em $(x(t), y(t))$, segue de (5) na Seção 13.4 que

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{35}$$

onde as derivadas parciais estão calculadas em $(x(t), y(t))$ e onde $\epsilon(\Delta x, \Delta y)$ satisfaz $\epsilon(\Delta x, \Delta y) \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ e $\epsilon(0, 0) = 0$. Dividindo ambos os lados de (32) por $\Delta t$, obtemos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\epsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} \tag{36}$$

Como

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{|\Delta t|} = \lim_{\Delta t \to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

resulta

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\epsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\epsilon(\Delta x, \Delta y)|\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{|\Delta t|}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}|\epsilon(\Delta x, \Delta y)| \cdot \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{|\Delta t|}$$

$$= 0 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 0$$

Assim,

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\epsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} = 0$$

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$ de ambos os lados de (36), obtemos a equação

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$ ■

Esta página foi deixada em branco intencionalmente.

# RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

## ► Exercícios 8.1 (página 566)

**3.** **(a)** primeira ordem **(b)** segunda ordem

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**5.** Falsa; aparecem somente derivadas de primeira ordem.

**7.** Verdadeira; é de terceira ordem.

**15.** $y(x) = e^{-2x} - 2e^{x}$ **17.** $y(x) = 2e^{2x} - 2xe^{2x}$

**19.** $y(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$ **21.** $y(x) = -2x^2 + 2x + 3$

**23.** $y(x) = 2/(3 - 2x)$ **25.** $y(x) = 2/x^2$

**27.** **(a)** $\dfrac{dy}{dt} = ky^2,\ y(0) = y_0\ (k > 0)$

**(b)** $\dfrac{dy}{dt} = -ky^2,\ y(0) = y_0\ (k > 0)$

**29.** **(a)** $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{2}s$ **(b)** $\dfrac{d^2s}{dt^2} = 2\dfrac{ds}{dt}$ **33.** **(b)** $L/2$

## ► Exercícios 8.2 (página 575)

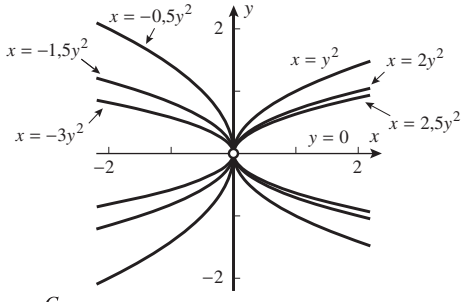
**1.** $y = Cx$ **3.** $y = Ce^{-\sqrt{1+x^2}} - 1,\ C \neq 0$

**5.** $2 \ln |y| + y^2 = e^{x} + C$ **7.** $y = \ln(\sec x + C)$

**9.** $y = \dfrac{1}{1 - C(\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x)},\ y = 0$

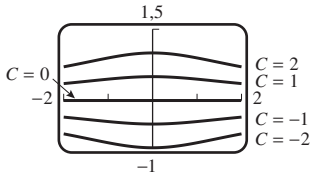
**11.** $y^2 + \operatorname{sen} y = x^3 + \pi^2$ **13.** $y^2 - 2y = t^2 + t + 3$

**15.** **(a)**

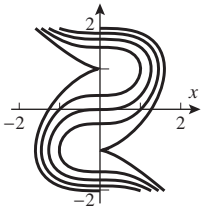



**(b)** $y^2 = x/2$

**17.** $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2 + 4}}$




**19.** $x^3 + y^3 - 3y = C$




As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**21.** Verdadeira; pois $\dfrac{1}{f(y)}\,dy = dx$. **23.** Verdadeira; pois $\left(\frac{1}{2}\right)^5 32 = 1$.

**27.** $y = \ln\left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right)$

**29.** **(a)** $y'(t) = y(t)/50,\ y(0) = 10.000$ **(b)** $y(t) = 10.000e^{t/50}$

**(c)** $50 \ln 2 \approx 34{,}66$ h **(d)** $50 \ln(4{,}5) \approx 75{,}20$ h

**31.** (a) $\dfrac{dy}{dt} = -ky,\ k \approx 0{,}1810$ **(b)** $y = 5{,}0 \times 10^7 e^{-0{,}181t}$

**(c)** $\approx 219.000$ átomos **(d)** 12,72 dias

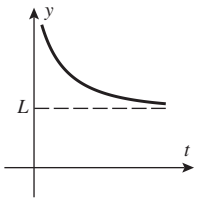
**33.** $50 \ln(100) \approx 230{,}26$ dias **35.** 3,30 dias

**39.** **(b)** 70 anos **(c)** 20 anos **(d)** 7%

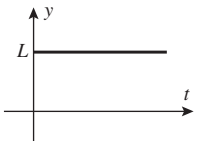
**43.** **(a)** não **(b)** mesmo, $r\%$ **45.** **(b)** $\ln(2)/\ln(5/4) \approx 3{,}106$ h

**47.** **(a)** \$1491,82 **(b)** \$4493,29 **(c)** 8,7 anos

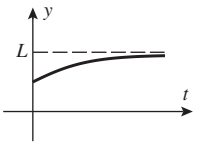
**51.** **(a)**



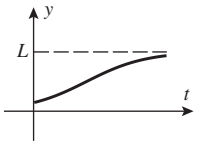

**(b)**




**(c)**




**(d)**




**53.** $y_0 \approx 2,\ L \approx 8,\ k \approx 0{,}5493$

**55.** **(a)** $y_0 = 5$ **(b)** $L = 12$ **(c)** $k = 1$ **(d)** $t = 0{,}3365$

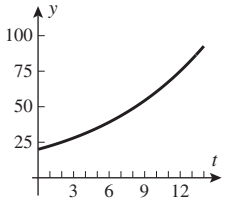
**(e)** $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{12}y(12 - y),\ y(0) = 5$

**57.** **(a)** $y = \dfrac{1000}{1 + 49e^{-0{,}115t}}$

**(b)**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y(t)$ | 20 | 22 | 25 | 28 | 31 | 35 | 39 | 44 |
| $t$ | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | |
| $y(t)$ | 49 | 54 | 61 | 67 | 75 | 83 | 93 | |

**(c)**




**59.** **(a)** $T = 21 + 74e^{-kt}$ **(b)** 6,22 min

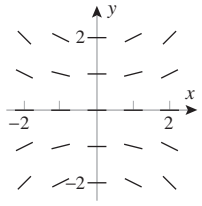
**61.** **(a)** $v = c \ln \dfrac{m_0}{m_0 - kt} - gt$ **(b)** 3.044 m/s

**63.** **(a)** $h \approx (2 - 0{,}003979t)^2$ **(b)** 8,4 min

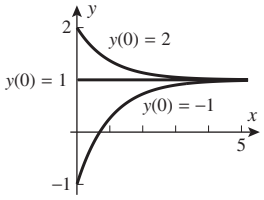
**65.** **(a)** $v = 128/(4t + 1),\ x = 32 \ln(4t + 1)$

## ► Exercícios 8.3 (página 584)

**1.**



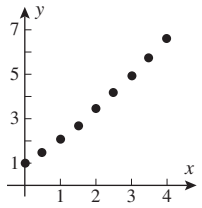

**3.**




**5.** $y \to 1$ quando $x \to +\infty$

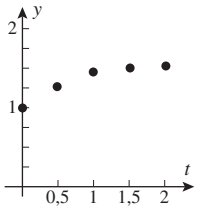
**7.**

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| $y_n$ | 1,00 | 1,50 | 2,07 | 2,71 | 3,41 | 4,16 | 4,96 | 5,82 | 6,72 |




**9.**

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_n$ | 0,00 | 0,50 | 1,00 | 1,50 | 2,00 |
| $y_n$ | 1,00 | 1,27 | 1,42 | 1,49 | 1,53 |




**11.** 0,62

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**13.** Verdadeira; a derivada é positiva.

**15.** Verdadeira; $y = y_0$ é uma solução se $y_0$ for uma raiz de $p$.

**17.** **(b)** $y(1/2) = \sqrt{3}/2$ **19.** **(b)** O corte com o eixo $x$ é ln 2.

**23.** **(a)** $y' = \dfrac{2xy - y^3}{3xy^2 - x^2}$ **(c)** $xy^3 - x^2y = 2$

**25.** **(b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e$

## ► Exercícios 8.4 (página 592)

**1.** $y = e^{-3x} + Ce^{-4x}$ **3.** $y = e^{-x}\,\text{sen}(e^x) + Ce^{-x}$ **5.** $y = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}}$

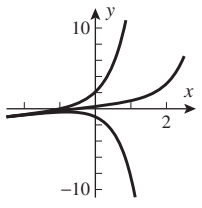
**7.** $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2x}$ **9.** $y = 4e^{x^2} - 1$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**11.** Falsa; $y = x^2$ é uma solução de $dy/dx = 2x$, mas $y + y = 2x^2$ não é.

**13.** Verdadeira; tenderá à concentração da substância no fluido que entra.

**15.**




**17.** $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 \geq 1/4 \\ -\infty, & \text{se } y_0 < 1/4 \end{cases}$

**19.** **(a)**

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
| $y_n$ | 1 | 1,20 | 1,48 | 1,86 | 2,35 | 2,98 |

**(b)** $y = -(x+1) + 2ex$

| $x_n$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y(x_n)$ | 1 | 1,24 | 1,58 | 2,04 | 2,65 | 3,44 |
| erro absoluto | 0 | 0,04 | 0,10 | 0,19 | 0,30 | 0,46 |
| erro percentual | 0 | 3 | 6 | 9 | 11 | 13 |

**21.** **(a)** $200 - 175e^{-t/25}$ g **(b)** 136 g **23.** 25 lb

**27.** **(a)** $I(t) = 2 - 2e^{-2t}$ A **(b)** $I(t) \to 2$

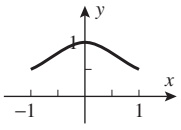
## ► Capítulo 8 Exercícios de Revisão (página 594)

**1.** **(a)** linear **(b)** ambos **(c)** separável **(d)** nenhum

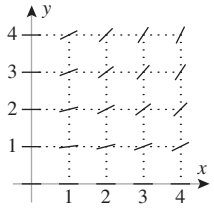
**3.** $y = \text{tg}(x^3/3 + C)$ **5.** $\ln|y| + y^2/2 = e^x + C$ e $y = 0$

**7.** $y^{-4} + 4\ln(x/y) = 1$

**9.**

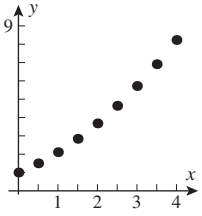



**11.**




**13.**

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| $y_n$ | 1 | 1,50 | 2,11 | 2,84 | 3,68 | 4,64 | 5,72 | 6,91 | 8,23 |




**15.** $y(1) \approx 1{,}00$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_n$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
| $y_n$ | 1,00 | 1,20 | 1,26 | 1,10 | 0,94 | 1,00 |

**17.** **(a)** $y \approx 2e^{0{,}1386t}$ **(b)** $y = 5e^{0{,}015t}$ **(c)** $y \approx 0{,}5995e^{0{,}5117t}$
**(d)** $y \approx 0{,}8706e^{0{,}1386t}$ **19.** $y = e^{-2x} + Ce^{-3x}$

**21.** $y = -1 + 4e^{x^2/2}$ **23.** $y = 2\,\text{sech}\,x + \frac{1}{2}(x\,\text{sech}\,x + \text{senh}\,x)$

**25.** em torno de 646 onças

## ► Capítulo 8 Estabelecendo conexões (página 595)

Não fornecemos resposta de exercícios de Estabelecendo Conexões para os quais houver mais de uma resposta correta possível. Amostras de respostas destas questões podem ser obtidas na Internet.

**1.** **(b)** $y = 2 - 3e^{-2x}$

**3.** **(a)** $du/dx = (f(u) - u)/x$ **(b)** $x^2 - 2xy - y^2 = C$

## ► Exercícios 9.1 (página 605)

**1.** (a) $\dfrac{1}{3^{n-1}}$ **(b)** $\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$ **(c)** $\dfrac{2n-1}{2n}$ **(d)** $\dfrac{n^2}{\pi^{1/(n+1)}}$

**3.** **(a)** 2, 0, 2, 0 **(b)** 1, −1, 1, −1 **(c)** $2\,(1 + (-1)^n)$; $2 + 2\cos n\pi$

**5.** **(a)** O limite não existe devido à oscilação repetida entre −1 e 1.
**(b)** −1; 1; −1; 1; −1 **(c)** não

**7.** $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}$; converge, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$

**9.** 2, 2, 2, 2, 2; converge, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 = 2$

**11.** $\dfrac{\ln 1}{1}, \dfrac{\ln 2}{2}, \dfrac{\ln 3}{3}, \dfrac{\ln 4}{4}, \dfrac{\ln 5}{5}$; converge, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

**13.** 0, 2, 0, 2, 0; diverge **15.** $-1, \frac{16}{9}, -\frac{54}{28}, \frac{128}{65}, -\frac{250}{126}$; diverge

**17.** $\frac{6}{2}, \frac{12}{8}, \frac{20}{18}, \frac{30}{32}, \frac{42}{50}$; converge, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{2}$

**19.** $e^{-1}, 4e^{-2}, 9e^{-3}, 16e^{-4}, 25e^{-5}$; converge, $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n} = 0$

**21.** $2, \left(\frac{5}{3}\right)^2, \left(\frac{6}{4}\right)^3, \left(\frac{7}{5}\right)^4, \left(\frac{8}{6}\right)^5$; converge, $\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n+3}{n+1}\right]^n = e^2$

**23.** $\left\{\frac{2n-1}{2n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$; converge, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{2n} = 1$

**25.** $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$; converge, $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{3^n} = 0$

**27.** $\left\{(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$;
converge, $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 0$

**29.** $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\}_{n=1}^{+\infty}$; converge, $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}) = 0$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**31.** Verdadeira; uma sequência é uma função cujo domínio é um conjunto de inteiros.

**33.** Falsa; por exemplo, $\{(-1)^{n+1}\}$ diverge com termos que oscilam entre 1 e $-1$.

**35.** O limite é 0.

**37.** Por exemplo, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$ e $\{\text{sen}(\pi n/2) + 1/n\}_{n=1}^{+\infty}$

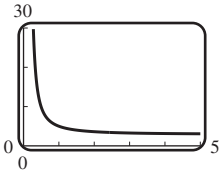
**39.** **(a)** 1, 2, 1, 4, 1, 6, **(b)** $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ ímpar} \\ 1/2^n, & n \text{ par} \end{cases}$

**(c)** $a_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ ímpar} \\ 1/(n+1), & n \text{ par} \end{cases}$

**(d)** (a) diverge; (b) diverge; (c) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

**43.** **(a)** $(0{,}5)^{2n}$ **(c)** $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ **(d)** $-1 \le a_0 \le 1$

**45.** **(a)**




**(b)** $\lim_{n\to+\infty} (2^n + 3^n)^{1/n} = 3$

**49.** **(a)** $N = 4$ **(b)** $N = 10$ **(c)** $N = 1000$

## ► Exercícios 9.2 (página 613)

**1.** estritamente decrescente **3.** estritamente crescente **5.** estritamente decrescente **7.** estritamente crescente **9.** estritamente decrescente **11.** estritamente crescente

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**13.** Verdadeira; $a_{n+1} - a_n > 0$ com qualquer $n$ equivale a $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < \text{an} < \cdots$.

**15.** Falsa; por exemplo, $\{(-1)^{n+1}\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\}$ é limitada, mas diverge.

**17.** estritamente crescente **19.** estritamente crescente

**21.** estritamente crescente a partir de um certo termo

**23.** estritamente crescente a partir de um certo termo

**25.** Sim; o limite situa-se no intervalo [1, 2]

**27.** **(a)** $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ **(e)** $L = 2$

**29.** **(a)** 60, $\frac{1.500}{7} \approx 214{,}3$, $\frac{3.750}{13} \approx 288{,}5$, $\frac{75.000}{251} \approx 298{,}8$ **(d)** $L = 300$

## ► Exercícios 9.3 (página 621)

**1.** **(a)** $2, \frac{12}{5}, \frac{62}{25}, \frac{312}{125}; \frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$; $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{5}{2}$ (converge)

**(b)** $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{4}; -\frac{1}{4}(1-2^n)$; $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ (diverge)

**(c)** $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$; $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}$ (converge)

**3.** $\frac{4}{7}$ **5.** 6 **7.** $\frac{1}{3}$ **9.** $\frac{1}{6}$ **11.** diverge **13.** $\frac{448}{3}$

**15.** **(a)** Exercício 5 **(b)** Exercício 3 **(c)** Exercício 7 **(d)** Exercício 9

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**17.** Falsa; uma série infinita converge se a sequência de suas *somas parciais* convergir.

**19.** Verdadeira; a sequência das somas parciais $\{s_n\}$ da série harmônica satisfaz $s_{2^n} > \frac{n+1}{2}$, portanto, essa série diverge.

**21.** 1 **23.** $\frac{532}{99}$ **27.** 70 m

**29.** **(a)** $s_n = -\ln(n+1)$; $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$ (diverge)

**(b)** $s_n = \sum_{k=2}^{n+1}\left[\ln\frac{k-1}{k} - \ln\frac{k}{k+1}\right]$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\ln 2$

**31.** **(a)** converge se $|x| < 1$; $S = \frac{x}{1+x^2}$

**(b)** converge se $|x| > 2$; $S = \frac{1}{x^2-2x}$

**(c)** converge se $x > 0$; $S = \frac{1}{e^x - 1}$

**33.** $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}a_1 + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{2}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$

## ► Exercícios 9.4 (página 629)

**1.** **(a)** $\frac{4}{3}$ **(b)** $-\frac{3}{4}$

**3.** **(a)** $p = 3$, converge **(b)** $p = \frac{1}{2}$, diverge
**(c)** $p = 1$, diverge **(d)** $p = \frac{2}{3}$, diverge

**5.** **(a)** diverge **(b)** diverge **(c)** diverge **(d)** nenhuma informação

**7.** **(a)** diverge **(b)** converge

**9.** diverge **11.** diverge **13.** diverge **15.** diverge **17.** diverge

**19.** converge **21.** diverge **23.** converge **25.** converge se $p > 1$

**29.** **(a)** diverge **(b)** diverge

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**31.** Falsa; por exemplo, $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ converge a 2, mas $\sum \frac{1}{2^{-k}} = \sum 2^k$ diverge.

**33.** Verdadeira; veja o Teorema 9.4.4.

**35.** **(a)** $(\pi^2/2) - (\pi^4/90)$ **(b)** $(\pi^2/6) - (5/4)$ **(c)** $\pi^4/90$

**37.** **(d)** $\frac{1}{11} < \frac{1}{6}\pi^2 - s_{10} < \frac{1}{10}$

**39.** $\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{3n^3}$; aplique o Exercício 36(b) **(b)** $n = 6$

**(c)** $\frac{\pi^4}{90} \approx 1{,}08238$

**41.** converge

## ► Exercícios 9.5 (página 636)

**1.** **(a)** converge **(b)** diverge **5.** converge **7.** converge

**9.** diverge **11.** converge **13.** inconclusivo **15.** diverge

**17.** diverge **19.** converge

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**21.** Falsa; o teste da comparação no limite usa um limite do quociente de termos correspondentes tomados de duas sequências diferentes.

**23.** Verdadeira; use o teste de comparação no limite com a série convergente $\sum(1/k^2)$.

**25.** converge **27.** converge **29.** converge **31.** converge

**33.** diverge **35.** converge **37.** diverge **39.** converge

**41.** converge **43** diverge **45.** converge **47.** converge

**49.** converge

**51.** $u_k = \frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}$; $\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{2k+1} = \frac{1}{2}$; converge

**53.** **(a)** converge **(b)** diverge **55.** **(a)** converge

## ► Exercícios 9.6 (página 646)

**3.** diverge **5.** converge **7.** converge absolutamente **9.** diverge
**11.** converge absolutamente **13.** converge condicionalmente
**15.** divergente **17.** converge condicionalmente
**19.** converge condicionalmente **21.** divergente
**23.** converge condicionalmente **25.** converge absolutamente
**27.** converge absolutamente

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**29.** Falsa; uma série alternada tem seus termos alternando entre positivo e negativo.

**31.** Verdadeira; se uma série converge, mas diverge absolutamente, então ela converge condicionalmente.

**33.** |erro| < 0,125 **35.** |erro| < 0,1 **37.** $n = 9.999$
**39.** $n = 39.999$ **41.** |erro| < 0,00074; $s_{10} \approx 0{,}4995$; $S = 0{,}5$
**43.** 0,84 **45.** 0,41 **47.** **(c)** $n = 50$

**49.** **(a)** Se $a_k = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, então $\sum a_k$ converge e $\sum a_k^2$ diverge.

Se $a_k = \dfrac{(-1)^k}{k}$, então $\sum a_k$ converge e $\sum a_k^2$ também converge.

**(b)** Se $a_k = \dfrac{1}{k}$, então $\sum a_k^2$ converge e $\sum a_k$ diverge.

Se $a_k = \dfrac{1}{k^2}$, então $\sum a_k^2$ converge e $\sum a_k$ também converge.

## ► Exercícios 9.7 (página 657)

**1.** **(a)** $1 - x + \frac{1}{2}x^2$, $1 - x$ **(b)** $1 - \frac{1}{2}x^2$, 1
**3.** **(a)** $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$ **(b)** 1,04875 **5.** 1,80397443

**7.** $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 - x$, $p_2(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2$,
$p_3(x) = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3!}x^3$,
$p_4(x) = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}x^k$

**9.** $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 - \dfrac{\pi^2}{2!}x^2$, $p_3(x) = 1 - \dfrac{\pi^2}{2!}x^2$,
$p_4(x) = 1 - \dfrac{\pi^2}{2!}x^2 + \dfrac{\pi^4}{4!}x^4$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!}x^{2k}$ (Ver Exercício 74 da Seção 0.2, no Volu-

**11.** $p_0(x) = 0$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$, $p_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$,
$p_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$

**13.** $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2}$,
$p_3(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2}$, $p_4(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!}$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$ (Ver Exercício 74 da Seção 0.2, no Volume1)

**15.** $p_0(x) = 0$, $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = x^2$, $p_3(x) = x^2$,
$p_4(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^4$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+2}$ (Ver Exercício 74 da Seção 0.2, no Volu-

**17.** $p_0(x) = e$, $p_1(x) = e + e(x-1)$,
$p_2(x) = e + e(x-1) + \dfrac{e}{2}(x-1)^2$,
$p_3(x) = e + e(x-1) + \dfrac{e}{2}(x-1)^2 + \dfrac{e}{3!}(x-1)^3$,
$p_4(x) = e + e(x-1) + \dfrac{e}{2}(x-1)^2 + \dfrac{e}{3!}(x-1)^3 + \dfrac{e}{4!}(x-1)^4$;
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!}(x-1)^k$

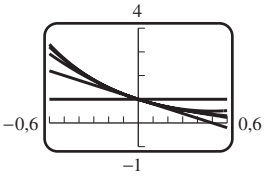
**19.** $p_0(x) = -1$, $p_1(x) = -1 - (x+1)$,
$p_2(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2$,
$p_3(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3$,
$p_4(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3 - (x+1)^4$;
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)(x+1)^k$

**21.** $p_0(x) = p_1(x) = 1$, $p_2(x) = p_3(x) = 1 - \dfrac{\pi^2}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$,
$p_4(x) = 1 - \dfrac{\pi^2}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{\pi^4}{4!}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^4$;
$\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k}$ (Ver Exercício 74 da Seção 0.2, no Volume1)

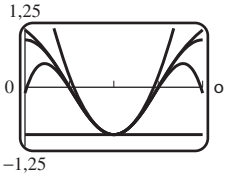
**23.** $p_0(x) = 0$, $p_1(x) = (x-1)$, $p_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$,
$p_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$,
$p_4(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$;
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$

**25.** **(a)** $p_3(x) = 1 + 2x - x^2 + x^3$
**(b)** $p_3(x) = 1 + 2(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3$

**27.** $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 - 2x$,
$p_2(x) = 1 - 2x + 2x^2$,
$p_3(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3$



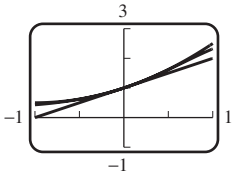

**29.** $p_0(x) = -1$, $p_2(x) = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2$,
$p_4(x) = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4$,
$p_6(x) = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4 + \frac{1}{720}(x-\pi)^6$




As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**31.** Verdadeira; $y = f(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$ é o primeiro polinômio de Taylor de $f$ em torno de $x = x_0$.
**33.** Falsa; $p_6^{(4)}(x_0) = f^{(4)}(x_0)$ **35.** 1,64872 **37.** IV

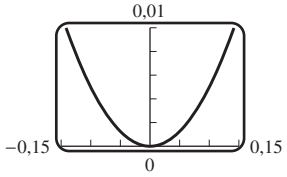
**39.** **(a)**



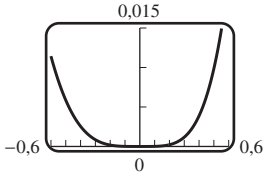

**(b)**

| $x$ | −1,000 | −0,750 | −0,500 | −0,250 | 0,000 | 0,250 | 0,500 | 0,750 | 1,000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,431 | 0,506 | 0,619 | 0,781 | 1,000 | 1,281 | 1,615 | 1,977 | 2,320 |
| $p_1(x)$ | 0,000 | 0,250 | 0,500 | 0,750 | 1,000 | 1,250 | 1,500 | 1,750 | 2,000 |
| $p_2(x)$ | 0,500 | 0,531 | 0,625 | 0,781 | 1,000 | 1,281 | 1,625 | 2,031 | 2,500 |

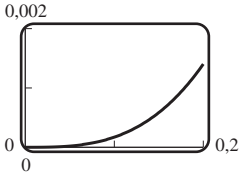
**(c)** $|e^{\operatorname{sen} x} - (1 + x)| < 0{,}01$ com $-0{,}14 < x < 0{,}14$




**(d)** $\left|e^{\operatorname{sen} x} - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)\right| < 0{,}01$ com $-0{,}50 < x < 0{,}50$



**41.** **(a)** [0; 0,137] **(b)**




**43.** (−0,569; 0,569) **45.** (−0,281; 0,281)

## ► Exercícios 9.8 (página 667)

**1.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}x^k$ **3.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!}x^{2k}$ **5.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$

**7.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$ **9.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+2}$ **11.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(x-1)^k$

**13.** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)(x+1)^k$ **15.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k}$

**17.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$ **19.** $-1 < x < 1$; $\frac{1}{1+x}$

**21.** $1 < x < 3$; $\frac{1}{3-x}$ **23.** **(a)** $-2 < x < 2$ **(b)** $f(0) = 1$; $f(1) = \frac{2}{3}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**25.** Verdadeira; veja o Teorema 9.8.2(*c*).

**27.** Verdadeira; o polinômio é a série de Maclaurin e converge em cada $x$.

**29.** $R = 1$, $[-1, 1)$ **31.** $R = +\infty$, $(-\infty, +\infty)$ **33.** $R = \frac{1}{5}$; $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$

**35.** $R = 1$, $[-1, 1]$ **37.** $R = 1$, $(-1, 1]$ **39.** $R = +\infty$, $(-\infty, +\infty)$

**41.** $R = 1$, $[-1, 1]$ **43.** $R = \frac{4}{3}$; $\left(-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ **45.** $R = 1$, $(-2, 0]$

**47.** $R = 1$; $[-2, 0]$ **49.** $R = +\infty$; $(-\infty, +\infty)$ **51.** $(-\infty, +\infty)$

**57.** raio $= R$ **63.** **(a)** $n = 5$; $s_5 \approx 1{,}1026$ **(b)** $\zeta(3{,}7) \approx 1{,}10629$

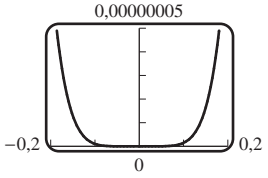
## ► Exercícios 9.9 (página 676)

**3.** 0,069756 **5.** 0,99500 **7.** 0,99619 **9.** 0,5208

**11.** **(a)** $\sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{(1/9)^{2k-1}}{2k-1}$ **(b)** 0,223

**13.** **(a)** 0,4635; 0,3218 **(b)** 3,1412 **(c)** não

**15.** **(a)** erro $\le 9 \times 10^{-8}$ **(b)**




**17.** **(a)** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ **(b)** $1 + \frac{x}{3} + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2 \cdot 5 \cdots (3k-4)}{3^k k!}x^k$

**(c)** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(k+2)(k+1)}{2}x^k$ **23.** 23,406%

## ► Exercícios 9.10 (página 686)

**1.** **(a)** $1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k + \cdots$; $R = 1$

**(b)** $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2k} + \cdots$; $R = 1$

**(c)** $1 + 2x + 4x^2 + \cdots + 2^k x^k + \cdots$; $R = \frac{1}{2}$

**(d)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}x + \frac{1}{2^3}x^2 + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}x^k + \cdots$; $R = 2$

**3.** **(a)** $(2+x)^{-1/2} = \frac{1}{2^{1/2}} - \frac{1}{2^{5/2}}x + \frac{1 \cdot 3}{2^{9/2} \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^{13/2} \cdot 3!}x^3 + \cdots$

**(b)** $(1-x^2)^{-2} = 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \cdots$

**5.** **(a)** $2x - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^5}{5!}x^5 - \frac{2^7}{7!}x^7 + \cdots$; $R = +\infty$

**(b)** $1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \cdots$; $R = +\infty$

**(c)** $1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots$; $R = +\infty$

**(d)** $x^2 - \frac{\pi^2}{2}x^4 + \frac{\pi^4}{4!}x^6 - \frac{\pi^6}{6!}x^8 + \cdots$; $R = +\infty$

**7.** **(a)** $x^2 - 3x^3 + 9x^4 - 27x^5 + \cdots$; $R = \frac{1}{3}$

**(b)** $2x^2 + \frac{2^3}{3!}x^4 + \frac{2^5}{5!}x^6 + \frac{2^7}{7!}x^8 + \cdots$; $R = +\infty$

**(c)** $x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + \frac{1}{16}x^7 + \cdots$; $R = 1$

**9.** **(a)** $x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots$

**(b)** $12x^3 - 6x^6 + 4x^9 - 3x^{12} + \cdots$

**11.** **(a)** $1 - (x-1) + (x-1)^2 - \cdots + (-1)k(x-1)k + \cdots$ **(b)** $(0, 2)$

**13.** **(a)** $x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots$ **(b)** $x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{24} - \frac{71}{1920}x^5 + \cdots$

**15.** **(a)** $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots$ **(b)** $x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$

**19.** $2 - 4x + 2x^2 - 4x^3 + 2x^4 + \cdots$

**25.** $[-1, 1]$; $[-1, 1)$ **27.** **(a)** $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}$ **(b)** $f^{(5)}(0) = 5!, f^{(6)}(0) = 0$

**(c)** $f^{(n)}(0) = n!c_n = \begin{cases} n! & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$

**29.** **(a)** 1 **(b)** $-\frac{1}{3}$ **31.** 0,3103 **33.** 0,200

**35.** **(a)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{k!}$; $R = +\infty$ **37.** **(a)** 3/4 **(b)** $\ln(4/3)$

**39.** **(a)** $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 + \cdots$

**(b)** $x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!(2k+1)}x^{2k+1}$ **(c)** $R = 1$

**41.** **(a)** $y(t) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (0{,}000121)^k t^k}{k!}$ **(c)** $0{,}9998790073y_0$

**43.** $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64}\right)$

## ► Capítulo 9 Exercícios de Revisão (página 689)

**9.** **(a)** verdadeira **(b)** às vezes falsa **(c)** às vezes falsa
**(d)** verdadeira **(e)** às vezes falsa **(f)** às vezes falsa
**(g)** falsa **(h)** às vezes falsa **(i)** verdadeira
**(j)** verdadeira **(k)** às vezes falsa **(l)** às vezes falsa

**11.** **(a)** $\left\{\frac{n+2}{(n+1)^2 - n^2}\right\}_{n=1}^{+\infty}$; converge, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{1}{2}$

**(b)** $\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$; diverge

**15.** **(a)** converge **(b)** converge **17.** **(a)** converge **(b)** diverge

**19.** **(a)** diverge **(b)** converge **21.** $\frac{1}{4 \cdot 5^{99}}$

**23.** **(a)** 2 **(b)** diverge **(c)** 3/4 **(d)** $\pi/4$ **25.** $p > 1$

**29.** **(a)** $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 - 7x$, $p_2(x) = 1 - 7x + 5x^2$,
$p_3(x) = 1 - 7x + 5x^2 + 4x^3$, $p_4(x) = 1 - 7x + 5x^2 + 4x^3$

**33.** **(a)** $e^2 - 1$ **(b)** 0 **(c)** $\cos e$ **(d)** $\frac{1}{3}$

**37.** **(a)** $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7$ **(b)** $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7$

## ► Capítulo 9 Estabelecendo conexões (página 691)

Não fornecemos resposta de exercícios de Estabelecendo Conexões para os quais houver mais de uma resposta correta possível. Amostras de respostas destas questões podem ser obtidas na Internet.

**1.** **(a)** $\frac{a \operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}$ **(b)** $a \operatorname{cossec}\theta$ **(c)** $a \operatorname{cotg}\theta$

**2.** **(a)** $A = 1, B = -2$ **(b)** $s_n = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$; 2

**4.** **(a)** $124{,}58 < d < 124{,}77$ **(b)** $1.243 < s < 1.424$

**6.** $v(t) \approx v_0 - \left(\frac{cv_0}{m} + g\right)t + \frac{c^2}{2m^2}\left(v_0 + \frac{mg}{c}\right)t^2$

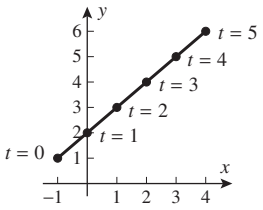
## ► Exercícios 10.1 (página 700)

**1.** **(a)** $y = x + 2\ (-1 \le x \le 4)$

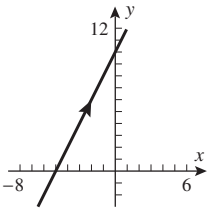
**(c)**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

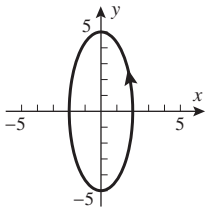
**(d)**



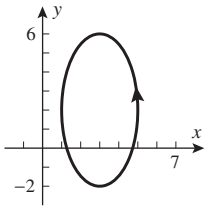

**3.**



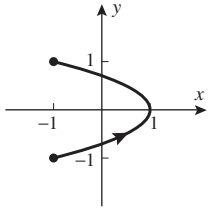

**5.**



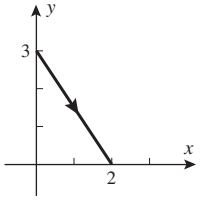

**7.**




**9.**



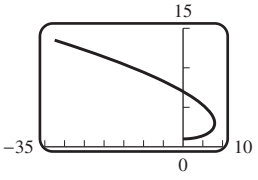

**11.**




**13.** $x = 5\cos t,\ y = -5\operatorname{sen} t\ (0 \le t \le 2\pi)$ **15.** $x = 2,\ y = t$

**17.** $x = t^2,\ y = t (-1 \le t \le 1)$

**19.** **(a)**

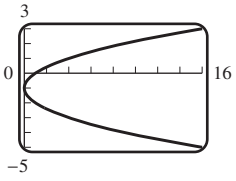



**(b)**

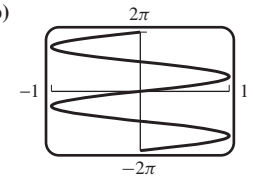
| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 5,5 | 8 | 4,5 | −8 | −32,5 |
| $y$ | 1 | 1,5 | 3 | 5,5 | 9 | 13,5 |

**(c)** $t = 0, 2\sqrt{3}$ **(d)** $0 < t < 2\sqrt{2}$ **(e)** $t = 2$

**21.** **(a)**




**(b)**

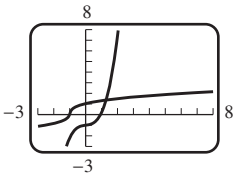



**23.** **(a)** IV **(b)** II **(c)** V **(d)** VI **(e)** III **(f)** I **25.** **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{3}{4}$

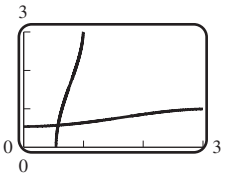
**27.** **(b)** de $(x_0, y_0)$ até $(x_1, y_1)$

**(c)** $x = 3 - 2(t-1),\ y = -1 + 5(t-1)$

**29.**



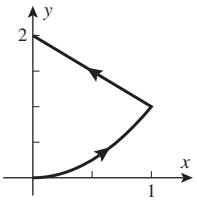

**31.**




As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**33.** Falsa; $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos^2 t$ descreve somente a porção da parábola $y = 1 - x^2$ com $-1 \le x \le 1$.

**35.** Verdadeira; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{12t^3 - 6t^2}{x'(t)}$ **37.**




**39.** **(a)** $x = 4\cos t,\ y = 3\operatorname{sen} t$ **(b)** $x = -1 + 4\cos t,\ y = 2 + 3\operatorname{sen} t$

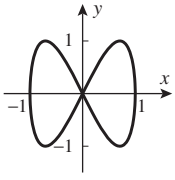
**41.** $-4, 4$ **43.** ambos os sinais são positivos **45.** $4, 4$

**47.** $2/\sqrt{3}, -1/(3\sqrt{3})$

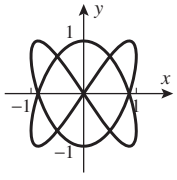
**49.** $\sqrt{3}, 4$ **51.** $y = -e^{-2}x + 2e^{-1}$

**53.** **(a)** $0, \pi, 2\pi$ **(b)** $\pi/2, 3\pi/2$

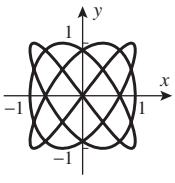
**55.** **(a)**



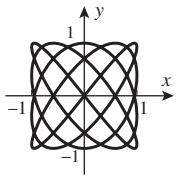

$a = 1,\ b = 2$




$a = 2,\ b = 3$



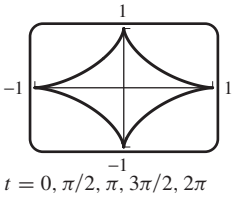

$a = 3,\ b = 4$




$a = 4,\ b = 5$

**(b)** $y = -2x,\ y = 2x$

**57.** $y = 2x - 8,\ y = -2x + 8$ **59.**




$t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$

**61.** **(a)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\operatorname{sen} t}{1 - 3\cos t}$ **(b)** $\theta \approx -0{,}4345$

**63.** **(a)** elipses de centro fixo, de várias formas e tamanhos.

**(b)** elipses de centro variado, de forma, tamanho e orientação fixos.

**(c)** círculos de raio 1 de centros na reta $y = x - 1$.

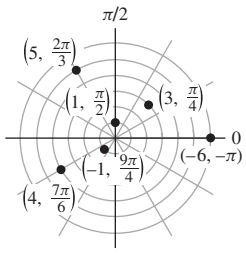
**65.** $\frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 8)$ **67.** $3\pi$ **69.** $\frac{\sqrt{10}}{2}(e^2 - e^{-2})$

**73.** **(b)** $x = \cos t + \cos 2t,\ y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t$ **(c)** sim

**75.** $S = 49\pi$ **77.** $S = \sqrt{2}\pi$

## ► Exercícios 10.2 (página 716)

**1.**




**3.** **(a)** $(3\sqrt{3}, 3)$ **(b)** $(-7/2, 7\sqrt{3}/2)$ **(c)** $(3\sqrt{3}, 3)$ **(d)** $(0, 0)$ **(e)** $(-7\sqrt{3}/2, 7/2)$ **(f)** $(-5, 0)$

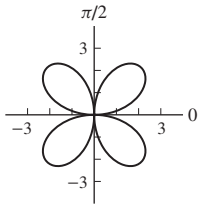
**5.** **(a)** $(5, \pi), (5, -\pi)$ **(b)** $(4, 11\pi/6), (4, -\pi/6)$ **(c)** $(2, 3\pi/2), (2, -\pi/2)$ **(d)** $(8\sqrt{2}, 5\pi/4), (8\sqrt{2}, -3\pi/4)$ **(e)** $(6, 2\pi/3), (6, -4\pi/3)$ **(f)** $(\sqrt{2}, \pi/4), (\sqrt{2}, -7\pi/4)$

**7.** **(a)** (5; 0,92730) **(b)** (10; –0,92730) **(c)** (1,27155; 2,47582)

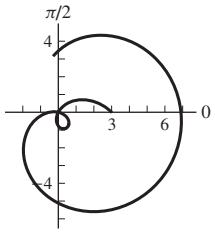
**9.** **(a)** círculo **(b)** reta **(c)** círculo **(d)** reta

**11.** **(a)** $r = 3 \sec\theta$ **(b)** $r = \sqrt{7}$ **(c)** $r = -6 \operatorname{sen}\theta$ **(d)** $r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 4/9$

**13.**



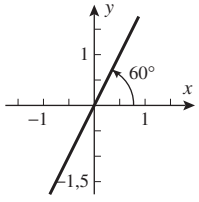

**15.**



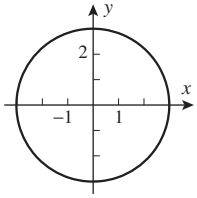

**17.** **(a)** $r = 5$ **(b)** $r = 6\cos\theta$ **(c)** $r = 1 - \cos\theta$

**19.** **(a)** $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$ **(b)** $r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$ **(c)** $r^2 = 9\cos 2\theta$

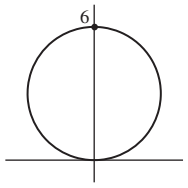
**21.**




**23.**

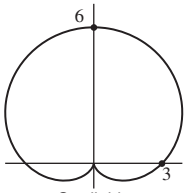



**25.**



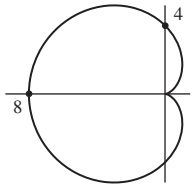

Círculo

**27.**



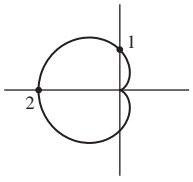

Cardioide

**29.**



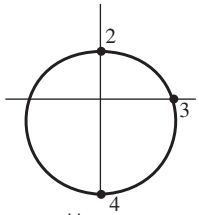

Cardioide

**31.**



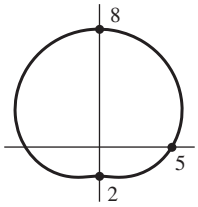

Cardioide

**33.**



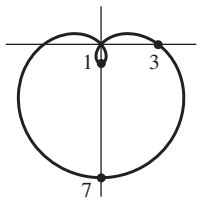

Limaçon

**35.**



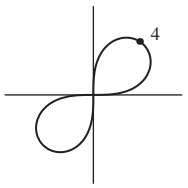

Limaçon

**37.**



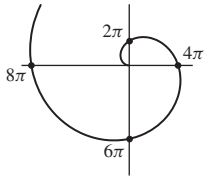

Limaçon

**39.**



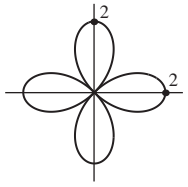

Lemniscata

**41.**



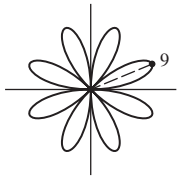

Espiral

**43.**




Rosácea de quatro pétalas

**45.**



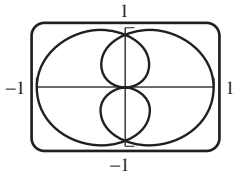

Rosácea de oito pétalas

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

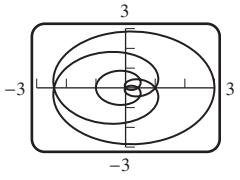
**47.** Verdadeira; $\left(-1, \frac{\pi}{3}\right)$ descreve o mesmo ponto que $\left(1, \frac{\pi}{3} + \pi\right)$, que descreve o mesmo ponto que $\left(1, \frac{\pi}{3} + \pi - 2\pi\right) = \left(1, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

**49.** Falsa; $-1 < \operatorname{sen} 2\theta < 0$ com $\pi/2 < \theta < \pi$, portanto essa porção do gráfico fica no quarto quadrante.

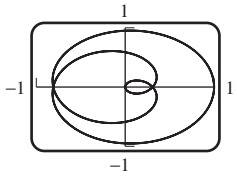
**51.** $0 \le \theta \le 4\pi$




**53.** $0 \le \theta \le 8\pi$

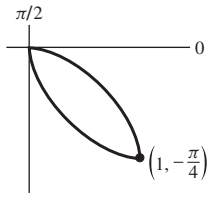



**55.** $0 \le \theta \le 5\pi$

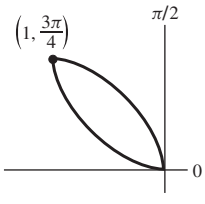



**57.** $-4\pi < \theta < 4\pi$

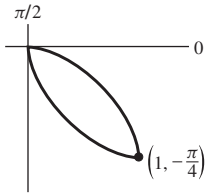
**61.** **(a)**



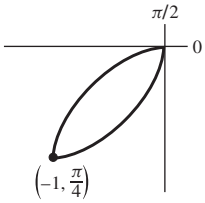

**(b)**

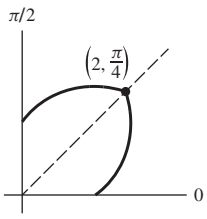


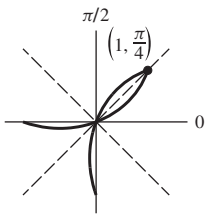

**(c)**




**(d)**



**63.** **(a)** 

**(b)** 


**67.** **(a)** $r = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$ **(b)** $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$
**(c)** $r = 1 - \cos\theta$ **(d)** $r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$

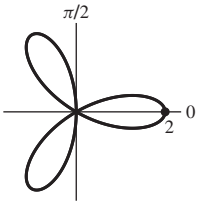
**69.** $(3/2, \pi/3)$ **73.** $\sqrt{2}$

## ► Exercícios 10.3 (página 726)

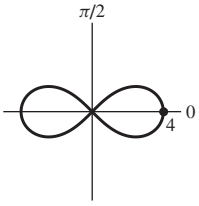
**1.** $\sqrt{3}$ **3.** $\dfrac{\operatorname{tg} 2 - 2}{2\operatorname{tg} 2 + 1}$ **5.** $1/2$ **7.** $1; 0; -1$

**9.** horizontal: $(3a/2, \pi/3)$, $(0, \pi)$, $(3a/2, 5\pi/3)$
vertical: $(2a, 0)$, $(a/2, 2\pi/3)$, $(a/2, 4\pi/3)$

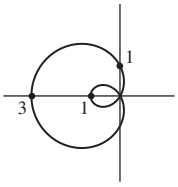
**11.** $(0, 0)$, $(\sqrt{2}/4, \pi/4)$, $(\sqrt{2}/4, 3\pi/4)$

**13.** 

$\theta = \pi/2, \pm\pi/6$

**15.** 

$\theta = \pm\pi/4$

**17.** 

$\theta = \pm\pi/3$

**19.** $L = 2\pi a$ **21.** $L = 8a$

**23.** **(b)** $\approx 2{,}42$

**(c)**

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L$ | 2,42211 | 2,22748 | 2,14461 | 2,10100 | 2,07501 | 2,05816 |

| $n$ | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L$ | 2,04656 | 2,03821 | 2,03199 | 2,02721 | 2,02346 | 2,02046 | 2,01802 |

| $n$ | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L$ | 2,01600 | 2,01431 | 2,01288 | 2,01167 | 2,01062 | 2,00971 |

**25.** **(a)** $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)^2 d\theta$ **(b)** $\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\, d\theta$
**(c)** $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2\theta\, d\theta$ **(d)** $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\theta^2\, d\theta$
**(e)** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta$ **(f)** $\int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$

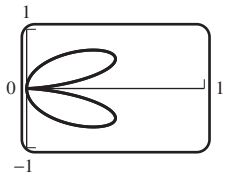
**27.** **(a)** $\pi a^2$ **(b)** $\pi a^2$ **29.** $6\pi$ **31.** $4\pi$ **33.** $\pi - 3\sqrt{3}/2$
**35.** $\pi/2 - \frac{1}{4}$ **37.** $10\pi/3 - 4\sqrt{3}$ **39.** $\pi$ **41.** $9\sqrt{3}/2 - \pi$
**43.** $(\pi + 3\sqrt{3})/4$ **45.** $\pi - 2$

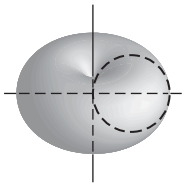
As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

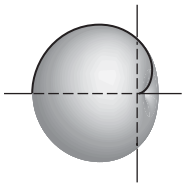
**47.** Verdadeira; aplique o Teorema 10.3.1: $\cos\frac{\theta}{2}\Big|_{\theta=3\pi} = 0$ e $\frac{dr}{d\theta}\Big|_{\theta=3\pi} = \frac{1}{2} \neq 0$, de modo que a reta $\theta = 3\pi$ (o eixo $x$) seja tangente à curva na origem.

**49.** Falsa; a área do setor é $\frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}\theta r^2$.

**51.** **(b)** $a^2$ **(c)** $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ **53.** $8\pi^3 a^2$

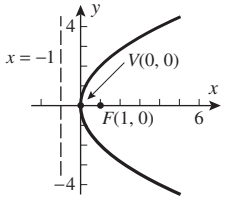
**59.** $\pi/16$ 

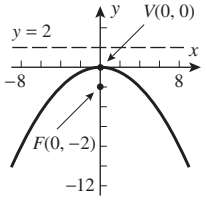

**65.** $\pi^2$ 

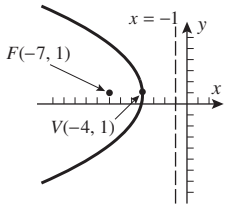
**67.** $32\pi/5$ 

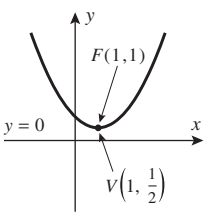
## ► Exercícios 10.4 (página 744)

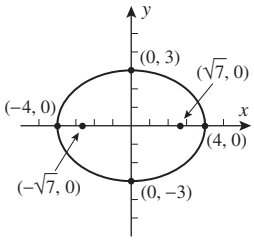
**1.** **(a)** $x = y^2$ **(b)** $-3y = x^2$ **(c)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **(d)** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
**(e)** $y^2 - x^2 = 1$ **(f)** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

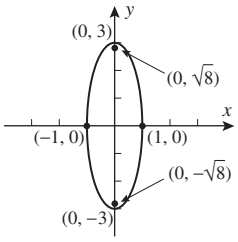
**3.** **(a)** foco: $(1, 0)$;
vértice: $(0, 0)$;
diretriz: $x = -1$



**(b)** foco: $(0, -2)$;
vértice: $(0, 0)$;
diretriz: $y = 2$



**5.** **(a)** 

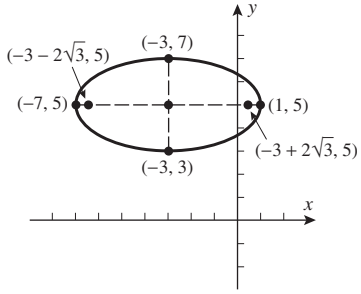

**(b)** 


**7.** **(a)** 


**(b)** 

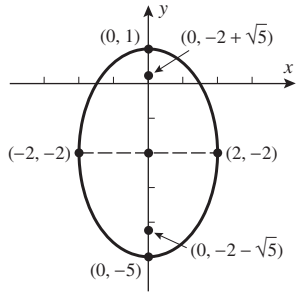
**9.** **(a)** $\dfrac{(x+3)^2}{16}+\dfrac{(y-5)^2}{4}=1$

$c^2=16-4=12,\ c=2\sqrt{3}$

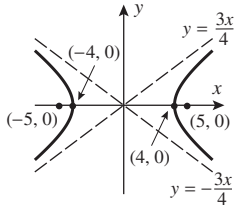



**(b)** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

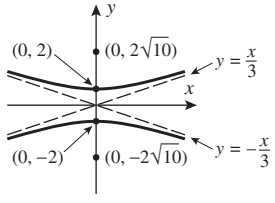
$c^2=9-4=5,\ c=\sqrt{5}$



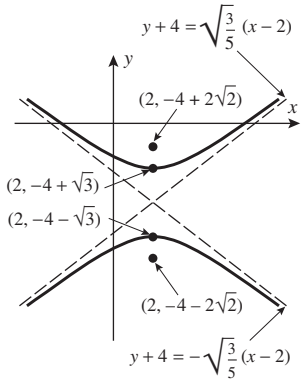

**11.** **(a)** vértices: $(\pm4, 0)$; focos: $(\pm5, 0)$; assíntotas: $y=\pm 3x/4$




**(b)** vértices: $(0, \pm2)$; focos: $(0, \pm2\sqrt{10})$; assíntotas: $y=\pm x/3$

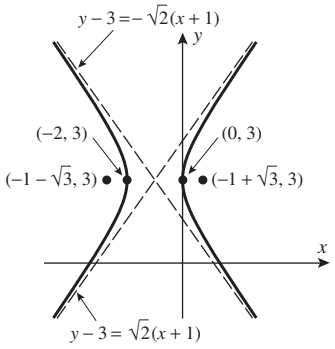



**13.** **(a)** $c^2=3+5=8,\ c=2\sqrt{2}$




**(b)** $\dfrac{(x+1)^2}{1}-\dfrac{(y-3)^2}{2}=1$

$c^2=1+2=3,\ c=\sqrt{3}$




**15.** **(a)** $y^2=12x$ **(b)** $x^2=-y$ **17.** $y^2=2(x-1)$

**19.** **(a)** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ **(b)** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

**21.** **(a)** $\dfrac{x^2}{81/8}+\dfrac{y^2}{36}=1$ **(b)** $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{5}=1$

**23.** **(a)** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ **(b)** $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=1$

**25.** **(a)** $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1,\ \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ **(b)** $\dfrac{x^2}{9/5}-\dfrac{y^2}{36/5}=1$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**27.** Falsa; a descrição é a de uma parábola.

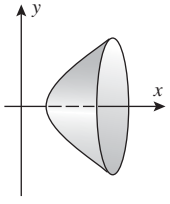
**29.** Falsa; a distância do foco da parábola até sua diretriz é $2p$; veja a Figura 10.4.6.

**31.** **(a)** 16 pés **(b)** $8\sqrt{3}$ pés **35.** $\frac{1}{16}$ pés

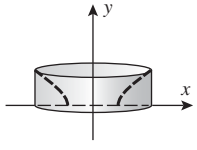
**39.** $\frac{1}{32}(x-4)^2+\frac{1}{36}(y-3)^2=1$ **41.** 96

**45.** $L=D\sqrt{1+p^2},\ T=\frac{1}{2}pD$ **47.** (64,612; 200)

**49.** **(a)** $V=\dfrac{\pi b^2}{3a^2}(b^2-2a^2)\sqrt{a^2+b^2}+\dfrac{2}{3}ab^2\pi$




**(b)** $V=\dfrac{2b^4}{3a}\pi$



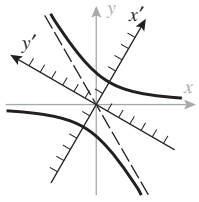

**55.** $k=\pm4$; $(2, 1), (-2, -1)$

**57.** $\left(\pm\dfrac{3\sqrt{13}}{2}, -9\right)$

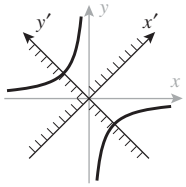
**59.** **(a)** $(x-1)^2-5(y+1)^2=5$, hipérbole
**(b)** $x^2-3(y+1)^2=0,\ x=\pm\sqrt{3}(y+1)$, duas retas
**(c)** $4(x+2)^2+8(y+1)^2=4$, elipse
**(d)** $3(x+2)^2+(y+1)^2=0$, o ponto $(-2, -1)$ (caso degenerado)
**(e)** $(x+4)^2+2y=2$, parábola
**(f)** $5(x+4)^2+2y=-14$, parábola

## ► Exercícios 10.5 (página 753)

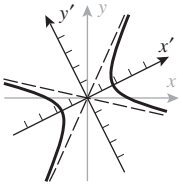
**1.** **(a)** $x' = -1 + 3\sqrt{3},\ y' = 3 + \sqrt{3}$ **(b)** $3x'^2 - y'^2 = 12$ **(c)**



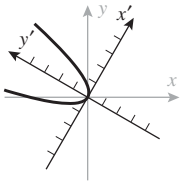

**3.** $y'^2 - x^2 = 18$, hipérbole



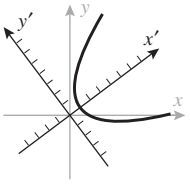

**5.** $\frac{1}{3}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 = 1$, hipérbole



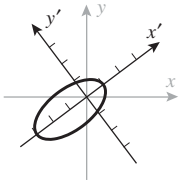

**7.** $y' = x'^2$, parábola




**9.** $y'^2 = 4(x' - 1)$, parábola




**11.** $\frac{1}{4}(x' + 1)^2 + y'^2 = 1$, elipse




**13.** $x^2 + xy + y^2 = 3$

**19.** vértice: $(0, 0)$; foco: $(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$; diretriz: $y = x - \sqrt{2}$

**21.** vértice: $(4/5,\ 3/5)$; foco: $(8/5,\ 6/5)$; diretriz: $4x + 3y = 0$

**23.** focos: $\pm(4\sqrt{7}/5,\ 3\sqrt{7}/5)$; vértices: $\pm(16/5,\ 12/5)$; extremidades: $\pm(-9/5,\ 12/5)$

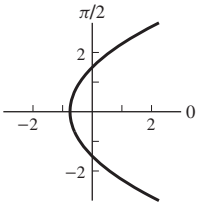
**25.** focos: $(1 - \sqrt{5}/2,\ -\sqrt{3} + \sqrt{15}/2),\ (1 + \sqrt{5}/2,\ -\sqrt{3} - \sqrt{15}/2)$; vértices: $(-1/2,\ \sqrt{3}/2),\ (5/2,\ -5\sqrt{3}/2)$; extremidades: $(1 + \sqrt{3},\ 1 - \sqrt{3}),\ (1 - \sqrt{3},\ -1 - \sqrt{3})$

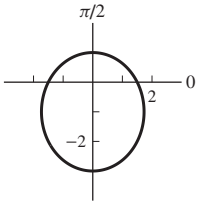
**27.** focos: $\pm(\sqrt{15},\ \sqrt{5})$; vértices: $\pm(2\sqrt{3},\ 2)$; assíntotas: $y = \dfrac{5\sqrt{3} \pm 8}{11}x$

**29.** focos: $\left(-\dfrac{4}{\sqrt{5}} \pm 2\sqrt{\dfrac{13}{5}},\ \dfrac{8}{\sqrt{5}} \pm \sqrt{\dfrac{13}{5}}\right)$; vértices: $(2/\sqrt{5},\ 11/\sqrt{5}),\ (-2\sqrt{5},\ \sqrt{5})$; assíntotas: $y = 7x/4 + 3\sqrt{5},\ y = -x/8 + 3\sqrt{5}/2$

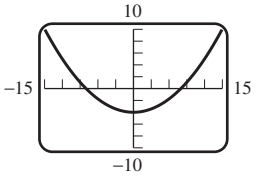
## ► Exercícios 10.6 (página 761)

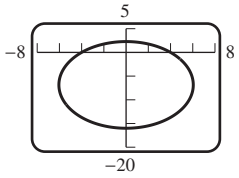
**1.** **(a)** $e = 1, d = \frac{3}{2}$ **(b)** $e = \frac{1}{2}, d = 3$




**3.** **(a)** parábola, aberta para cima **(b)** elipse diretriz acima do polo




**5.** **(a)** $r = \dfrac{6}{4 + 3\cos\theta}$ **(b)** $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$ **(c)** $r = \dfrac{12}{3 + 4\operatorname{sen}\theta}$

**7.** **(a)** $r_0 = 2, r_1 = 6;\ \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{16}(y + 2)^2 = 1$

**(b)** $r_0 = \frac{1}{3}, r_1 = 1;\ \frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 3y^2 = 1$

**9.** **(a)** $r_0 = 1, r_1 = 3;\ (y - 2)^2 - \dfrac{x^2}{3} = 1$

**(b)** $r_0 = 1, r_1 = 5;\ \dfrac{(x + 3)^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

**11.** **(a)** $r = \dfrac{12}{2 + \cos\theta}$ **(b)** $r = \dfrac{64}{25 - 15\operatorname{sen}\theta}$

**13.** $r = \dfrac{5\sqrt{2} + 5}{1 + \sqrt{2}\cos\theta}$ ou $r = \dfrac{5\sqrt{2} - 5}{1 + \sqrt{2}\cos\theta}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

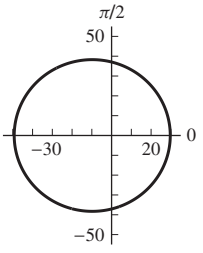
**19.** Verdadeira; a excentricidade e de uma elipse satisfaz $0 < e < 1$ (Teorema 10.6.1).

**21.** Falsa; a excentricidade tem correlação com o "achatamento" de uma elipse, o qual independe da distância entre seus focos.

**23.** **(a)** $T \approx 248$ anos

**(b)** $r_0 = 29{,}6645$ AU $\approx 4.449.675.000$ km, $r_1 = 49{,}3355$ AU $\approx 7.400.325.000$ km

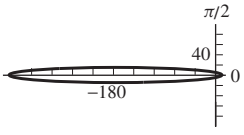
**(c)** $r \approx \dfrac{37{,}05}{1 + 0{,}249\cos\theta}$ AU **(d)**




**25.** **(a)** $a \approx 178{,}26$ UA

**(b)** $r_0 \approx 0{,}8735$ UA, $r_1 \approx 355{,}64$ UA

**(c)** $r \approx \dfrac{1{,}74}{1 + 0{,}9951\cos\theta}$ AU **(d)**




**27.** 563 km, 4.286 km

## ► Capítulo 10 Exercícios de Revisão (página 763)

**1.** $x = \sqrt{2}\cos t,\ y = -\sqrt{2}\operatorname{sen} t\ (0 \le t \le 3\pi/2)$ **3.** **(a)** $-1/4,\ 1/4$

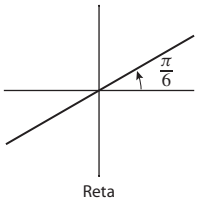
**5.** **(a)** $t = \pi/2 + n\pi$ com $n = 0, \pm1, \ldots$ **(b)** $t = n\pi$ com $n = 0, \pm1, \ldots$

**7.** **(a)** $(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ **(b)** $(7/\sqrt{2}, -7/\sqrt{2})$ **(c)** $(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ **(d)** $(5, 0)$ **(e)** $(0, -2)$ **(f)** $(0, 0)$

**9.** **(a)** $(5;\ 0{,}6435)$ **(b)** $(\sqrt{29};\ 5{,}0929)$ **(c)** $(1{,}2716;\ 0{,}6658)$

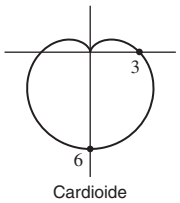
**11.** **(a)** parábola **(b)** hipérbole **(c)** reta **(d)** círculo

**13.**



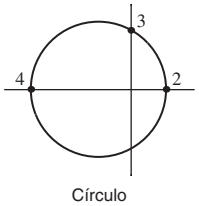

Reta

**15.**




Cardioide

**17.**

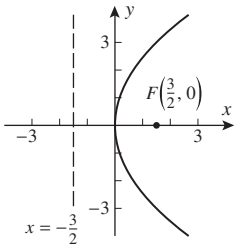



Círculo

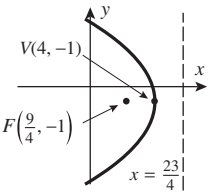
**19.** **(a)** $-2,\ 1/4$ **(b)** $-3\sqrt{3}/4,\ 3\sqrt{3}/4$

**21.** **(a)** A parte de cima é traçada da direita para a esquerda quando $t$ vai de 0 a $\pi$. A parte de baixo é traçada da direita para a esquerda quando $t$ vai de $\pi$ a $2\pi$, exceto pelo laço, que é traçado no sentido anti-horário quando $t$ vai de $\pi$ + arc sen $(1/4)$ a $2\pi$ − arc sen $(1/4)$. **(b)** $y = 1$ **(c)** horizontal: $t = \pi/2,\ 3\pi/2$; vertical: $t = \pi + \text{arc sen}(1/\sqrt[3]{4})$, $2\pi - \text{sen}^{-1}(1/\sqrt[3]{4})$ **(d)** $r = 4 + \text{cossec}\,\theta,\ \theta = \pi + \text{arc sen}(1/4),\ \theta = 2\pi - \text{arc sen}(1/4)$

**23.** $A = 6\pi$ **25.** $A = \dfrac{5\pi}{12} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **27.**

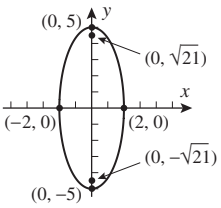



**29.**



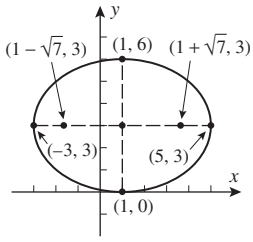

foco: $(9/4, -1)$;
vértice: $(4, -1)$;
diretriz: $x = 23/4$

**31.**

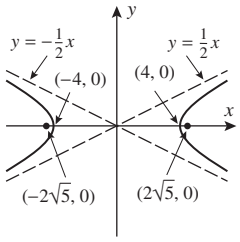



foco: $(0, \pm\sqrt{21})$;
vértice: $(0, \pm 5)$;
extremidades: $(\pm 2, 0)$

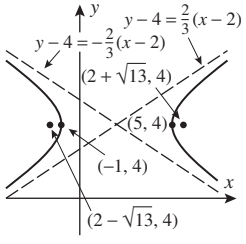
**33.**




**35.**




**37.**




**39.** $x^2 = -16y$ **41.** $y^2 - x^2 = 9$

**43.** **(b)** $x = \dfrac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$; $y = y_0 + \dfrac{v_0^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$

**45.** $\theta = \pi/4$; $5(y')^2 - (x')^2 = 6$; hipérbole

**47.** $\theta = \operatorname{arc\,tg}(1/2)$; $y' = (x')^2$; parábola

**49.** **(a)** (i) elipse; (ii) à direita; (iii) 1 **(b)** (i) hipérbole; (ii) à esquerda; (iii) 1/3 **(c)** (i) parábola; (ii) acima; (iii) 1/3 **(d)** (i) parábola; (ii) abaixo; (iii) 3

**51.** **(a)** $\dfrac{(x+3)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$ **(b)** $(x+2)^2 = -8y$

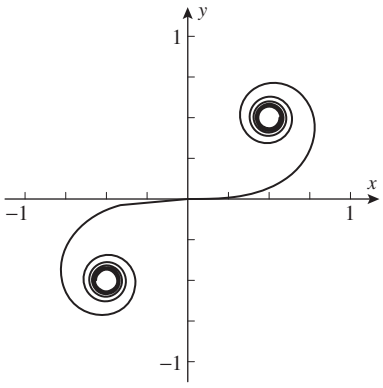
**(c)** $\dfrac{(y-5)^2}{4} - 16(x+1)^2 = 1$

**53.** 15,86543959

## ► Capítulo 10 Estabelecendo conexões (página 766)

Não fornecemos resposta de exercícios de Estabelecendo Conexões para os quais houver mais de uma resposta correta possível. Amostras de respostas destas questões podem ser obtidas na Internet.

**1.** **(a)**



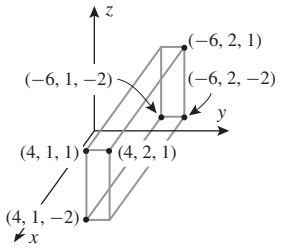

**(c)** $L = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left[\cos^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\right]dt = 2$

**2.** **(a)** $P$: $(b\cos t, b\operatorname{sen} t)$;
$Q$: $(a\cos t, a\operatorname{sen} t)$;
$R$: $(a\cos t, b\operatorname{sen} t)$

## ► Exercícios 11.1 (página 771)

**1.** **(a)** (0, 0, 0), (3, 0, 0), (3, 5, 0), (0, 5, 0), (0, 0, 4), (3, 0, 4), (3, 5, 4), (0, 5, 4)
**(b)** (0, 1, 0), (4, 1, 0), (4, 6, 0), (0, 6, 0), (0, 1, −2), (4, 1, −2), (4, 6, −2), (0, 6, −2)

**3.** (4, 2, −2), (4, 2, 1), (4, 1, 1), (4, 1, −2), (−6, 1, 1), (−6, 2, 1), (−6, 2, −2) (−6, 1, −2)




**5.** **(a)** ponto **(b)** reta paralela o eixo $y$
**(c)** plano paralelo ao plano $yz$

**9.** raio $\sqrt{74}$, centro $(2, 1, -4)$ **11.** **(b)** (2, 1, 6) **(c)** área 49

**13.** **(a)** $(x-7)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16$
**(b)** $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$
**(c)** $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 14$
**(d)** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{5}{4}$

**15.** $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = r^2$
**(a)** $r^2 = 9$ **(b)** $r^2 = 1$ **(c)** $r^2 = 4$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**19.** Falsa; ver Figura 11.1.6.

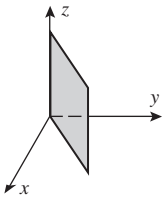
**21.** Verdadeira; ver Figura 11.1.3.

**23.** esfera, centro $(-5, -2, -1)$, raio 7

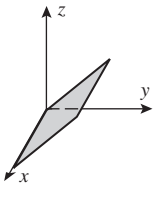
**25.** esfera, centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ raio $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$

**27.** nenhum gráfico

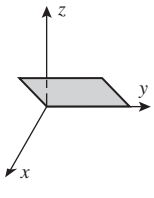
**29.** **(a)**

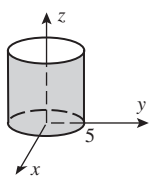


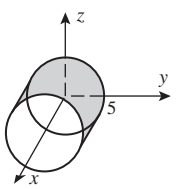

**(b)**

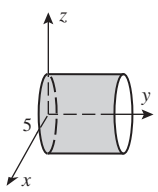



**(c)**

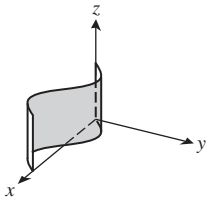


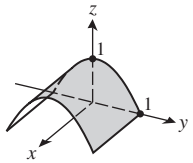
**31.** **(a)** 

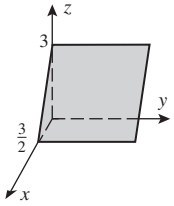
**(b)** 

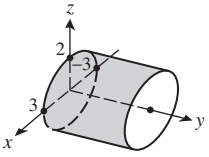
**(c)** 

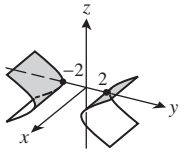

**33.** **(a)** $-2y + z = 0$ **(b)** $-2x + z = 0$ **(c)** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ **(d)** $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

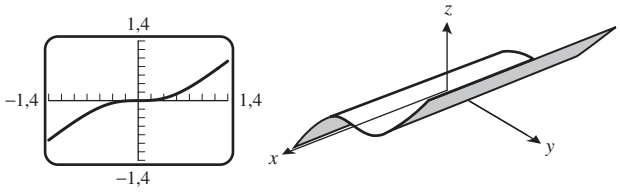
**35.** 


**37.** 


**39.** 


**41.** 


**43.** 

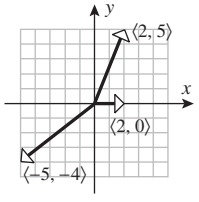

**45.** 

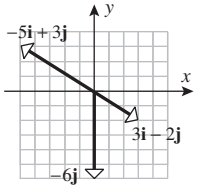

**47.** maior distância $3 + \sqrt{6}$, menor $3 - \sqrt{6}$

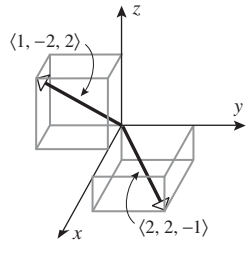
**49.** todos os pontos fora do cilindro circular $(y+3)^2 + (z-2)^2 = 16$

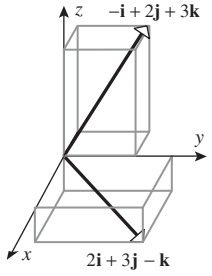
**51.** $r = (2 - \sqrt{3})R$ **53.** **(b)** $y^2 + z^2 = e^{2x}$

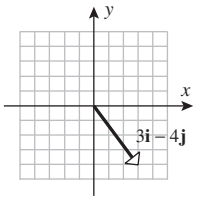
## ► Exercícios 11.2 (página 782)

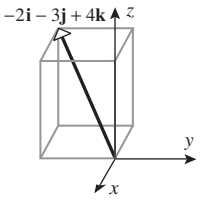
**1.** **(a-c)** 

**(d-f)** 


**3.** **(a, b)** 

**(c, d)** 


**5.** **(a)** $\langle 3, -4 \rangle$ 

**(b)** $\langle -2, -3, 4 \rangle$ 


**7.** **(a)** $\langle -1, 3 \rangle$ **(b)** $\langle -7, 2 \rangle$ **(c)** $\langle -3, 6, 1 \rangle$

**9.** **(a)** $(4, -4)$ **(b)** $(8, -1, -3)$

**11.** **(a)** $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ **(b)** $18\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ **(c)** $-\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ **(d)** $40\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ **(e)** $-2\mathbf{i} - 16\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$ **(f)** $-\mathbf{i} + 13\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

**13.** **(a)** $\sqrt{2}$ **(b)** $5\sqrt{2}$ **(c)** $\sqrt{21}$ **(d)** $\sqrt{14}$

**15.** **(a)** $2\sqrt{3}$ **(b)** $\sqrt{14} + \sqrt{2}$ **(c)** $2\sqrt{14} + 2\sqrt{2}$ **(d)** $2\sqrt{37}$ **(e)** $(1/\sqrt{6})\mathbf{i} + (1/\sqrt{6})\mathbf{j} - (2/\sqrt{6})\mathbf{k}$ **(f)** 1

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**17.** Falsa; $\|\mathbf{i} + \mathbf{j}\| = \sqrt{2} \neq 1 + 1 = 2$

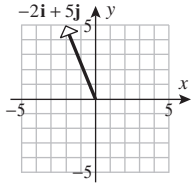
**19.** Verdadeira; um no mesmo sentido do vetor e o outro de sentido oposto.

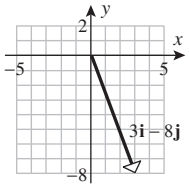
**21.** **(a)** $(-1/\sqrt{17})\mathbf{i} + (4/\sqrt{17})\mathbf{j}$ **(b)** $(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{14}$ **(c)** $(4\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})/(3\sqrt{2})$

**23.** **(a)** $\langle -\frac{3}{2}, 2 \rangle$ **(b)** $\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 7, 0, -6 \rangle$

**25.** **(a)** $\langle 3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2 \rangle$ **(b)** $\langle 0, 2 \rangle$ **(c)** $\langle -5/2, 5\sqrt{3}/2 \rangle$ **(d)** $\langle -1, 0 \rangle$

**27.** $\langle (\sqrt{3} - \sqrt{2})/2, (1 + \sqrt{2})/2 \rangle$

**29.** **(a)** $\langle -2, 5 \rangle$ 

**(b)** $\langle 3, -8 \rangle$ 


**31.** $\langle -\frac{2}{3}, 1 \rangle$ **33.** $\mathbf{u} = \frac{5}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{1}{7}\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \frac{8}{7}\mathbf{i} - \frac{1}{7}\mathbf{j} - \frac{4}{7}\mathbf{k}$

**35.** $\sqrt{5}, 3$ **37.** **(a)** $\pm\frac{5}{3}$ **(b)** 3

**39.** **(a)** $\langle 1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10} \rangle, \langle -1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10} \rangle$

**(b)** $\langle 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2} \rangle, \langle -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \rangle$ **(c)** $\pm\frac{1}{\sqrt{26}}\langle 5, 1 \rangle$

**41.** **(a)** o círculo de raio 1 em torno da origem

**(b)** disco fechado de raio 1 em torno da origem

**(c)** todos os pontos fora do disco fechado de raio 1 em torno da origem

**43.** **(a)** a esfera (oca) de raio 1 em torno da origem

**(b)** a bola fechada de raio 1 em torno da origem

**(c)** todos os pontos fora da bola fechada de raio 1 em torno da origem

**45.** magnitude $= 30\sqrt{5}$ lb, $\theta \approx 26{,}57°$

**47.** magnitude $\approx 207{,}06$ N, $\theta = 45°$

**49.** magnitude $\approx 94{,}995$ N, $\theta = \approx 28{,}28°$

**51.** magnitude $\approx 9{,}165$ lb, ângulo $\approx -70{,}890°$

**53.** $\approx 183{,}02$ lb; $224{,}13$ lb **55.** $450\sqrt{2} + 150\sqrt{6}$ lb, $300 + 300\sqrt{3}$ lb

**57.** **(a)** $c_1 = -2$, $c_2 = 1$

## ► Exercícios 11.3 (página 792)

**1.** **(a)** $-10$; $\cos\theta = -1/\sqrt{5}$ **(b)** $-3$; $\cos\theta = -3/\sqrt{58}$ **(c)** 0; $\cos\theta = 0$ **(d)** $-20$; $\cos\theta = -20/(3\sqrt{70})$

**3.** **(a)** obtuso **(b)** agudo **(c)** obtuso **(d)** ortogonal

**5.** $\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2, -1, -\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2$

**7.** **(a)** vértice $B$ **(b)** $82°, 60°, 38°$ **13.** $r = 7/5$

**15.** **(a)** $\alpha = \beta \approx 55°$, $\gamma \approx 125°$ **(b)** $\alpha \approx 48°$, $\beta \approx 132°$, $\gamma \approx 71°$

**19.** **(a)** $\approx 35°$ **(b)** $90°$

**21.** $64°, 41°, 60°$ **23.** $71°, 61°, 36°$

**25.** **(a)** $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right\rangle, \left\langle \frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{5}{3} \right\rangle$

**(b)** $\left\langle -\frac{74}{49}, -\frac{111}{49}, \frac{222}{49} \right\rangle, \left\langle \frac{270}{49}, \frac{62}{49}, \frac{121}{49} \right\rangle$

**27.** **(a)** $\langle 1, 1\rangle + \langle -4, 4\rangle$ **(b)** $\left\langle 0, -\frac{8}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle + \left\langle -2, \frac{13}{5}, \frac{26}{5} \right\rangle$

**(c)** $\mathbf{v} = \langle 1, 4, 1\rangle$ é ortogonal a $\mathbf{b}$.

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**29.** Verdadeira; $\mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$ implica $0 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2 \neq 0$, uma contradição.

**31.** Verdadeira; veja a Equação (12). **33.** $\sqrt{564/29}$ **35.** 169,8 N

**37.** 375 pés·lb **39.** $-5\sqrt{3}$ J **45.** **(a)** 40° **(b)** $x \approx -0{,}682328$

## ► Exercícios 11.4 (página 803)

**1.** **(a)** $-\mathbf{j} + \mathbf{k}$ **3.** $\langle 7, 10, 9\rangle$ **5.** $\langle -4, -6, -3\rangle$

**7.** **(a)** $\langle -20, -67, -9\rangle$ **(b)** $\langle -78, 52, -26\rangle$

**(c)** $\langle 0, -56, -392\rangle$ **(d)** $\langle 0, 56, 392\rangle$

**9.** $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0$ **11.** $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\langle 2, 1, 1\rangle$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**13.** Verdadeira; veja o Teorema 11.4.5($c$).

**15.** Falsa; tome $\mathbf{v} = \mathbf{u} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{w} = 2\mathbf{i}$.

**17.** $\sqrt{59}$ **19.** $\sqrt{374}/2$

**21.** 80 **23.** $-3$ **25.** 16 **27.** **(a)** sim **(b)** sim **(c)** não

**29.** **(a)** 9 **(b)** $\sqrt{122}$ **(c)** arc sen $\left(\frac{9}{14}\right)$

**31.** **(a)** $2\sqrt{141/29}$ **(b)** $6/\sqrt{5}$ **33.** $\frac{2}{3}$ **37.** $\theta = \pi/4$

**39.** (a) $10\sqrt{2}$ lb·pés, sentido de rotação em torno de $P$ é anti-horário olhando ao longo de $\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F} = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$ em direção a seu ponto inicial.

**(b)** 10 lb·pés, sentido de rotação em torno de $P$ é anti-horário olhando ao longo de $-10\mathbf{i}$ em direção a seu ponto inicial.

**(c)** 0 lb·pés, nenhuma rotação em torno de $P$.

**41.** $\approx 36{,}19$ N·m **45.** $-8\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $-8\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$ **49.** 1,887850

## ► Exercícios 11.5 (página 810)

**1.** **(a)** $L_1$: $x = 1, y = t$, $L_2$: $x = t, y = 1$, $L_3$: $x = t, y = t$

**(b)** $L_1$: $x = 1, y = 1, z = t$, $L_2$: $x = t, y = 1, z = 1$, $L_3$: $x = 1, y = t, z = 1$, $L_4$: $x = t, y = t, z = t$

**3.** **(a)** $x = 3 + 2t, y = -2 + 3t$; segmento de reta: $0 \le t \le 1$

**(b)** $x = 5 - 3t, y = -2 + 6t, z = 1 + t$; segmento de reta: $0 \le t \le 1$

**5.** **(a)** $x = 2 + t, y = -3 - 4t$ **(b)** $x = t, y = -t, z = 1 + t$

**7.** **(a)** $P(2, -1)$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ **(b)** $P(-1, 2, 4)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

**9.** **(a)** $\langle -3, 4\rangle + t\langle 1, 5\rangle$; $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + t(\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$

**(b)** $\langle 2, -3, 0\rangle + t\langle -1, 5, 1\rangle$; $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + t(-\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k})$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**11.** Falsa; as retas podem ser reversas.

**13.** Falsa; veja parte (b) da solução do Exemplo 3.

**15.** $x = -5 + 2t, y = 2 - 3t$ **17.** $x = 3 + 4t, y = -4 + 3t$

**19.** $x = -1 + 3t, y = 2 - 4t, z = 4 + t$

**21.** $x = -2 + 2t, y = -t, z = 5 + 2t$

**23.** **(a)** $x = 7$ **(b)** $y = \frac{7}{3}$ **(c)** $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{85}}{6}$, $y = \dfrac{43 \mp \sqrt{85}}{18}$

**25.** $(-2, 10, 0)$; $(-2, 0, -5)$; a reta não intersecta o plano $yz$.

**27.** $(0, 4, -2)$; $(4, 0, 6)$ **29.** $(1, -1, 2)$ **33.** As retas são paralelas.

**35.** Os pontos não estão situados na mesma reta.

**39.** $\langle x, y\rangle = \langle -1, 2 + t\langle 1, 1\rangle$

**41.** O ponto a $1/n$ do caminho de $(-2, 0)$ a $(1, 3)$.

**43.** O segmento de reta unindo os pontos $(1, 0)$ e $(-3, 6)$.

**45.** $(5, 2)$ **47.** $2\sqrt{5}$ **49.** distância $= \sqrt{35/6}$

**51.** **(a)** $x = x_0 + (x_1 - x_0)t$, $y = y_0 + (y_1 - y_0)t$, $z = z_0 + (z_1 - z_0)t$

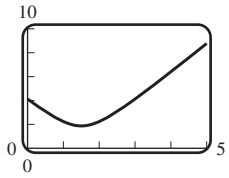
**(b)** $x = x_1 + at$, $y = y_1 + bt$, $z = z_1 + ct$

**53.** **(b)** $\langle x, y, z\rangle = \langle 1 + 2t, -3 + 4t, 5 + t\rangle$

**55.** **(b)** 84° **(c)** $x = 7 + t$, $y = -1$, $z = -2 + t$

**57.** $x = t$, $y = 2 + t$, $z = 1 - t$

**59.** **(a)** $\sqrt{17}$ cm **(b)**




**(d)** $\sqrt{14}/2$ cm

## ► Exercícios 11.6 (página 819)

**1.** $x = 3, y = 4, z = 5$ **3.** $x + 4y + 2z = 28$ **5.** $z = 0$

**7.** $x - y = 0$ **9.** $y + z = 1$ **11.** $2y - z = 1$

**13.** **(a)** paralelo **(b)** perpendicular **(c)** nenhum

**15.** **(a)** paralelo **(b)** nenhum **(c)** perpendicular

**17.** **(a)** ponto de interseção é $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ **(b)** nenhuma interseção

**19.** 35°

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**21.** Verdadeira; um será o negativo do outro.

**23.** Verdadeira; o vetor diretor de $L$ deve ser ortogonal a ambos os vetores normais.

**25.** $4x - 2y + 7z = 0$ **27.** $4x - 13y + 21z = -14$

**29.** $x + y - 3z = 6$ **31.** $x + 5y + 3z = -6$

**33.** $x + 2y + 4z = \frac{29}{2}$ **35.** $x = 5 - 2t$, $y = 5t$, $z = -2 + 11t$

**37.** $7x + y + 9z = 25$ **39.** sim

**41.** $x = -\frac{11}{7} - 23t$, $y = -\frac{12}{7} + t$, $z = -7t$

**43.** $\frac{5}{3}$ **45.** $5/\sqrt{54}$ **47.** $25/\sqrt{126}$

**49.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = \frac{121}{14}$ **51.** $5/\sqrt{12}$

## ► Exercícios 11.7 (página 830)

**1.** **(a)** paraboloide elíptico, $a = 2, b = 3$

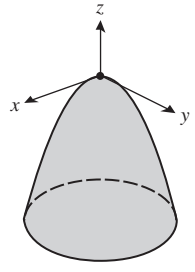
**(b)** paraboloide hiperbólico, $a = 1, b = 5$

**(c)** hiperboloide de uma folha, $a = b = c = 4$

**(d)** cone circular, $a = b = 1$ **(e)** paraboloide elíptico, $a = 2, b = 1$

**(f)** hiperboloide de duas folhas, $a = b = c = 1$

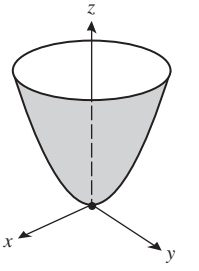
**3.** **(a)** $-z = x^2 + y^2$, paraboloide circular aberto para baixo no eixo $z$ negativo



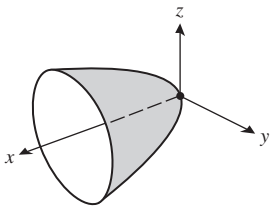

**(b)** $z = x^2 + y^2$, paraboloide circular, sem mudança

**(c)** $z = x^2 + y^2$, paraboloide circular, sem mudança

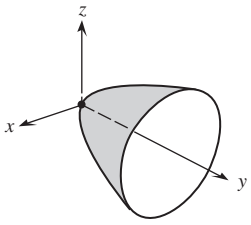
**(d)** $z = x^2 + y^2$, paraboloide circular, sem mudança



**(e)** $x = y^2 + z^2$, paraboloide circular aberto ao longo do eixo $x$ positivo

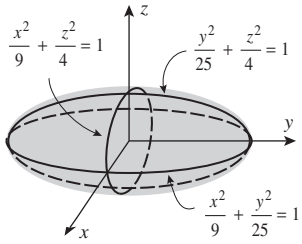



**(f)** $y = x^2 + z^2$, paraboloide circular aberto ao longo do eixo $y$ positivo

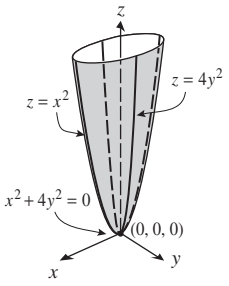



**5.** **(a)** hiperbolide de uma folha, eixo é o eixo $y$
**(b)** hiperboloide de duas folhas separadas pelo plano $yz$
**(c)** paraboloide elíptico aberto ao longo do eixo $x$ positivo
**(d)** cone elíptico com o eixo $x$ como eixo
**(e)** paraboloide hiperbólico montado no eixo $z$
**(f)** paraboloide aberto ao longo do eixo $y$ negativo

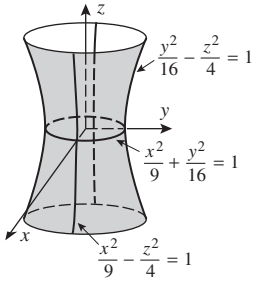
**7.** **(a)** $x = 0$: $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{4} = 1$;
$y = 0$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$;
$z = 0$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$




**(b)** $x = 0$: $z = 4y^2$;
$y = 0$: $z = x^2$;
$z = 0$: $x = y = 0$




**(c)** $x = 0$: $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1$;
$y = 0$: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1$;
$z = 0$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$



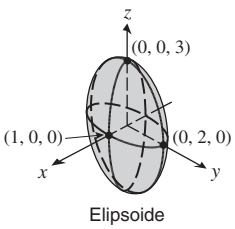

**9.** **(a)** $4x^2 + z^2 = 3$; elipse **(b)** $y^2 + z^2 = 3$; círculo
**(c)** $y^2 + z^2 = 20$; círculo **(d)** $9x^2 - y^2 = 20$; hipérbole
**(e)** $z = 9x^2 + 16$; parábola **(f)** $9x^2 + 4y^2 = 4$; elipse

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**11.** Falsa; "quádrica" se refere a potências de grau dois.

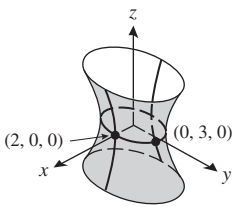
**13.** Falsa; nenhuma das seções transversais precisa ser circular.

**15.**



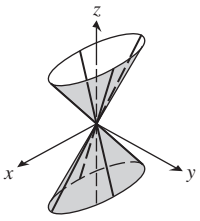

Elipsoide

**17.**



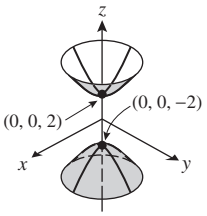

Hiperboloide de uma folha

**19.**



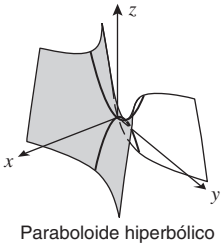

Cone elíptico

**21.**



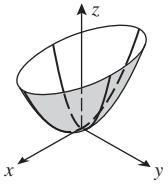

Hiperboloide de duas folhas

**23.**



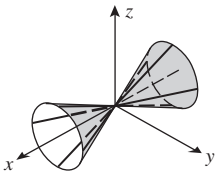

Paraboloide hiperbólico

**25.**



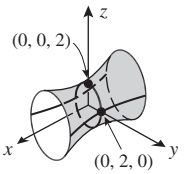

Paraboloide elíptico

**27.**



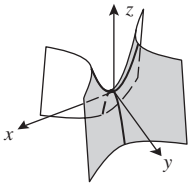

Cone circular

**29.**



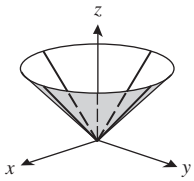

Hiperboloide de uma folha

**31.**

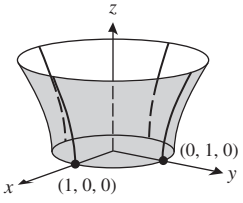



Paraboloide hiperbólico

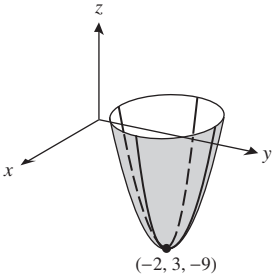
**33.**




**35.**

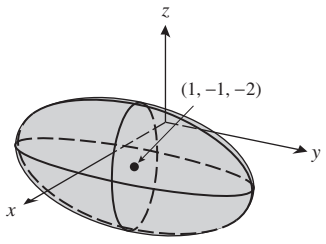



**37.**




Paraboloide circular

**39.**



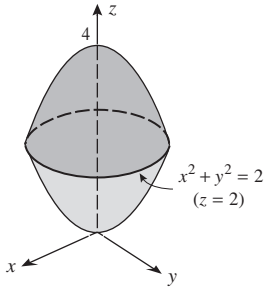

Elipsoide

**41.** **(a)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **(b)** 6, 4 **(c)** $(\pm\sqrt{5}, 0, \sqrt{2})$
**(d)** O eixo focal é paralelo ao eixo $x$.

**43.** **(a)** $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$ **(b)** $(0, \pm 2, 4)$ **(c)** $(0, \pm 2\sqrt{2}, 4)$
**(d)** O eixo focal é paralelo ao eixo $y$.

**45.** **(a)** $z + 4 = y^2$ **(b)** $(2, 0, -4)$ **(c)** $\left(2, 0, -\frac{15}{4}\right)$
**(d)** O eixo focal é paralela ao eixo $z$.

**47.** Círculo de raio $\sqrt{2}$ no plano $z = 2$, centrado em $(0, 0, 2)$.




**49.** $y = 4(x^2 + z^2)$ **51.** $z = (x^2 + y^2)/4$ (paraboloide circular)

## ► Exercícios 11.8 (página 837)

**1.** **(a)** $(8, \pi/6, -4)$ **(b)** $(5\sqrt{2}, 3\pi/4, 6)$
**(c)** $(2, \pi/2, 0)$ **(d)** $(8, 5\pi/3, 6)$

**3.** **(a)** $(2\sqrt{3}, 2, 3)$ **(b)** $(-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, -2)$
**(c)** $(5, 0, 4)$ **(d)** $(-7, 0, -9)$

**5.** **(a)** $(2\sqrt{2}, \pi/3, 3\pi/4)$ **(b)** $(2, 7\pi/4, \pi/4)$
**(c)** $(6, \pi/2, \pi/3)$ **(d)** $(10, 5\pi/6, \pi/2)$

**7.** **(a)** $(5\sqrt{6}/4, 5\sqrt{2}/4, 5\sqrt{2}/2)$ **(b)** $(7, 0, 0)$
**(c)** $(0, 0, 1)$ **(d)** $(0, -2, 0)$

**9.** **(a)** $(2\sqrt{3}, \pi/6, \pi/6)$ **(b)** $(\sqrt{2}, \pi/4, 3\pi/4)$
**(c)** $(2, 3\pi/4, \pi/2)$ **(d)** $(4\sqrt{3}, 1, 2\pi/3)$

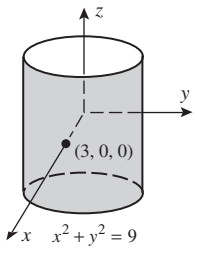
**11.** **(a)** $(5\sqrt{3}/2, \pi/4, -5/2)$ **(b)** $(0, 7\pi/6, -1)$
**(c)** $(0, 0, 3)$ **(d)** $(4, \pi/6, 0)$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

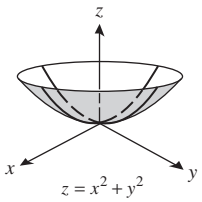
**15.** Verdadeira; ver Figura 11.8.1*b*.

**17.** Verdadeira; ver Figuras 11.8.3 e 11.8.4

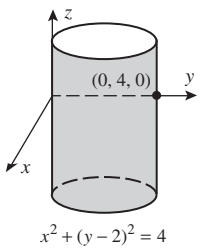
**19.**




**21.**

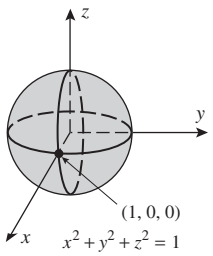



**23.**



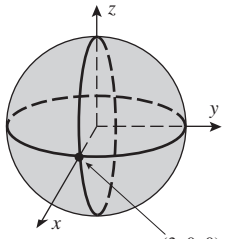

$x^2 + (y - 2)^2 = 4$

**25.**



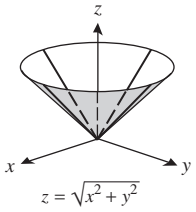

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**27.**



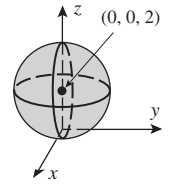

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$

**29.**



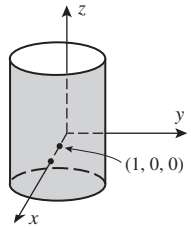

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

**31.**




$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$

**33.**




$(x - 1)^2 + y^2 = 1$

**35.** **(a)** $z = 3$ **(b)** $\rho = 3 \sec \phi$ **37.** **(a)** $z = 3r^2$
**(b)** $\rho = \frac{1}{3} \operatorname{cossec} \phi \operatorname{cotg} \phi$

**39.** **(a)** $r = 2$ **(b)** $r = 2 \operatorname{cossec} \phi$ **41.** **(a)** $r^2 + z^2 = 9$ **(b)** $\rho = 3$

**43.** **(a)** $2r \cos\theta + 3r \operatorname{sen}\theta + 4z = 1$
**(b)** $2\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta + 3\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta + 4\rho \cos\phi = 1$

**45.** **(a)** $r^2 \cos^2\theta = 16 - z^2$ **(b)** $\rho^2(1 - \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta) = 16$

**47.** Todos os pontos no ou acima do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que também estão no ou abaixo do plano $z = 4$.

**49.** Todos os pontos nas ou entre as esferas concêntricas de raios 1 e 3 centradas na origem.

**51.** esférica $(4000, \pi/6, \pi/6)$, retangular $(1000\sqrt{3}, 1000, 2000\sqrt{3})$

**53.** **(a)** $(10, \pi/2, 1)$ **(b)** $(0, 10, 1)$ **(c)** $(\sqrt{101}, \pi/2, \text{arc tg } 10)$

## ► Capítulo 11 Exercícios de Revisão (página 838)

**3.** **(b)** $-1/2, \pm\sqrt{3}/2$ **(d)** verdadeiro

**5.** $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 + (z + 4)^2 = r^2$;
**(a)** $r^2 = 16$ **(b)** $r^2 = 25$ **(c)** $r^2 = 9$

**7.** $(7, 5)$

**9.** **(a)** $-\frac{3}{4}$ **(b)** $\frac{1}{7}$ **(c)** $(48 \pm 25\sqrt{3})/11$ **(d)** $c = \frac{4}{3}$

**13.** 13 pés·lb **15.** **(a)** $\sqrt{26}/2$ **(b)** $\sqrt{26}/3$

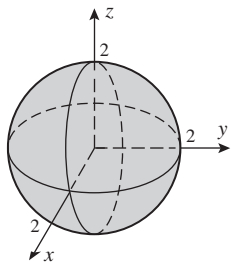
**17.** **(a)** 29 **(b)** $\dfrac{29}{\sqrt{65}}$ **19.** $x = 4 + t, y = 1 - t, z = 2$

**21.** $x + 5y - z - 2 = 0$ **23.** $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

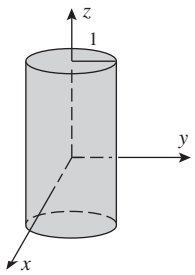
**25.** **(a)** hiperboloide de uma folha **(b)** esfera **(c)** cone circular

**27.** **(a)** $z = x^2 - y^2$ **(b)** $xz = 1$

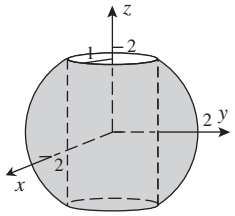
**29.** **(a)**



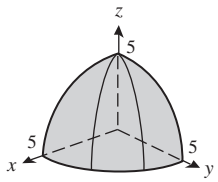

**(b)**



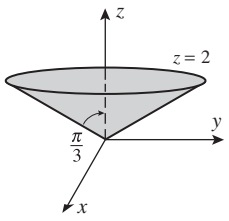

**(c)**



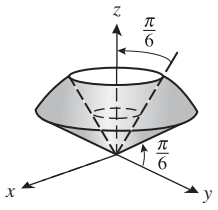

**31.** **(a)**




**(b)**




**(c)**




## ► Exercícios 12.1 (página 845)

**1.** $(-\infty, +\infty)$; $\mathbf{r}(\pi) = -\mathbf{i} - 3\pi\mathbf{j}$ **3.** $[2, +\infty)$; $\mathbf{r}(3) = -\mathbf{i} - \ln 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**5.** $\mathbf{r} = 3\cos t\mathbf{i} + (t + \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$ **7.** $x = 3t^2$, $y = -2$

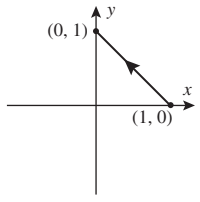
**9.** A reta no espaço bidimensional por (3, 0) com vetor diretor $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

**11.** A reta no espaço tridimensional que passa pelo ponto (0, −3, 1) e é paralela ao vetor $2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$.

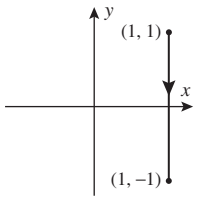
**13.** Uma elipse centrada em (0, 0, 1) no plano $z = 1$.

**15.** **(a)** inclinação $-\frac{3}{2}$ **(b)** $\left(\frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

**17.** **(a)**

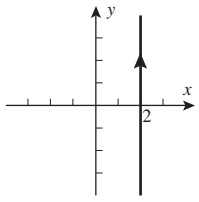



**(b)**

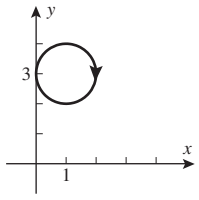



**19.** $\mathbf{r} = (1 - t)(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$, $0 \le t \le 1$

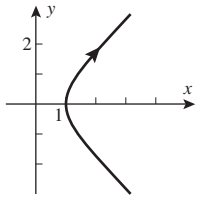
**21.** $x = 2$



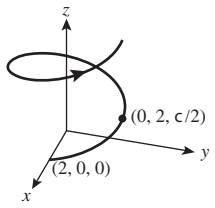

**23.** $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$



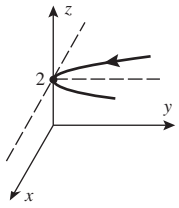

**25.** $x^2 - y^2 = 1$, $x \ge 1$




**27.**




**29.**

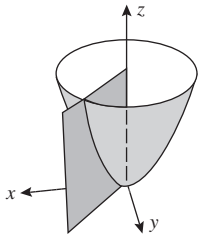



As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

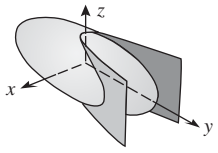
**31.** Falsa; o domínio natural de uma função vetorial é a *interseção* dos domínios de seus componentes.

**33.** Verdadeira; $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 (0 \le t \le 1)$ representa o segmento de reta no espaço que é percorrido de $\mathbf{r}_0$ até $\mathbf{r}_1$.

**35.** $x = t$, $y = t$, $z = 2t^2$



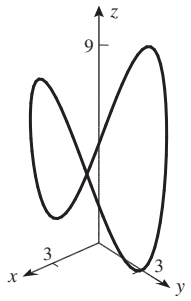

**37.** $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \pm \frac{1}{3}\sqrt{81 - 9t^2 - t^4}\,\mathbf{k}$ **43.** $c = 3/(2\pi)$




**47.** **(a)** III, pois a curva é um subconjunto do plano $y = -x$.
**(b)** IV, pois apenas $x$ é periódico em $t$ e $y$, $z$ crescem sem cota.
**(c)** II, pois todos os três componentes são periódicos em $t$.
**(d)** I, pois a projeção sobre o plano $yz$ é um círculo e a curva cresce sem cota na direção $x$.

**49.** **(a)** $x = 3\cos t,\ y = 3\operatorname{sen} t,\ z = 9\cos^2 t$

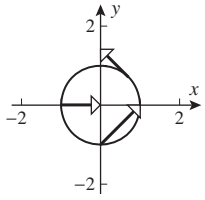
**(b)**



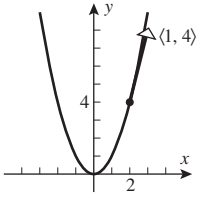

## ► Exercícios 12.2 (página 856)

**1.** $\langle \frac{1}{3}, 0 \rangle$ **3.** $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ **5.** **(a)** contínua **(b)** não contínua

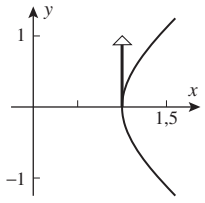
**7.**



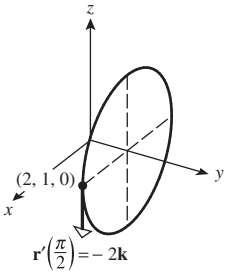

**9.** $(\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$ **11.** $\mathbf{r}'(2) = \langle 1, 4 \rangle$



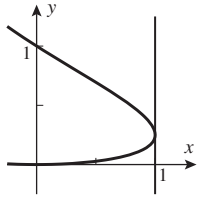

**13.** $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j}$




**15.** $\mathbf{r}'(\pi/2) = -2\mathbf{k}$




**17.**




**19.** $x = 1 + 2t,\ y = 2 - t,$

**21.** $x = 1 - \sqrt{3}\pi t,\ y = \sqrt{3} + \pi t,\ z = 1 + 3t$

**23.** $\mathbf{r} = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + t\left(2\mathbf{i} + \frac{3}{4}\mathbf{j}\right)$

**25.** $\mathbf{r} = (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) + t(-4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})$

**27.** **(a)** $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ **(b)** $-\mathbf{i} + \mathbf{k}$ **(c)** 0

**29.** $7t^6;\ 18t^5\mathbf{i} - 10t^4\mathbf{j}$

**31.** $3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + \mathbf{C}$

**33.** $\langle te^t - e^t,\ t\ln t - t \rangle + \mathbf{C}$ **35.** $\mathbf{j}$ **37.** $(5\sqrt{5} - 1)/3$

**39.** $\frac{52}{3}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**41.** Falsa; por exemplo, $\mathbf{r}(t) = \langle t, |t| \rangle$ é contínua em $t = 0$, mas o limite especificado não existe em $t = 0$.

**43.** Verdadeira; veja a definição de $\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt$.

**45.** $(t^2 + 1)\mathbf{i} + (t^3 - 1)\mathbf{j}$

**47.** $y(t) = (t^2 + 2)\mathbf{i} + (et - 1)\mathbf{j}$

**49.** **(a)** $(-2, 4, 6)$ e $(1, 1, -3)$ **(b)** $76°, 71°$ **51.** $68°$

## ► Exercícios 12.3 (página 866)

**1.** lisa **3.** não lisa, $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{0}$ **5.** $L = \frac{3}{2}$ **7.** $L = e - e^{-1}$

**9.** $L = 28$ **11.** $L = 2\pi\sqrt{10}$ **13.** $\mathbf{r}'(\tau) = 4\mathbf{i} + 8(4\tau + 1)\mathbf{j}$

**15.** $\mathbf{r}'(\tau) = 2\tau e^{\tau^2}\mathbf{i} - 8\tau e^{-\tau^2}\mathbf{j}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**17.** Falsa; $\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$ é o escalar que representa o comprimento de arco da curva no plano traçada por $\mathbf{r}(t)$ desde $t = a$ até $t = b$ (Teorema 12.3.1).

**19.** Falsa; $\mathbf{r}'$ não está definida no ponto que corresponde à origem.

**21.** **(a)** $x = \frac{s}{\sqrt{2}},\ y = \frac{s}{\sqrt{2}}$ **(b)** $x = y = z = \frac{s}{\sqrt{3}}$

**23.** **(a)** $x = 1 + \frac{s}{3},\ y = 3 - \frac{2s}{3},\ z = 4 + \frac{2s}{3}$ **(b)** $\left\langle \frac{28}{3}, -\frac{41}{3}, \frac{62}{3} \right\rangle$

**25.** $x = 3 + \cos s,\ y = 2 + \operatorname{sen} s,\ 0 \le s \le 2\pi$

**27.** $x = \frac{1}{3}[(3s + 1)^{2/3} - 1]^{3/2},\ y = \frac{1}{2}[(3s + 1)^{2/3} - 1],\ s \ge 0$

**29.** $x = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\cos\left[\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right],$

$y = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\operatorname{sen}\left[\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right],$

$0 \le s \le \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$

**33.** $x = 2a\arccos[1 - s/(4a)]$

$\quad - 2a(1 - [1 - s/(4a)]^2)^{1/2}(2[1 - s/(4a)]^2 - 1),$

$y = \dfrac{s(8a - s)}{8a}$ com $0 \le s \le 8a$

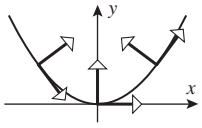
**35.** **(a)** $9/2$ **(b)** $9 - 2\sqrt{6}$ **37.** **(a)** $\sqrt{3}(1 - e^{-2})$ **(b)** $4\sqrt{5}$

**39.** **(a)** $g(\tau) = \pi(\tau)$ **(b)** $g(\tau) = \pi(1 - \tau)$ **41.** 44 pol.

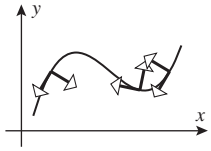
**43.** **(a)** $2t + (1/t)$ **(b)** $2t + \dfrac{1}{t}$ **(c)** $8 + \ln 3$

## ► Exercícios 12.4 (página 872)

**1.** **(a)**




**(b)**




**5.** $\mathbf{T}(1) = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j},\ \mathbf{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$

**7.** $\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j},\ \mathbf{N}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$

**9.** $\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{k},\ \mathbf{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\mathbf{j}$

**11.** $\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k},\ \mathbf{N}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$

**13.** $x = s,\ y = 1$ **15.** $\mathbf{B} = \frac{4}{5}\cos t\,\mathbf{i} - \frac{4}{5}\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} - \frac{3}{5}\mathbf{k}$ **17.** $\mathbf{B} = -\mathbf{k}$

**19.** $\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{j}),\ \mathbf{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}),\ \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{k};$

retificador: $x + y = \sqrt{2}$; osculador: $z = 1$; normal: $-x + y = 0$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**21.** Falsa; $\mathbf{T}(t)$ aponta no sentido do parâmetro crescente, mas pode não ser ortogonal a $\mathbf{r}(t)$. Por exemplo, se $\mathbf{r}(t) = \langle t, t \rangle$, então $\mathbf{T}(t) = \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \rangle$ é paralelo a $\mathbf{r}(t)$.

**23.** Verdadeira; $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$, o vetor tangente unitário, e $\mathbf{N}(s) = \dfrac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|}$, o vetor normal unitário, são ortogonais, portanto $\mathbf{r}'(s)$ e $\mathbf{r}''(s)$ são ortogonais.

## ► Exercícios 12.5 (página 879)

**1.** $\kappa \approx 2$ **3.** **(a)** I é a curvatura de II **(b)** I é a curvatura de II

**5.** $\dfrac{6}{|t|(4 + 9t^2)^{3/2}}$ **7.** $\dfrac{12e^{2t}}{(9e^{6t} + e^{-2t})^{3/2}}$ **9.** $\frac{4}{17}$ **11.** $\dfrac{1}{2\cosh^2 t}$

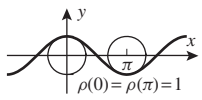
**13.** $\kappa = \frac{2}{5},\ \rho = \frac{5}{2}$ **15.** $\kappa = \dfrac{\sqrt{2}}{3},\ \rho = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **17.** $\kappa = \frac{1}{4}$

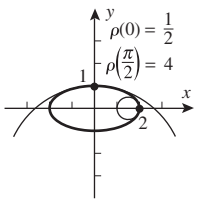
As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

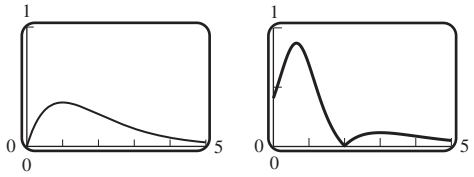
**19.** Verdadeira; veja o Exemplo 1: um círculo de raio $a$ tem curvatura constante $1/a$.

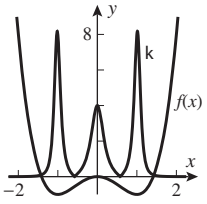
**21.** Falsa; veja a Definição 12.5.1: a curvatura do gráfico de $\mathbf{r}(s)$ é $\|\mathbf{r}''(s)\|$, que é o comprimento de $\mathbf{r}''(s)$.

**25.** 1 **27.** $\dfrac{e^{-1}}{(1 + e^{-2})^{3/2}}$ **29.** $\frac{96}{125}$ **31.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

**33.** **(a)** 

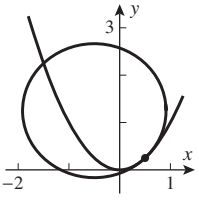
**(b)** 


**35.** 


**37.** **(a)** $\kappa = \dfrac{|12x^2 - 4|}{[1 + (4x^3 - 4x)^2]^{3/2}}$ **(b)** 

**(c)** $\rho = \frac{1}{4}$ se $x = 0$ e $\rho = \frac{1}{8}$ se $x = \pm 1$

**41.** $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ **43.** $\frac{2}{3}$ **45.** $\rho = 2|p|$ **47.** $(3, 0), (-3, 0)$

**51.** **(b)** $\rho = \sqrt{2}$ **(c)** 


**55.** $a = \dfrac{1}{2r}$

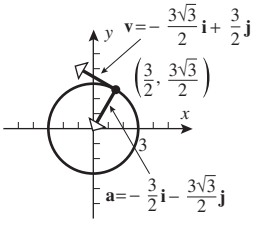
**63.** $\tau = \dfrac{2}{(t^2 + 2)^2}$

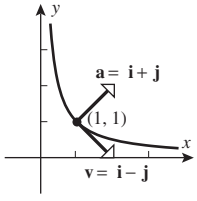
**65.** $\tau = -\dfrac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$

## ► Exercícios 12.6 (página 891)

**1.** $\mathbf{v}(t) = -3 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = -3\cos t\,\mathbf{i} - 3 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}(t)\| = 3$

**3.** $\mathbf{v}(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$
$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}$

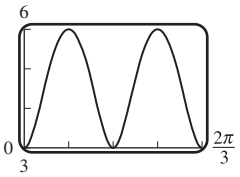



**5.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3}$, $\mathbf{a} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

**7.** $\mathbf{v} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{5}$, $\mathbf{a} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$

**13.** velocidade mínima $3\sqrt{2}$ quando $\mathbf{r} = 24\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

**15.** **(a)** 

**(b)** velocidade escalar máxima = 6, velocidade escalar mínima = 3
**(d)** A velocidade escalar máxima ocorre primeiro quando $t = \pi/6$.

**17.** $\mathbf{v}(t) = (1 - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t - 1)\mathbf{j}$;
$\mathbf{r}(t) = (t + \cos t - 1)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t - t + 1)\mathbf{j}$

**19.** $\mathbf{v}(t) = (1 - \cos t)\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$;
$\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t - 1)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

**21.** 15° **23.** **(a)** $0{,}7\mathbf{i} + 2{,}7\mathbf{j} - 3{,}4\mathbf{k}$ **(b)** $\mathbf{r}_0 = -0{,}7\mathbf{i} - 2{,}9\mathbf{j} + 4{,}8\mathbf{k}$

**25.** $\Delta\mathbf{r} = 8\mathbf{i} + \frac{26}{3}\mathbf{j}$, $s = (13\sqrt{13} - 5\sqrt{5})/3$

**27.** $\Delta\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \sqrt{2}\ln 3\mathbf{k}$; $s = \frac{8}{3}$

**31.** **(a)** $a_T = 0$, $a_N = \sqrt{2}$ **(b)** $a_T\mathbf{T} = 0$, $a_N\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ **(c)** $1/\sqrt{2}$

**33.** **(a)** $a_T = 2\sqrt{5}$, $a_N = 2\sqrt{5}$ **(b)** $a_T\mathbf{T} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $a_N\mathbf{N} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
**(c)** $2/\sqrt{5}$

**35.** **(a)** $a_T = -7/\sqrt{6}$, $a_N = \sqrt{53/6}$
**(b)** $a_T\mathbf{T} = -\frac{7}{6}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $a_N\mathbf{N} = \frac{13}{6}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{7}{6}\mathbf{k}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt{53}}{6\sqrt{6}}$

**37.** $a_T = -3$, $a_N = 2$, $\mathbf{T} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{N} = \mathbf{i}$ **39.** $-3/2$

**41.** $a_N = 8{,}41 \times 10^{10}$ km/s$^2$

**43.** $a_N = 18/(1 + 4x^2)^{3/2}$ **45.** $a_N = 0$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**47.** Verdadeira; os vetores velocidade e tangente unitário têm a mesma direção, portanto, são paralelos.

**49.** Falsa; nesse caso, os vetores velocidade e aceleração serão paralelos, mas podem ter sentido oposto.

**53.** ≈ 257,20 N

**55.** $40\sqrt{3}$ pés **57.** 800 pés/s **59.** 15° ou 75° **61.** **(c)** ≈ 14,942 pés

**63.** **(a)** $\rho = 176{,}78$ m **(b)** $\frac{125}{4}$ m

**65.** **(b)** $R$ é máxima quando $\alpha = 45°$, valor máximo $v_0^2/g$

**67.** **(a)** 2,62 s **(b)** 181,5 pés

**69.** **(a)** $v_0 = 83$ pés/s, $\alpha \approx 8°$ **(b)** 268,76 pés

## ► Exercícios 12.7 (página 901)

**7.** 7,75 km/s **9.** 10,88 km/s

**11.** **(a)** distância mínima = 220.680 milhas,
distância máxima = 246.960 milhas **(b)** 27,5 dias

**13.** **(a)** 17.224 milhas/h **(b)** $e \approx 0{,}071$, altitude do apogeu = 819 milhas

## ► Capítulo 12 Exercícios de Revisão (página 902)

**3.** O círculo de raio 3 centrado na origem no plano $xy$.

**5.** A parábola de vértice em $(-2, 0, -1)$ abrindo para cima no plano vertical $x = -2$.

**11.** $x = 1 + t$, $y = -t$, $z = t$ **13.** $(\operatorname{sen} t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{C}$

**15.** $y(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + 1\right)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}$ **17.** 15/4

**19.** $\mathbf{r}(s) = \dfrac{s-3}{3}\mathbf{i} + \dfrac{12 - 2s}{3}\mathbf{j} + \dfrac{9 + 2s}{3}\mathbf{k}$ **25.** 3/5 **27.** 0

**29.** **(a)** velocidade escalar **(b)** distância percorrida
**(c)** distância da partícula até a origem

**33.** **(a)** $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{6}t^4 + t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}t^2 + 2t\right)\mathbf{j} - \left(\frac{1}{4}\cos 2t + t - \frac{1}{4}\right)\mathbf{k}$
**(b)** 3,475 **35.** 10,65 km/s **37.** 24,78 pés

## ► Capítulo 12 Estabelecendo conexões (página 904)

Não fornecemos resposta de exercícios de Estabelecendo Conexões para os quais houver mais de uma resposta correta possível. Amostras de respostas destas questões podem ser obtidas na Internet.

**1.** **(c)** (i) $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$ (ii) $\mathbf{N} = -\mathbf{j}$

**2.** **(b)** (i) $\mathbf{N} = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}$

$$\mathbf{N} = \frac{-(4t + 18t^3)\mathbf{i} + (2 - 18t^4)\mathbf{j} + (6t + 12t^3)\mathbf{k}}{2\sqrt{81t^8 + 117t^6 + 54t^4 + 13t^2 + 1}}$$

**3.** **(c)** $\kappa(s) \to +\infty$, portanto, a espiral se enrola cada vez mais apertada.

**4.** semicírculo: 53,479 pés; quarto de círculo: 60,976 pés; ponto: 64,001 pés.

## ► Exercícios 13.1 (página 914)

**1.** **(a)** 5 **(b)** 3 **(c)** 1 **(d)** −2 **(e)** $9a^3 + 1$ **(f)** $a^3b^2 - a^2b^3 + 1$

**3.** **(a)** $x^2 - y^2 + 3$ **(b)** $3x^3y^4 + 3$ **5.** $x^3e^{x^3(3y+1)}$

**7.** **(a)** $t^2 + 3t^{10}$ **(b)** 0 **(c)** 3.076

**9.** **(a)** 2,5 mg/L **(b)** $C(100, t) = 20(e^{-0{,}2t} - e^{-t})$
**(c)** $C(x, 1) = 0{,}2x(e^{-0{,}2} - e^{-1}) \approx 0{,}09x$

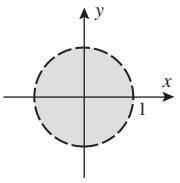
**11.** **(a)** WCI = 17,8°F **(b)** WCI = 22,6°F **13.** **(a)** 30°F **(b)** 22,5°F

**15.** **(a)** 66% **(b)** 73,5% **(c)** 60,6%

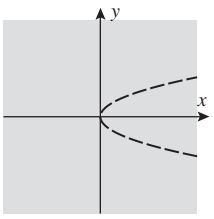
**17.** **(a)** 19 **(b)** −9 **(c)** 3 **(d)** $a^6 + 3$ **(e)** $-t^8 + 3$
**(f)** $(a + b)(a - b)^2b^3 + 3$

**19.** $(y+1)e^{x^2(y+1)z^2}$ **21.** **(a)** $80\sqrt{\pi}$ **(b)** $n(n+1)/2$

**23.**




**25.**



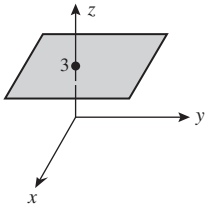

**27.** **(a)** todos os pontos na ou acima da reta $y = -2$ **(b)** todos os pontos na ou dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ **(c)** todos os pontos do espaço tridimensional

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

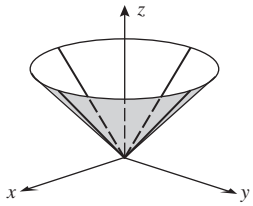
**29.** Verdadeira; o intervalo [0, 1] é a interseção dos domínios de arc sen $t$ e $\sqrt{t}$.

**31.** Falsa; o domínio natural é um cilindro sólido infinito.

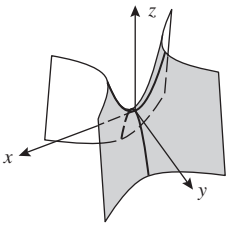
**33.**



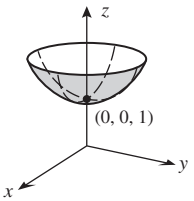

**35.**



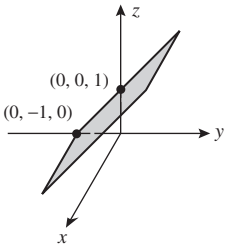

**37.**




**39.**




**41.**



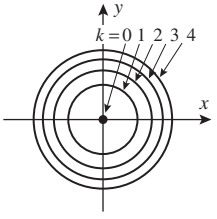

**43.** **(a)** hipérboles
**(b)** parábolas
**(c)** elipses não circulares
**(d)** retas

**45.** **(a)** \$130
**(b)** \$275

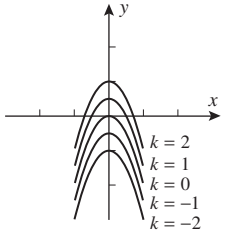
**47.** **(a)** $1 - x^2 - y^2$
**(b)** $\sqrt{x^2 + y^2}$
**(c)** $x^2 + y^2$

**49.** **(a)** $A$ **(b)** $B$ **(c)** crescer **(d)** decrescer **(e)** crescer **(f)** decrescer

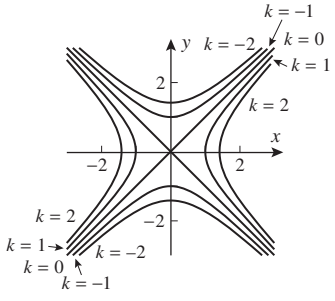
**51.**



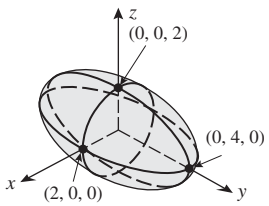

**53.**



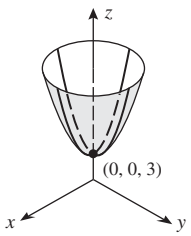

**55.**




**57.**




**59.**



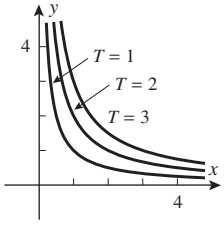

**61.** esferas concêntricas, centro em comum em (2, 0, 0)

**63.** cilindros concêntricos, eixo comum o eixo $y$

**65.** **(a)** $x^2 - 2x^3 + 3xy = 0$ **(b)** $x^2 - 2x^3 + 3xy = 0$
**(c)** $x^2 - 2x^3 + 3xy = -18$

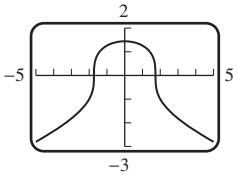
**67.** **(a)** $x^2 + y^2 - z = 5$ **(b)** $x^2 + y^2 - z = -2$ **(c)** $x^2 + y^2 - z = 0$

**69.** **(a)**

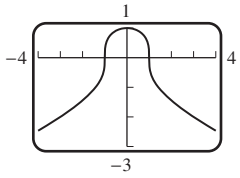



**(b)** o caminho $xy = 4$

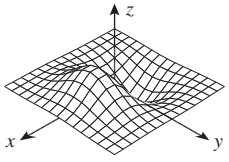
**71.** **(a)**



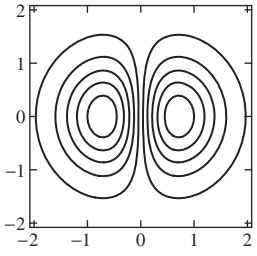

**(b)**




**73.** **(a)**




**(b)**




**75.** **(a)** O gráfico de $g$ é o gráfico de $f$ deslocado uma unidade no sentido do eixo $x$ positivo.
**(b)** O gráfico de $g$ é o gráfico de $f$ deslocado uma unidade para cima no sentido do eixo $z$ positivo.
**(c)** O gráfico de $g$ é o gráfico de $f$ deslocado uma unidade para baixo no sentido do eixo $y$ negativo e então invertido em relação ao plano $z = 0$.

## ► Exercícios 13.2 (página 925)

**1.** 35 **3.** −8 **5.** 0

**7.** **(a)** O limite não existe ao longo de $x = 0$
**(b)** O limite não existe ao longo de $x = 0$

**9.** 1 **11.** 0 **13.** 0 **15.** o limite não existe **17.** $\frac{8}{3}$ **19.** 0

**21.** o limite não existe **23.** 0 **25.** 0 **27.** 0

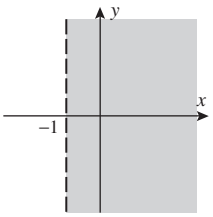
As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**29.** Verdadeira; pela definição de conjunto aberto.

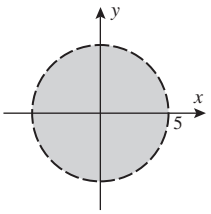
**31.** Falsa; seja $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ e considere $g(x, y) = -f(x, y)$.

**33.** **(a)** não **(d)** não; sim **37.** $-\pi/2$ **39.** não

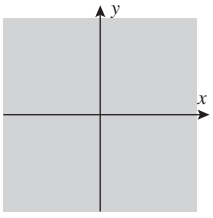
**41.**



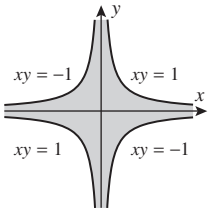

**43.**




**45.**




**47.**




**49.** todo o espaço tridimensional

**51.** todos os pontos que não estão no cilindro $x^2 + z^2 = 1$

## ► Exercícios 13.3 (página 936)

**1.** **(a)** $9x^2y^2$ **(b)** $6x^3y$ **(c)** $9y^2$ **(d)** $9x^2$ **(e)** $6y$ **(f)** $6x^3$ **(g)** 36 **(h)** 12

**3.** $18xy - 15x^4y,\ 9x^2 - 3x^5$

**5.** $(16x + 40)(x^2 + 5x - 2y)^7,\ -16(x^2 + 5x - 2y)^7$

**7.** $-\dfrac{7}{q}e^{-7p/q},\ \dfrac{7p}{q^2}e^{-7p/q}$

**9.** $(15x^2y + 7y^2)\cos(5x^3y + 7xy^2),\ (5x^3 + 14xy)\cos(5x^3y + 7xy^2)$

**11.** **(a)** $\frac{3}{8}$ **(b)** $\frac{1}{4}$ **13.** **(a)** $-4\cos 7$ **(b)** $2\cos 7$

**15.** $\partial z/\partial x = -4;\ \partial z/\partial y = \frac{1}{2}$ **17.** **(a)** 4,9 **(b)** 1,2

**19.** $z = f(x, y)$ tem II como o seu gráfico, $f_x$ tem I como o seu gráfico e $f_y$ tem III como o seu gráfico.

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**21.** Verdadeira; com $y = 2$, $f(x, 2) = c$ é uma função constante de $x$.

**23.** Verdadeira; $z$ deve ser uma função linear de $x$ e $y$.

**25.** $8xy^3e^{x^2y^3},\ 12x^2y^2e^{x^2y^3}$

**27.** $x^3/(y^{3/5} + x) + 3x^2\ln(1 + xy^{-3/5}),\ -\frac{3}{5}x^4/(y^{8/5} + xy)$

**29.** $-\dfrac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},\ \dfrac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$

**31.** $(3/2)x^2y(5x^2 - 7)(3x^5y - 7x^3y)^{-1/2}$
$(1/2)x^3(3x^2 - 7)(3x^5y - 7x^3y)^{-1/2}$

**33.** $\dfrac{y^{-1/2}}{y^2 + x^2},\ -\dfrac{xy^{-3/2}}{y^2 + x^2} - \dfrac{3}{2}y^{-5/2}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

**35.** $-\frac{4}{3}y^2\sec^2 x(y^2\operatorname{tg} x)^{-7/3},\ -\frac{8}{3}y\operatorname{tg} x(y^2\operatorname{tg} x)^{-7/3}$

**37.** $-6, -21$ **39.** $1/\sqrt{17}, 8/\sqrt{17}$

**41.** **(a)** $2xy^4z^3 + y$ **(b)** $4x^2y^3z^3 + x$ **(c)** $3x^2y^4z^2 + 2z$ **(d)** $2y^4z^3 + y$ **(e)** $32z^3 + 1$ **(f)** 438

**43.** $2z/x,\ z/y,\ \ln(x^2y\cos z) - z\operatorname{tg} z$

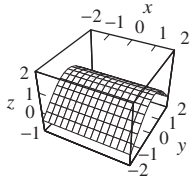
**45.** $-y^2z^3/(1 + x^2y^4z^6),\ -2xyz^3/(1 + x^2y^4z^6),\ -3xy^2z^2/(1 + x^2y^4z^6)$

**47.** $yze^z\cos(xz),\ e^z\operatorname{sen}(xz),\ ye^z(\operatorname{sen}(xz) + x\cos(xz))$

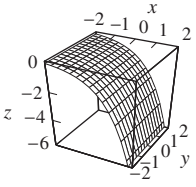
**49.** $x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ y/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**51.** **(a)** $e$ **(b)** $2e$ **(c)** $e$

**53.** **(a)**




**(b)**




**55.** 4 **57.** $-2$

**59.** **(a)** $\partial V/\partial r = 2\pi rh$ **(b)** $\partial V/\partial h = \pi r^2$ **(c)** $48\pi$ **(d)** $64\pi$

**61.** **(a)** $\dfrac{1}{5}\dfrac{\text{lb}}{\text{pol}^2\cdot\text{K}}$ **(b)** $-\dfrac{25}{8}\dfrac{\text{pol}^5}{\text{lb}}$

**63.** **(a)** $\dfrac{\partial V}{\partial l} = 6$ **(b)** $\dfrac{\partial V}{\partial w} = 15$ **(c)** $\dfrac{\partial V}{\partial h} = 10$

**67.** **(a)** $\pm\sqrt{6}/4$ **69.** $-x/z, -y/z$

**71.** $-\dfrac{2x + yz^2\cos(xyz)}{xyz\cos(xyz) + \operatorname{sen}(xyz)};\ -\dfrac{xz^2\cos(xyz)}{xyz\cos(xyz) + \operatorname{sen}(xyz)}$

**73.** $-x/w, -y/w, -z/w$

**75.** $-\dfrac{yzw\cos(xyz)}{2w + \operatorname{sen}(xyz)},\ -\dfrac{xzw\cos(xyz)}{2w + \operatorname{sen}(xyz)},\ -\dfrac{xyw\cos(xyz)}{2w + \operatorname{sen}(xyz)}$

**77.** $e^{x^2},\ -e^{y^2}$

**79.** $f_x(x, y) = 2xy^3\operatorname{sen}(x^6y^9),\ f_y(x, y) = 3x^2y^2\operatorname{sen}(x^6y^9)$

**81.** **(a)** $-\dfrac{\cos y}{4\sqrt{x^3}}$ **(b)** $-\sqrt{x}\cos y$ **(c)** $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen} y$ **(d)** $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen} y$

**83.** **(a)** $6\cos(3x^2 + 6y^2) - 36x^2\operatorname{sen}(3x^2 + 6y^2)$
**(b)** $12\cos(3x^2 + 6y^2) - 144y^2\operatorname{sen}(3x^2 + 6y^2)$
**(c)** $-72xy\operatorname{sen}(3x^2 + 6y^2)$ **(d)** $-72xy\operatorname{sen}(3x^2 + 6y^2)$

**85.** $-32y^3$ **87.** $-e^x\operatorname{sen} y$ **89.** $\dfrac{20}{(4x - 5y)^2}$ **91.** $\dfrac{2(x - y)}{(x + y)^3}$

**93.** **(a)** $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ **(b)** $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}$ **(c)** $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}$ **(d)** $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^3\partial x}$

**95.** **(a)** $30xy^4 - 4$ **(b)** $60x^2y^3$ **(c)** $60x^3y^2$

**97.** **(a)** $-30$ **(b)** $-125$ **(c)** 150

**99.** **(a)** $15x^2y^4z^7 + 2y$ **(b)** $35x^3y^4z^6 + 3y^2$ **(c)** $21x^2y^5z^6$ **(d)** $42x^3y^5z^5$ **(e)** $140x^3y^3z^6 + 6y$ **(f)** $30xy^4z^7$ **(g)** $105x^2y^4z^6$ **(h)** $210xy^4z^6$

**107.** $\dfrac{\partial f}{\partial v} = 8vw^3x^4y^5,\ \dfrac{\partial f}{\partial w} = 12v^2w^2x^4y^5,\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 16v^2w^3x^3y^5,$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 20v^2w^3x^4y^4$

**109.** $\dfrac{\partial f}{\partial v_1} = \dfrac{2v_1}{v_3^2 + v_4^2},\ \dfrac{\partial f}{\partial v_2} = \dfrac{-2v_2}{v_3^2 + v_4^2},\ \dfrac{\partial f}{\partial v_3} = \dfrac{-2v_3(v_1^2 - v_2^2)}{(v_3^2 + v_4^2)^2},$
$\dfrac{\partial f}{\partial v_4} = \dfrac{-2v_4(v_1^2 - v_2^2)}{(v_3^2 + v_4^2)^2}$

**111.** **(a)** 0 **(b)** 0 **(c)** 0 **(d)** 0 **(e)** $2(1 + yw)e^{yw}\operatorname{sen} z\cos z$ **(f)** $2xw(2 + yw)e^{yw}\operatorname{sen} z\cos z$

**113.** $-\mathbf{i}\operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

**115.** **(a)** plano $xy$, $12x^2 + 6x$ **(b)** $y \neq 0$, $-3x^2/y^2$

**117.** $f_x(2, -1) = 11, f_y(2, -1) = -8$

**119.** **(b)** não existe se $y \neq 0$ e $x = -y$

## ► Exercícios 13.4 (página 947)

**1.** 5,04 **3.** 4,14 **9.** $dz = 7\,dx - 2\,dy$ **11.** $dz = 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy$

**13.** $dz = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}\,dx + \dfrac{x}{1 + x^2y^2}\,dy$ **15.** $dw = 8\,dx - 3dy + 4\,dz$

**17.** $dw = 3x^2y^2z\,dx + 2x^3yz\,dy + x^3y^2\,dz$

**19.** $dw = \dfrac{yz}{1 + x^2y^2z^2}\,dx + \dfrac{xz}{1 + x^2y^2z^2}\,dy + \dfrac{xy}{1 + x^2y^2z^2}\,dz$

**21.** $df = 0{,}10,\ \Delta f = 0{,}1009$ **23.** $df = 0{,}03,\ \Delta f \approx 0{,}029412$

**25.** $df = 0{,}96,\ \Delta f \approx 0{,}97929$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**27.** Falsa; veja a discussão no início daquela seção.

**29.** Verdadeira; veja os Teoremas 13.4.3 e 13.4.4.

**31.** O aumento da área do retângulo é dado pela soma das áreas dos três pequenos retângulos e a diferencial total é dada pela soma das áreas dos retângulos superior à esquerda e inferior à direita.

**33.** **(a)** $L = \frac{1}{5} - \frac{4}{125}(x - 4) - \frac{3}{125}(y - 3)$ **(b)** 0,000176603

**35.** **(a)** $L = 0$ **(b)** 0,0024

**37.** **(a)** $L = 6 + 6(x - 1) + 3(y - 2) + 2(z - 3)$ **(b)** $-0{,}000481$

**39.** **(a)** $L = e + e(x - 1) - e(y + 1) - e(z + 1)$ **(b)** 0,01554

**45.** 0,5 **47.** 1, 1, $-1$, 2 **49.** $(-1, 1)$ **51.** $(1, 0, 1)$ **53.** 8%

**55.** $r\%$ **57.** 0, 3%

**59.** **(a)** $(r + s)\%$ **(b)** $(r + s)\%$ **(c)** $(2r + 3s)\%$ **(d)** $\left(3r + \dfrac{s}{2}\right)\%$

**61.** $\approx 39\ \text{cm}^2$

## ► Exercícios 13.5 (página 956)

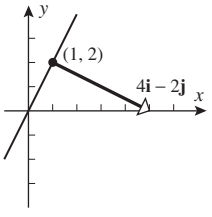
1. $42t^{13}$ 3. $3t^{-2}\operatorname{sen}(1/t)$ 5. $-\frac{10}{3}t^{7/3}e^{1-t^{10/3}}$ 7. $\dfrac{dw}{dt} = 165t^{32}$
9. $-2t\cos t^2$ 11. 3.264 13. 0
17. $24u^2v^2 - 16uv^3 - 2v + 3,\ 16u^3v - 24u^2v^2 - 2u - 3$
19. $-\dfrac{2\operatorname{sen} u}{3\operatorname{sen} v}, -\dfrac{2\cos u\cos v}{3\operatorname{sen}^2 v}$ 21. $e^u, 0$
23. $3r^2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - 4r^3\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta,$
$-2r^3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + r^4\operatorname{sen}^4\theta + r^3\cos^3\theta - 3r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$
25. $\dfrac{x^2+y^2}{4x^2y^3}, \dfrac{y^2-3x^2}{4xy^4}$ 27. $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{2r\cos^2\theta}{r^2\cos^2\theta+1}, \dfrac{\partial z}{\partial\theta} = \dfrac{-2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2\cos^2\theta+1}$
29. $\dfrac{dw}{d\rho} = 2\rho(4\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi), \dfrac{\partial w}{\partial\phi} = 6\rho^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi, \dfrac{dw}{d\theta} = 0$
31. $-\pi$ 33. $\sqrt{3}e^{\sqrt{3}}, (2-4\sqrt{3})e^{\sqrt{3}}$ 35. $-0{,}779$ rad/s

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

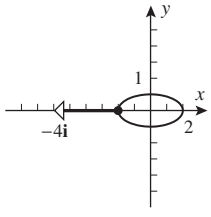
37. Falsa; os símbolos $\partial z$ e $\partial x$ não têm sentido individual.
39. Falsa; considere $z = xy, x = t, y = t$.
41. $-\dfrac{2xy^3}{3x^2y^2 - \operatorname{sen} y}$
43. $-\dfrac{ye^{xy}}{xe^{xy} + ye^y + e^y}$ 45. $\dfrac{2x+yz}{6yz-xy}, \dfrac{xz-3z^2}{6yz-xy}$
47. $\dfrac{ye^x}{15\cos 3z + 3}, \dfrac{e^x}{15\cos 3z + 3}$
61. $\dfrac{\partial w}{\partial\rho} = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta)\dfrac{\partial w}{\partial y} + (\cos\phi)\dfrac{\partial w}{\partial z},$
$\dfrac{\partial w}{\partial\phi} = (\rho\cos\phi\cos\theta)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (\rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta)\dfrac{\partial w}{\partial y} - (\rho\operatorname{sen}\phi)\dfrac{\partial w}{\partial z},$
$\dfrac{\partial w}{\partial\theta} = -(\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\dfrac{\partial w}{\partial y}$
65. (a) $\dfrac{dw}{dt} = \displaystyle\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$ (b) $\dfrac{\partial w}{\partial v_j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial v_j}$, $j = 1, 2, 3$

## ► Exercícios 13.6 (página 968)

1. $6\sqrt{2}$ 3. $-3/\sqrt{10}$ 5. $-320$ 7. $-314/741$ 9. 0 11. $-8\sqrt{2}$
13. $\sqrt{2}/4$ 15. $5/\sqrt{3}$ 17. $-8/63$ 19. $1/2 + \sqrt{3}/8$ 21. $2\sqrt{2}$
23. $1/\sqrt{5}$ 25. $-\frac{3}{2}e$ 27. $3/\sqrt{11}$ 29. (a) 5 (b) 10 (c) $-5\sqrt{5}$
31. III 33. $\cos(7y^2 - 7xy)(-7y\mathbf{i} + (14y - 7x)\mathbf{j})$
35. $\left(\dfrac{-84y}{(6x-7y)^2}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{84x}{(6x-7y)^2}\right)\mathbf{j}$ 37. $-9x^8\mathbf{i} - 3y^2\mathbf{j} + 12z^{11}\mathbf{k}$
39. $\nabla w = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} + \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}$
41. $40\mathbf{i} + 32\mathbf{j}$ 43. $-36\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ 45. $4(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
47.



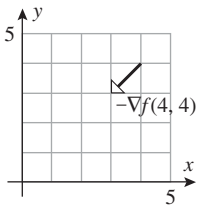

49.



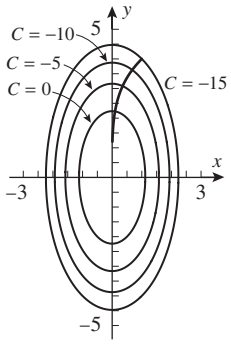

51. $\pm(-4\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{17}$ 53. $\mathbf{u} = (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j})/\sqrt{13}, \|\nabla f(-1, 1)\| = 4\sqrt{13}$
55. $\mathbf{u} = (4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})/5, \|\nabla f(4, -3)\| = 1$ 57. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j}), 3\sqrt{2}$
59. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j}), \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
61. $\mathbf{u} = -(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})/\sqrt{10}, -\|\nabla f(-1, -3)\| = -2\sqrt{10}$
63. $\mathbf{u} = (3\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{10}, -\|\nabla f(\pi/6, \pi/4)\| = -\sqrt{5}$
65. $(\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 12\mathbf{k})/\sqrt{266}, -\sqrt{266}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

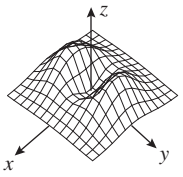
67. Falsa; são iguais. 69. Falsa; sejam $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ e $f(x, y) = y$.
71. $8/\sqrt{29}$
73. (a) $\approx 1/\sqrt{2}$
(b)




75. $9x^2 + y^2 = 9$
77. $36/\sqrt{17}$
79. (a) $2e^{-\pi/2}\mathbf{i}$
81. $-\frac{5}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$
87. $x(t) = e^{-8t}, y(t) = 4e^{-2t}$
89.




91. (a)




(c) $\nabla f = [2x - 2x(x^2 + 3y^2)]e^{-(x^2+y^2)}\mathbf{i}$
$+ [6y - 2y(x^2 + 3y^2)]e^{-(x^2+y^2)}\mathbf{j}$
(d) $x = y = 0$ ou $x = 0, y = \pm 1$ ou $x = \pm 1, y = 0$

## ► Exercícios 13.7 (página 975)

1. (a) $x + y + 2z = 6$ (b) $x = 2 + t, y = 2 + t, z = 1 + 2t$
(c) 35,26°
3. plano tangente: $3x - 4z = -25$;
reta normal: $x = -3 + (3t/4), y = 0, z = 4 - t$
5. plano tangente: $9x - 4y - 10z = -76$;
reta normal: $x = -4 + 9t, y = 5 - 4t, z = 2 - 10t$
7. plano tangente: $48x - 14y - z = 64$;
reta normal: $x = 1 + 48t, y = -2 - 14t, z = 12 - t$
9. plano tangente: $x - y - z = 0$;
reta normal: $x = 1 + t, y = -t, z = 1 - t$
11. plano tangente: $3y - z = -1$;
reta normal: $x = \pi/6, y = 3t, z = 1 - t$
13. (a) todos os pontos no eixo $x$ ou no eixo $y$ (b) $(0, -2, -4)$
15. $\left(\frac{1}{2}, -2, -\frac{3}{4}\right)$ 17. (a) $(-2, 1, 5), (0, 3, 9)$ (b) $\dfrac{4}{3\sqrt{14}}, \dfrac{4}{\sqrt{222}}$

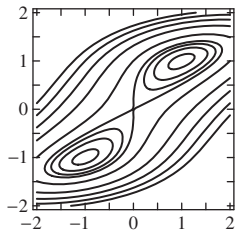
As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

19. Falsa; os gradientes só precisam ser paralelos.
21. Falsa; veja a Fórmula (15) da Seção 13.4.
23. $\pm\dfrac{1}{\sqrt{227}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 15\mathbf{k})$ 27. $(1, 2/3, 2/3), (-1, -2/3, -2/3)$
29. $x = 1 + 8t, y = -1 + 5t, z = 2 + 6t$
31. $x = 3 + 4t, y = -3 - 4t, z = 4 - 3t$

## ► Exercícios 13.8 (página 985)

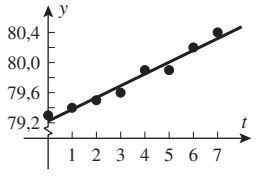
1. (a) mínimo em $(2, -1)$, nenhum máximo
(b) máximo em $(0, 0)$, nenhum mínimo
(c) nenhum máximo nem mínimo
3. mínimo em $(3, -2)$, nenhum máximo 5. mínimo relativo em $(0, 0)$
7. mínimo relativo em $(0, 0)$; pontos de sela em $(\pm 2, 1)$
9. ponto de sela em $(1, -2)$ 11. mínimo relativo em $(2, -1)$
13. mínimos relativos em $(-1, -1)$ e $(1, 1)$ 15. ponto de sela em $(0, 0)$
17. nenhum ponto crítico 19. máximo relativo em $(-1, 0)$

**21.** ponto de sela em (0, 0); mínimos relativos em (1, 1) e (−1, −1)

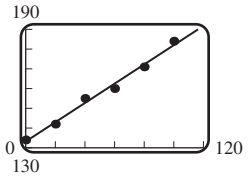


As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**23.** Falsa; seja $f(x, y) = y$.
**25.** Verdadeira; isso segue do Teorema 13.8.6.
**27.** **(b)** mínimo relativo em (0, 0)
**31.** máximo absoluto 0, mínimo absoluto −12
**33.** máximo absoluto 3, mínimo absoluto −1
**35.** máximo absoluto $\frac{33}{4}$, mínimo absoluto $-\frac{1}{4}$
**37.** 16, 16, 16
**39.** máximo em (1, 2, 2)
**41.** $2a/\sqrt{3}, 2a/\sqrt{3}, 2a/\sqrt{3}$
**43.** comprimento e largura 2 pés, altura 4 pés
**45.** **(a)** $x = 0$; mínimo −3, máximo 0; $x = 1$; mínimo 3, máximo 13/3; $y = 0$; mínimo 0, máximo 4; $y = 1$; mínimo −3, máximo 3 **(b)** $y = x$: mínimo 0, máximo 3; $y = 1 - x$: máximo 4, mínimo −3 **(c)** mínimo −3, máximo 13/3
**47.** comprimento e largura $\sqrt[3]{2V}$, altura $\sqrt[3]{2V}/2$ **51.** $y = \frac{3}{4}x + \frac{19}{12}$
**53.** $y = 0{,}5x + 0{,}8$
**55.** **(a)** $y = 79{,}22 + 0{,}1571t$ **(b)** **(c)** em torno de 81,6 anos

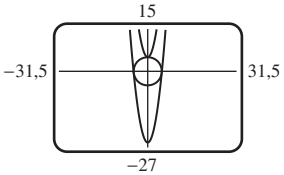


**57.** **(a)** $P = \frac{2798}{21} + \frac{171}{350}T$ **(b)** **(c)** $T \approx -272{,}7096$°C



## ► Exercícios 13.9 (página 996)

**1.** **(a)** 4 **3.** **(a)**

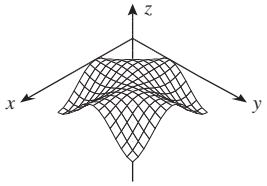


**(c)** máximo $\frac{101}{4}$, mínimo −5

**5.** máximo $\sqrt{2}$ em $(-\sqrt{2}, -1)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, mínimo $-\sqrt{2}$ em $(-\sqrt{2}, 1)$ e $(\sqrt{2}, -1)$
**7.** máximo $\sqrt{2}$ em $(1/\sqrt{2}, 0)$, mínimo $-\sqrt{2}$ em $(-1/\sqrt{2}, 0)$
**9.** máximo 6 em $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, mínimo −6 em $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$
**11.** máximo é $1/(3\sqrt{3})$ em $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ e $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; mínimo é $-1/(3\sqrt{3})$ em $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**13.** Falsa; um multiplicador de Lagrange é um escalar.
**15.** Falsa; devemos resolver três equações a três variáveis.
**17.** $\left(\frac{3}{10}, -\frac{3}{5}\right)$ **19.** $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$
**21.** (3, 6) é o mais perto e (−3, −6) é o mais afastado **23.** $5(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$
**25.** 9, 9, 9 **27.** $(\pm\sqrt{5}, 0, 0)$ **29.** comprimento e largura 2 pés, altura 4 pés
**33.** **(a)** $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$, máximo 1/8 **(b)**

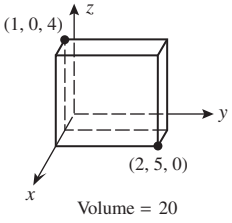


## ► Capítulo 13 Exercícios de Revisão (página 997)

**1.** **(a)** $xy$ **(b)** $e^{r+s}\ln(rs)$
**5.** **(a)** não definida na reta $y = x$ **(b)** não contínua
**9.** **(a)** 12 Pa/min **(b)** 240 Pa/min
**15.** A diferencial $df$ de $f$ é uma aproximação da variação $\Delta f$ de $f$.
**17.** $dV = -0{,}06667$ m$^3$; $\Delta V = -0{,}07267$ m$^3$ **19.** 2
**21.** $\dfrac{-f_y^2 f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} - f_x^2 f_{yy}}{f_y^3}$ **25.** $\frac{7}{2} + \frac{4}{5}\ln 2$ **27.** $-7/\sqrt{5}$
**29.** (0, 0, 2), (1, 1, 1), (−1, −1, 1) **31.** $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 2\right)$
**33.** mínimo relativo em (15, −8)
**35.** ponto de sela em (0, 0), mínimo relativo em (3, 9)
**37.** máximo absoluto de 4 em $(\pm 1, \pm 2)$, mínimo absoluto de 0 em $(\pm\sqrt{2}, 0)$ e $(0, \pm 2\sqrt{2})$
**39.** $I_1 : I_2 : I_3 = \dfrac{1}{R_1} : \dfrac{1}{R_2} : \dfrac{1}{R_3}$
**41.** **(a)** $\partial P/\partial L = c\alpha L^{\alpha-1}K\beta$, $\partial P/\partial K = c\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}$

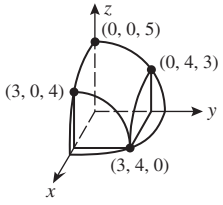
## ► Exercícios 14.1 (página 1007)

**1.** 7 **3.** 2 **5.** 2 **7.** 3 **9.** $1 - \ln 2$ **11.** $\dfrac{1 - \ln 2}{2}$ **13.** 0 **15.** $\frac{1}{3}$
**17.** **(a)** 37/4 **(b)** valor exato = 28/3; diferença de 1/12
**19.**



Volume = 20

**21.**



As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**23.** Falsa; $\Delta A_k$ é a área de uma região retangular dessas.
**25.** Falsa; $\iint_R f(x, y)\,dA = \int_1^5 \int_2^4 f(x, y)\,dy\,dx$.
**29.** 19 **31.** 8 **33.** $\dfrac{1}{3\pi}$ **35.** 48 **37.** $1 - \dfrac{2}{\pi}$ **39.** $\frac{14}{3}$ °C
**41.** 1,381737122 **43.** primeira integral igual a $\frac{1}{2}$, segunda igual a $-\frac{1}{2}$; não

## ► Exercícios 14.2 (página 1015)

1. $\frac{1}{40}$ 3. 9 5. $\frac{\pi}{2}$ 7. 1/12

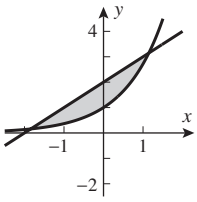
9. (a) $\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$ (b) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx\,dy$

11. (a) $\int_1^2 \int_{-2x+5}^3 f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^4 \int_1^3 f(x,y)\,dy\,dx + \int_4^5 \int_{2x-7}^3 f(x,y)\,dy\,dx$ (b) $\int_1^3 \int_{(5-y)/2}^{(y+7)/2} f(x,y)\,dx\,dy$

13. (a) $\frac{16}{3}$ (b) 38 15. 576 17. 0 19. $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ 21. $\frac{50}{3}$

23. $-\frac{7}{60}$ 25. $\frac{1-\cos 8}{3}$

27. (a)




(b) (−1,8414; 0,1586), (1,1462; 3,1462)
(c) −0,4044
(d) −0,4044

29. $\sqrt{2}-1$ 31. 32

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

33. Falsa; $\int_0^1 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$ integra $f(x,y)$ sobre a região entre os gráficos de $y = x^2$ e $y = 2x$ com $0 \le x \le 1$ e resulta em um número, mas $\int_{x^2}^{2x} \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ produz uma expressão envolvendo $x$.

35. Falsa; embora $R$ seja simétrica em relação ao eixo $x$, o integrando pode não ser.

37. 12 39. $27\pi$ 41. 170 43. $\frac{27\pi}{2}$ 45. $\frac{\pi}{2}$

47. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^2 f(x,y)\,dx\,dy$ 49 $\int_1^{e^2} \int_{\ln x}^2 f(x,y)\,dy\,dx$

51. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy\,dx$ 53. $\frac{1-e^{-16}}{8}$ 55. $\frac{e^8-1}{3}$

57. (a) 0 (b) tg 1 59. 0 61. $\frac{\pi}{2} - \ln 2$ 63. $\frac{2}{3}$ °C 65. 0,676089

## ► Exercícios 14.3 (página 1024)

1. $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{2}{9}a^3$ 5. 0 7. $\frac{3\pi}{2}$ 9. $\frac{\pi}{16}$ 11. $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_2^{4\operatorname{sen}\theta} f(r,\theta) r\,dr\,d\theta$

13. $8\int_0^{\pi/2} \int_1^3 r\sqrt{9-r^2}\,dr\,d\theta$ 15. $2\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} (1-r^2) r\,dr\,d\theta$

17. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$ 19. $\frac{5\pi}{32}$ 21. $\frac{27\pi}{16}$ 23. $(1-\cos 9)\pi$ 25. $\frac{\pi}{8}\ln 5$ 27. $\frac{\pi}{8}$

29. $\frac{16}{9}$ 31. $\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$ 33. $\frac{\pi}{4}(\sqrt{5}-1)$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

35. Verdadeira; em coordenadas polares o disco é dado por $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

37. Falsa; está faltando o fator $r$ no integrando:

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 f(r,\theta) r\,dr\,d\theta.$$

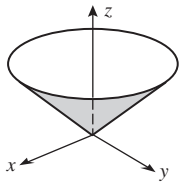
39. $\pi a^2 h$ 41. $\frac{1}{5} + \frac{\pi}{2}$

43. (a) $\frac{4}{3}\pi a^2 c$ (b) $\approx 1{,}0831682 \times 10^{21}$ m$^3$ 45. $2a^2$

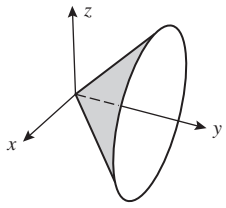
## ► Exercícios 14.4 (página 1036)

1. $6\pi$ 3. $\frac{\sqrt{5}}{6}$ 5. $\sqrt{2}\pi$ 7. $\frac{(10\sqrt{10}-1)\pi}{18}$ 9. $8\pi$

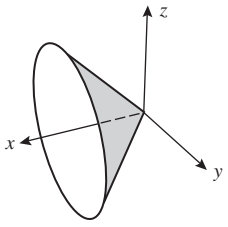
11. (a)




(b)




(c)




13. (a) $x = u, y = v, z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}u - 2v$ (b) $x = u, y = v, z = u^2$

15. (a) $x = \sqrt{5}\cos u, y = \sqrt{5}\operatorname{sen} u, z = v; 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 1$
(b) $x = 2\cos u, y = v, z = 2\operatorname{sen} u; 0 \le u \le 2\pi, 1 \le v \le 3$

17. $x = u, y = \operatorname{sen} u \cos v, z = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

19. $x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta, z = \frac{1}{1+r^2}$

21. $x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta, z = 2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$

23. $x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta, z = \sqrt{9-r^2}; r \le \sqrt{5}$

25. $x = \frac{1}{2}\rho\cos\theta, y = \frac{1}{2}\rho\operatorname{sen}\theta, z = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho$ 27. $z = x - 2y$; um plano

29. $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 1; 2 \le z \le 4$; parte de um cilindro elíptico

31. $(x/3)^2 + (y/4)^2 = z^2; 0 \le z \le 1$; parte de um cone elíptico

33. (a) $x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta, z = r, 0 \le r \le 2$;
$x = u, y = v, z = \sqrt{u^2+v^2}, 0 \le u^2 + v^2 \le 4$

35. (a) $0 \le u \le 3, 0 \le v \le \pi$ (b) $0 \le u \le 4, -\pi/2 \le v \le \pi/2$

37. (a) $0 \le \phi \le \pi/2, 0 \le \theta \le 2\pi$ (b) $0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le \pi$

39. $2x + 4y - z = 5$ 41. $z = 0$ 43. $x - y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

45. $\frac{(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})\pi}{6}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

47. Falsa; a área de superfície é $S = \iint_R \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2 + 1}\,dA$.

49. Verdadeira; veja a discussão que precede a Definição 14.4.1.

51. $4\pi a^2$ 55. $4\pi^2 ab$ 57. 9,099

59. $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$; elipsoide

61. $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = -1$; hiperboloide de duas folhas

## ► Exercícios 14.5 (página 1045)

1. 8 3. $\frac{47}{3}$ 5. $\frac{81}{5}$ 7. $\frac{128}{15}$ 9. $\pi(\pi-3)/2$ 11. $\frac{1}{6}$ 13. 9,425

15. 4 17. $\frac{256}{15}$

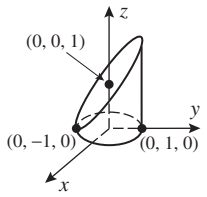
19. (a) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4x^2+y^2}^{4-3y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

(b) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{4x^2+y^2}^{4-3y^2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

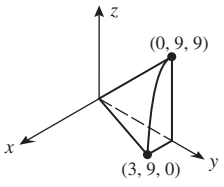
21. $4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{4x^2+y^2}^{4-3y^2} dz\,dy\,dx$

23. $2\int_{-3}^3 \int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}} \int_0^{x+3} dz\,dy\,dx$

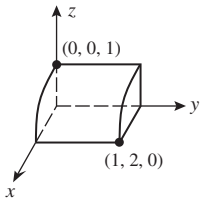
**25.** **(a)**




**(b)**




**(c)**




As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**27.** Verdaderia, aplique o Teorema de Fubini (Teorema 14.5.1).

**29.** Falso;

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

**33.** $\frac{3}{4}$ **35.** 3,291

**37.** **(a)** um exemplo é $\displaystyle\int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} \int_0^{c(1-x/a-y/b)} dz\,dy\,dx$

**39.** **(a)** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^5 f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

**(b)** $\displaystyle\int_0^9 \int_0^{3-\sqrt{x}} \int_y^{3-\sqrt{x}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

**(c)** $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_y^{8-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

## ► Exercícios 14.6 (página 1056)

**1.** $\frac{\pi}{4}$ **3.** $\frac{\pi}{16}$

**5.** A região é delimitada pelo plano $xy$ e a metade superior da esfera de raio 1 centrada na origem; $f(r,\theta,z) = z$.

**7.** A região é a porção do primeiro octante que está dentro de uma esfera de raio 1 centrada na origem; $f(\rho,\theta,\phi) = \rho\cos\phi$.

**9.** $\frac{81\pi}{2}$ **11.** $\frac{152}{3}\pi$ **13.** $\frac{64\pi}{3}$ **15.** $\frac{11\pi a^3}{3}$ **17.** $\frac{\pi a^6}{48}$

**19.** $\frac{32(2\sqrt{2}-1)\pi}{15}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**21.** Falsa; o fator $r^2$ deveria ser $r$ [Fórmula (6)]:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\substack{\text{limites}\\ \text{apropriados}}} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta.$$

**23.** Verdadeira; $G$ é a cunha esférica delimitada pelas esferas $\rho = 1$ e $\rho = 3$, os semiplanos $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ e acima do cone $\phi = \pi/4$, portanto,

$$(\text{volume de } G) = \iiint_G dV = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_1^3 \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

**25.** **(a)** $\frac{5}{2}(-8+3\ln 3)\ln(\sqrt{5}-2)$ **(b)** $f(x,y,z) = \dfrac{y^3}{x^3\sqrt{1+z^2}}$;

$G$ é a cunha cilíndrica $1 \le r \le 4, \dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}, -2 \le z \le 2$

**27.** $\frac{4\pi a^3}{3}$ **29.** $\frac{2(\sqrt{3}-1)\pi}{3}$

## ► Exercícios 14.7 (página 1068)

**1.** $-17$ **3.** $\cos(u-v)$ **5.** $x = \frac{2}{9}u + \frac{5}{9}v$, $y = -\frac{1}{9}u + \frac{2}{9}v$; $\frac{1}{9}$

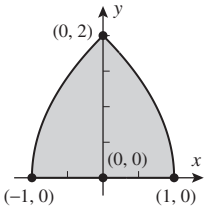
**7.** $x = \dfrac{\sqrt{u+v}}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{\sqrt{v-u}}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{1}{4\sqrt{v^2-u^2}}$ **9.** 5 **11.** $\dfrac{1}{v}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

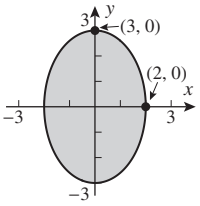
**13.** Falsa; $|\partial(x,y)/\partial(u,v)| = ||\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v||$; calcular isso em $(u_0, v_0)$ fornece a área do paralelogramo indicado.

**15.** Falsa; $\partial(x,y)/\partial(r,\theta) = r$.

**17.**




**19.**




**21.** $\frac{3}{2}\ln 3$ **23.** $1 - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2$ **25.** $96\pi$ **27.** $\dfrac{\pi}{24}(1-\cos 1)$ **29.** $\frac{192}{5}\pi$

**31.** $u = \begin{cases} \text{arc cotg}\,(x/y), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \text{ e } x > 0 \\ \pi, & y = 0 \text{ e } x < 0 \end{cases}$

$v = \sqrt{x^2+y^2}$; outras respostas são possíveis

**33.** $u = (3/7)x - (2/7)y$, $v = (-1/7)x + (3/7)y$; outras respostas são possíveis

**35.** $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{2}$

**37.** $\dfrac{1}{2}\left[\ln(\sqrt{2}+1) - \dfrac{\pi}{4}\right]$ **39.** $\frac{35}{256}$ **41.** $2\ln 3$ **45.** $21/8$

## ► Exercícios 14.8 (página 1077)

**1.** $M = \frac{13}{20}$, centro de gravidade $\left(\frac{190}{273}, \frac{6}{13}\right)$

**3.** $M = a^4/8$, centro de gravidade $(8a/15, 8a/15)$

**5.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **7.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**9.** Verdadeira; lembre que isso foi visto na Seção 6.7, no Volume 1.

**11.** Falsa; o centro de gravidade da lâmina é $(\bar{x}, \bar{y}) = (M_y/M, M_x/M)$, em que $M_y$ e $M_x$ são os primeiros momentos da lâmina em torno dos eixos $y$ e $x$, respectivamente, e $M$ é a massa da lâmina.

**15.** $\left(\dfrac{128}{105\pi}, \dfrac{128}{105\pi}\right)$ **17.** $\left(\dfrac{4a}{3\pi}, 0\right)$ **19.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ **21.** $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{5}\right)$

**23.** $(3a/8, 3a/8, 3a/8)$

**25.** $M = a^4/2$, centro de gravidade $(a/3, a/2, a/2)$

**27.** $M = \frac{1}{6}$ centro de gravidade $\left(0, \frac{16}{35}, \frac{1}{2}\right)$ **29.** **(a)** $\left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right)$ **(b)** $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$

**31.** (1,177406; 0,353554; 0,231557)

**33.** $\dfrac{27\pi}{4}$ **35.** $\pi k a^4$ **37.** $\left(0, 0, \dfrac{7}{16\sqrt{2}-14}\right)$ **39.** $\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{10}{9}\right)$

**41.** $3(a/8, 3a/8, 3a/8)$ **43.** $(2-\sqrt{2})\pi/4$ **45.** $(0, 0, 8/15)$

**47.** $(0, 195/152, 0)$ **51.** $\frac{1}{2}\delta\pi a^4 h$ **53.** $\frac{1}{2}\delta\pi h(a_2^4 - a_1^4)$ **57.** $2\pi^2 abk$

**59.** $(a/3, b/3)$

## ► Capítulo 14 Exercícios de Revisão (página 1081)

**3.** **(a)** $\displaystyle\iint_R dA$ **(b)** $\displaystyle\iiint_G dV$ **(c)** $\displaystyle\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA$

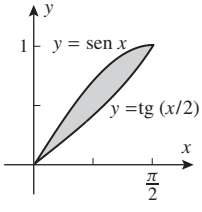
**5.** $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

**7.** **(a)** $a=2, b=1, c=1, d=2$ ou $a=1, b=2, c=2, d=1$ **(b)** 3

**9.** $-\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi}$

**11.** $\displaystyle\int_0^1 \int_{2y}^2 e^x e^y\,dx\,dy$

**13.**




**15.** $\frac{1}{3}(1-\cos 64)$

**17.** $a^2$

**19.** $\frac{3}{2}$

**21.** $32\pi$

**23.** **(a)** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{a}\rho^4\,\text{sen}^3\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

**(b)** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}a/2}\int_{r/\sqrt{3}}^{\sqrt{a^2-r^2}} r^3\,dz\,dr\,d\theta$

**(c)** $\int_{-\sqrt{3}a/2}^{\sqrt{3}a/2}\int_{-\sqrt{(3a^2/4)-x^2}}^{\sqrt{(3a^2/4)-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}/\sqrt{3}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$

**25.** $\frac{\pi a^3}{9}$ **27.** $\frac{1}{24}(26^{3/2}-10^{3/2})\approx 4{,}20632$ **29.** $2x+4y-z=5$

**33.** **(a)** $\frac{1}{2(u+w)}$ **(b)** $\frac{1}{2}(7\ln 7-5\ln 5-3\ln 3)$ **35.** $\left(\frac{8}{5},0\right)$

**37.** $(0,0,h/4)$

## ► Capítulo 14 Estabelecendo Conexões (Página 1082)

Não fornecemos resposta de exercícios de Estabelecendo Conexões para os quais houver mais de uma resposta correta possível. Amostras de respostas destas questões podem ser obtidas na Internet.

**1.** **(b)** $\frac{\pi}{4}$ **3.** **(a)** 1,173108605 **(b)** 1,173108605

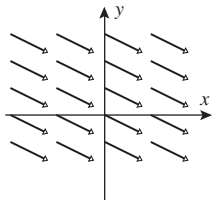
**4.** **(a)** a esfera $0\le x^2+y^2+z^2\le 1$ **(b)** 4,934802202 **(c)** $\pi^2/2$

**5.** (b) 4,4506 **6.** $\frac{4}{35}\pi a^3$

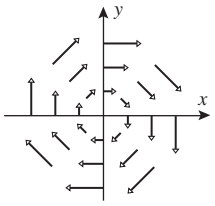
## ► Exercícios 15.1 (página 1092)

**1.** **(a)** III **(b)** IV **3.** **(a)** verdadeira **(b)** verdadeira **(c)** verdadeira

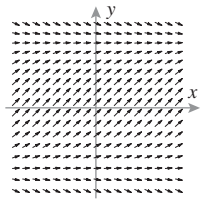
**5.**




**7.**




**9.**




As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**11.** Falsa; o campo vetorial tem um componente **k** não nulo.

**13.** Verdadeira; isso é o rotacional de **F**.

**15.** **(a)** todos os $x, y$ **(b)** todos os $x, y$ **17.** div $\mathbf{F}=2x+y$, rot $\mathbf{F}=z\mathbf{i}$

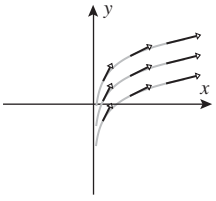
**19.** div $\mathbf{F}=0$, curl $\mathbf{F}=(40x^2z^4-12xy^3)\mathbf{i}+(14y^3z+3y^4)\mathbf{j}-(16xz^5+21y^2z^2)\mathbf{k}$

**21.** div $\mathbf{F}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, rot $\mathbf{F}=0$ **23.** $4x$ **25.** 0

**27.** $(1+y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}$

**39.** $\nabla\cdot(k\mathbf{F})=k\nabla\cdot\mathbf{F}$, $\nabla\cdot(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla\cdot\mathbf{F}+\nabla\cdot\mathbf{G}$, $\nabla\cdot(\phi\mathbf{F})=\phi\nabla\cdot\mathbf{F}+\nabla\phi\cdot\mathbf{F}$, $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$ **47.** **(b)** $x^2+y^2=K$

**49.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$, $y=\ln x+K$




## ► Exercícios 15.2 (página 1108)

**1.** **(a)** 1 **(b)** 0 **3.** 16 **7.** 8 **9.** $-28$

**11.** **(a)** $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$ **(b)** 1 **(c)** $\frac{2}{3}$

**13.** **(a)** 3 **(b)** 3 **(c)** 3 **(d)** 3

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**15.** Falsa; as integrais de linha independem da orientação da curva.

**17.** Verdadeira; isso é a Equação (26).

**19.** 2 **21.** $\frac{13}{20}$ **23.** $1-\pi$ **25.** 3 **27.** $-1-(\pi/4)$ **29.** $1-e^3$

**31.** **(a)** $\dfrac{63\sqrt{17}}{64}+\dfrac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})-\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1}-\dfrac{1}{4}\ln(\sqrt{2}+1)+\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ **(b)** $\dfrac{\pi^3}{24}+\dfrac{e^{\pi/2}}{5}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{6}{5}$

**33.** **(a)** $-1$ **(b)** $-2$ **35.** $\frac{5}{2}$ **37.** 0 **39.** $1-e^{-1}$ **41.** $6\sqrt{3}$

**43.** $5k$ arc tg 3 **45.** $\frac{3}{5}$ **47.** $\frac{27}{28}$ **49.** $\frac{3}{4}$ **51.** $\dfrac{17\sqrt{17}-1}{4}$

**53.** **(b)** $S=\displaystyle\int_C z(t)\,dt$ **(c)** $4\pi$ **55.** $\lambda=-12$

## ► Exercícios 15.3 (página 1120)

**1.** conservativo, $\phi=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+K$ **3.** não conservativo

**5.** conservativo, $\phi=x\cos y+y\,\text{sen}\,x+K$

**9.** $-6$ **11.** $9e^2$ **13.** 32 **15.** $W=-\frac{1}{2}$ **17.** $W=1-e^{-1}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**19.** Falsa; a integral deve ser nula com *qualquer* curva fechada $C$.

**21.** Verdadeira; se $\nabla\phi$ for constante, então $\phi$ deve ser uma função linear.

**23.** $\ln 2-1$ **25.** $\approx -0{,}307$ **27.** não **33.** $h(x)=Ce^x$

**35.** **(a)** $W=-\dfrac{1}{\sqrt{14}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ **(b)** $W=-\dfrac{1}{\sqrt{14}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ **(c)** $W=0$

## ► Exercícios 15.4 (página 1127)

**1.** 0 **3.** 0 **5.** 0 **7.** $8\pi$ **9.** $-4$ **11.** $-1$ **13.** 0

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**15.** Falsa; o Teorema de Green se aplica a curvas fechadas.

**17.** Verdadeira; a integral é a área da região delimitada por $C$.

**19.** **(a)** $\approx -3{,}550999378$ **(b)** $\approx -0{,}269616482$ **21.** $\frac{3}{8}a^2\pi$ **23.** $\frac{1}{2}abt_0$

**27.** Fórmula (1) da Seção 6.1, no Volume 1. **29.** $\frac{250}{3}$ **31.** $-3\pi a^2$

**33.** $\left(\frac{8}{15},\frac{8}{21}\right)$ **35.** $\left(0,\dfrac{4a}{3\pi}\right)$ **37.** o círculo $x^2+y^2=1$ **39.** 69

## ► Exercícios 15.5 (página 1136)

**1.** $\frac{15}{2}\pi\sqrt{2}$ **3.** $\frac{\pi}{4}$ **5.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **7.** 9

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**9.** Verdadeira; isso segue da definição.

**11.** Falsa; a integral é a massa total da lâmina.

**13.** **(b)** $2\pi\left[1-\sqrt{1-r^2}+\dfrac{r^2}{2}\right]\to 3\pi$ quando $r\to 1^-$

**(c)** $\mathbf{r}(\phi,\theta)=\text{sen}\,\phi\cos\theta\mathbf{i}+\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\mathbf{j}+\cos\phi\mathbf{k}$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\phi\le\pi/2$;

$$\iint(1+z)\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(1+\cos\phi)\,\text{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta=3\pi$$

**17.** **(c)** $4\pi/3$

**19.** (a) $\dfrac{\sqrt{29}}{16}\displaystyle\int_0^6\int_0^{(12-2x)/3} xy(12-2x-3y)\,dy\,dx$

(b) $\dfrac{\sqrt{29}}{4}\displaystyle\int_0^3\int_0^{(12-4z)/3} yz(12-3y-4z)\,dy\,dz$

(c) $\dfrac{\sqrt{29}}{9}\displaystyle\int_0^3\int_0^{6-2z} xz(12-2x-4z)\,dx\,dz$

**21.** $\dfrac{18\sqrt{29}}{5}$

**23.** $\displaystyle\int_0^4\int_1^2 y^3z\sqrt{4y^2+1}\,dy\,dz;\ \frac{1}{2}\int_0^4\int_1^4 xz\sqrt{1+4x}\,dx\,dz$

**25.** $\dfrac{391\sqrt{17}}{15}-\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$ **27.** $\frac{4}{3}\pi\delta_0$ **29.** $\frac{1}{4}(37\sqrt{37}-1)$ **31** $M=\delta_0 S$

**33.** $(0, 0, 149/65)$ **35.** $\dfrac{93}{\sqrt{10}}$ **37.** $\dfrac{\pi}{4}$ **39.** 57,895751

## ► Exercícios 15.6 (página 1146)

**1.** (a) nulo (b) nulo (c) positivo (d) negativo (e) nulo (f) nulo

**3.** $-80$ **5.** 30 **7.** $200\pi$ **9.** 4 **11.** $2\pi$ **13.** $\dfrac{14\pi}{3}$ **15.** 0

**17.** $18\pi$ **19.** $\frac{4}{9}$ **21.** (a) 8 (b) 24 (c) 0

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**23.** Falsa; a faixa de Möbius não tem orientação.

**25.** Falsa; o volume líquido pode ser nulo porque através da superfície passa a mesma quantidade de fluido no sentido negativo quanto no sentido positivo.

**27.** $-3\pi$ **29.** (a) $0\ \text{m}^3/\text{s}$ (b) $0\ \text{kg/s}$ **31.** (b) 32/3

**33.** (a) $4\pi a^{k+3}$ (b) $k=-3$ **35.** $a=2, 3$

## ► Exercícios 15.7 (página 1157)

**1.** 3 **3.** $\dfrac{4\pi}{3}$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**5.** Falsa; equaciona uma integral de superfície e uma integral tripla.

**7.** Verdadeira; veja a subseção Fontes e Poços.

**9.** 12 **11.** $3\pi a^2$ **13.** $180\pi$ **15.** $\dfrac{192\pi}{5}$ **17.** $\dfrac{\pi}{2}$ **19.** $\dfrac{4608}{35}$

**21.** $135\pi$ **23.** (a) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{F}=-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$

**33.** nenhuma fonte ou poço

**35.** fonte em todos os pontos exceto na origem, nenhum poço **37.** $\dfrac{7\pi}{4}$

## ► Exercícios 15.8 (página 1164)

**1.** $\frac{3}{2}$ **3.** 0 **5.** $2\pi$ **7.** $16\pi$ **9.** 0 **11.** $\pi a^2$

As respostas das questões de Verdadeiro/Falso podem estar abreviadas para economizar espaço.

**13.** Verdadeira; veja o Teorema 15.8.1.

**15.** Falsa; a circulação é $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$.

**17.** (a) $\frac{3}{2}$ (b) $-1$ (c) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ **23.** $-\dfrac{5\pi}{4}$

## ► Capítulo 15 Exercícios de Revisão (página 1166)

**3.** $\dfrac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}}\mathbf{i}+\dfrac{2-y}{\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}}\mathbf{j}$ **5.** $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

**7.** (a) $\displaystyle\int_a^b\left[f(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+g(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right]dt$

(b) $\displaystyle\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$

**11.** 0 **13.** $-7/2$ **17.** (a) $h(x)=Cx^{-3/2}$ (b) $g(y)=C/y^3$

**21.** $A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$

**23.** $\displaystyle\iint_R f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\,du\,dv$ **25.** sim **27.** $2\pi$

**31.** $-8\pi$ **35.** (a) conservativo (b) não conservativo

# ÍNDICE

## A


Abel, Niels Henrik, 297
aceleração, 290
  centrípeta, 903
  componente tangencial escalar/vetorial da, 886
  componentes normal e tangencial da, 885-888
  constante, 378-380
  devida à gravidade, 127, 380
  em movimento curvilíneo, 882
  em movimento retilíneo, 290
  instantânea, 290
  sinal da, 291
  uniforme, 378-380
  vetor de, 883
adição
  de funções, 15, 16
  fórmulas do seno e cosseno, B8
afélio, 760, 900
Agnesi, Maria, 841, 847
ajuste de curvas, 987
alcance horizontal, 894
Alexeev, Vasili, 450
Álgebra Linear, 519, 795
altura
  de cilindro reto, 422
  de cunha cilíndrica, 1048
amplitude
  de corrente alternada, 395
  do movimento harmônico simples, 180
  do seno e cosseno, 33
análise diofantina, 303
análise marginal, 283
Análise Numérica, 540, 672
Anderson, Paul, 450
ângulo central de cunha cilíndrica, 1048
ângulo negativo, B1
ângulo(s), B1-B3
  de inclinação, B11
  em posição canônica, B4
  em sistemas de coordenadas retangulares, B4-B6
  entre planos, 816
  entre vetores, 786-787
  obtendo de funções trigonométricas, B10
  polar, 706
  positivo, B1
ângulos de direção, 787-788
antena parabólica, 743
antiderivação, 320, 323
  *ver também* integrais indefinidas
antiderivada, 322, 323
  de função vetorial, 854
antidiferenciação, 320, 323
  *ver também* integrais indefinidas
anuidade, 301
aplicação, transformação, 1059
apogeu, 759, 900
  de satélite terrestre artificial, 210, 900
aproximação pela reta tangente, 536
aproximação pelo ponto médio, 533, 540, 543
  erro na, 535
  estimativa do erro, 540-542
aproximação trapezoidal, 534, 540, 543
  erro na, 535
  estimativa do erro com, 540-542
aproximação(ões)
  área sob uma curva, 319
  de raízes usando o método de Newton, 297-300
  de raízes usando o Teorema do Valor Intermediário, 116-117
  de raízes usando zoom, 117
  linear local, 212, 649, 944, 946
  pela extremidade esquerda ou direita, 533
  pela regra de Simpson, 537, 538, 540
  por polinômios de Maclaurin e Taylor, 649, 651, 652, 655, 656
  por somas de Riemann, 354
  quadrática local, 648
Arco da Passagem (Gateway Arch), 475, 484
área
  aproximação pela extremidade direita, 347
  aproximação pela extremidade esquerda, 347
  aproximação pelo ponto médio, 347
  calculada como integral dupla, 1014
  calculada pelo método dos retângulos, 317, 321
  calculando valor exato de, 346
  com integral dupla polar, 1022
  como função de duas variáveis, 906
  como integral de linha, 1095, 1099, 1124-1125
  de superfície de revolução, 444, 446
  definição de, 343, 344
  em coordenadas polares, 724, 725
  entre duas curvas, 414, 416-418
  líquida com sinal, 347, 350, 355, 377
  pelo método de antiderivadas, 320, 321
  pelo Teorema de Green, 1124-1125
  sob uma curva, 317
  total, 366, 378
área de superfície
  como integral de superfície, 1131
  de superfície de revolução, 444-446
  de superfície paramétrica, 1028, 1034, 1035
  de superfícies da forma $z = f(x, y)$, 1026-1028
  e integral imprópria, 553
argumento, 3
Arquimedes, 316, 318
  espiral de, 714, 718
  palimpsesto de, 318
assíntota horizontal, 32, 89
  de curva polar, 719
assíntota(s), 99, 254
  curvilínea, 258
  inclinada, 258
  oblíqua, 258
  uma curva como, 99
assíntotas de uma hipérbole, 732
  encontrando as, 738
assíntotas verticais, 32, 76
  em curvas polares, 719
Astronomia, movimento planetário, 759, 896, 897, 899, 900
*Astronomia Nova*, 759
aumentar a velocidade, 290
Axioma da Completude, 611

## B


Badel, Hannskarl, 484
Bell, Alexander Graham, 59
Bernoulli
  Daniel, 700
  equação de, 595
  Jakob I, 698-700
  Jakob, 767
  Johann (John) I, 698-700
  Johann (John), 3, 221, 767
  Nikolaus, 700
Bessel
  derivada de função de, 679
  equação de ordem um, 689
  equação de ordem zero, 689
  Friedrich Wilhelm, 666
  função de, 666
Beverton-Holt, modelo de, 613-614
bifólio, 728
bola
  aberta, 920
  fechada, 920
Bolzano, Bernhard, 149
Bopp, Thomas, 762
Bowditch Nathaniel, 705
  curva de, 705
braço de alavanca, 460
Brahe, Tycho, 759
bruxa de Agnesi, 847


## C


cabos suspensos, 475, 765
calota esférica, 430
camada cilíndrica, 432-435
caminho de integração, 1111
caminho de subida mais íngreme, 969
caminho poligonal, 439
campo de direções, 329, 580
campo de fluido, 1138
campo de forças central, 896
campo de velocidades, 1084
campo eletrostático, 1086-1087, 1138
campo gradiente, 1187
campo gravitacional, 1084
campo vetorial conservativo, 1087-1088, 1112-1113
  independência do caminho e, 1113-1114
  teste de, 1115-1118
campo vetorial irrotacional, 1164
campo(s) vetorial(is), 1084-1085
  circulação de, 1168
  de fluido, 1138
  de inverso quadrado, 1086-1087
  divergência e rotacional de, 1088-1090
  gradiente, 1087
  integração ao longo de uma curva, 1103-1104
  linha de fluxo de, 1093
  representação gráfica de, 1085
campos de quadrado inverso, 1086-1087
  lei de Gauss para, 1155
caos e o método de Newton, 300
capacidade de tolerância, 100, 563
cardioide(s), 711
  área, 724
  famílias de, 713
  interseção com círculo, 725
CAS, *ver* sistema algébrico computacional
Cassini, Giovanni Domenico, 719
  ovais de, 719
catenária, 475
Cauchy, Augustin, 649, 651
Cavalieri, Bonaventura, 431
  princípio de, 431
centro
  de curvatura, 877
  de elipse, 731
  de força, 896
  de hipérbole, 732
centro de gravidade, 458, 1072
  de lâmina, 458-462, 1072, 1074
  de sólido, 1075, 1076
centroide(s), 464
  como propriedade geométrica, 462
  de lâmina, 1074
  de sólido, 1075, 1076
  de uma região, 462-464, 1074
CGS (centímetro-grama-segundo), 450
ciclo, 395
cicloide prolata, 703
cicloide(s), 698
  papel na história da Matemática, 700
  pomo da discórdia, 699
  prolata, 703
cilindro, 421, 422
circuito elétrico em série *RL*, 593
circulação, 1163
círculo(s), 730
  de curvatura, 877
  famílias de, 712, 713
  involuta de um, 704
  osculador, 130, 877
  segmento de, 301
círculo(s) máximo(s), 840
  distância entre dois, 840
clotoide, 766
coeficiente binomial, 677
coeficiente dominante, C1
coeficiente(s), C1
  de atrito, 154, 180
  de expansão linear, 219
  de expansão volumétrica, 219
  de polinômio, 31
  dominante, C1
cofunção, 181
combinação linear, 784
*Comentários sobre os Movimentos de Marte*, 759
cometa de Hale Bopp, 762
cometa Halley, 760
componente escalar, 789
componente normal escalar da aceleração, 886
componente normal vetorial da aceleração, 865
componente tangencial escalar da aceleração, 886
componente tangencial vetorial da aceleração, 886
componentes
  de $r(t)$, 843
  de vetores, 775
comportamento no infinito, 89
  e limites, 91, 94
composição contínua, 129, 577
composição de funções, 17
  continuidade da, 114, 115
  derivada da, 174
  substituição $u$ na, 332, 334-336
comprimento
  de vetor, 778
comprimento de arco, 438, 4440, 441, B2, B3
  como integral de linha, 1095
  de curvas paramétricas, 443, 697
  de curvas polares, 721, 722
  do ponto de vista vetorial, 859
  e integrais impróprias, 553
  encontrando por métodos numéricos, 441
concavidade, 235, 254
côncavo
  para baixo, 235
  para cima, 235
concoide de Nicomedes, 764
condição inicial, 328, 562
cone, 824, 830, 836
cone circular, 824-825
cone elíptico, 823-825
  identificando um, 829
cônica transladada, 740-742
conjunto
  aberto, 920
  ilimitado, 978
conjunto fechado, 920
  encontrando extremos absolutos em, 982-985
conjunto limitado, 978
  encontrando extremos absolutos em um, 982
constante de crescimento, 571
  interpretação da, 572
constante de decaimento, 571
  interpretação, 572
constante de gravitação universal, 896
constante de integração, 323
constante de permissividade, 1087
constante de proporcionalidade, 29, 36
  inversa, 29, 36
constante(s)
  de reflexão de gráficos, 22
  de translação de gráficos, 20
  derivada da função, 155
  em fórmulas de integração, 4891
  equações lineares de segunda ordem homogêneas
  fator, num limite, 82
  fator, numa derivada, 157
continuidade, 110-117
  aplicações, 111
  da função exponencial, 122, 400
  da função inversa, 121
  da função logaritmo, 122, 398, 403

de composições, 114-115
de funções a duas variáveis, 922-923, 924
de funções a três variáveis, 925
de funções trigonométricas, 121
de funções vetoriais, 849
de polinômios e funções racionais, 122
e diferenciabilidade, 148, 943
no Teorema do Valor Intermediário, 115-117
num intervalo, 112
pela esquerda/direita, 112
prova das propriedades básicas de, D2-D3
convergência, 600, 610, 611, 614-616
absoluta, *ver* convergência absoluta
condicional, 643
conjunto de, 662
de integrais impróprias, 549-551
de sequências monótonas, 610, 611
de sequências, 600
de séries infinitas, 616
e comportamento no infinito de sequências, 610
propriedades algébricas da, de séries, 624, 625
raio e intervalo de, 662, 664
convergência absoluta, 641, 642
teste da razão para a, 643, 644
coordenada angular, 706
coordenada polar $r$, 706, 708
coordenada polar $\theta$, 706
coordenada radial, 706
coordenada $x$, 768
coordenada $y$, 768
coordenada $z$, 768
coordenadas cartesianas, 767
coordenadas cilíndricas, 832
conversão, 833
elemento de volume, 1048
equações de superfícies em, 835-836
coordenadas esféricas, 832, 836
conversão em, 833
equação de uma superfície em, 835-836
coordenadas polares, 705, 706
área em, 719, 724, 725
esboço de seções cônicas em, 756, 758, 759
gráfico em, 707
relação com coordenadas retangulares, 706
teste de simetria em, 710-712
coordenadas retangulares, 767-832
conversão de coordenadas cilíndricas e esféricas em, 833
relação com coordenadas polares, 706
Copérnico, 759
corneta de Gabriel, 555, 1030
Cornu, Marie Alfred, 766
espiral de, 766, 904
corrente alternada, 395
corte com o eixo $x$, 254
de funções, 4
corte com o eixo $y$, 254
cossecante, B3
continuidade da, 121
derivada da, 170
hiperbólica, 474
cosseno, B3
continuidade do, 121
derivada do, 169, 173
família do, 32, 34
fórmulas, B8, B10
funções racionais de, 527
hiperbólico, 474
identidades trigonométricas, B6-B8
integração de potências do, 500, 501, 505
integração de produtos com senos, 501, 503
cossenos diretores, 787-788
cota inferior
de conjunto, 612
de sequência monótona, 611
maior (ínfimo), 612
cota superior
de conjunto, 612
de sequência monótona, 611
menor (supremo), 612
cotangente, B3
continuidade da, 121
derivada da, 170
hiperbólica, 474
Crelle, Leopold, 297
cresce sem cota, 75
crescimento exponencial, 60, 571-573
crescimento logarítmico, 60
crescimento populacional, 563-564
capacidade de tolerância, 100, 563
equação diferencial de primeira ordem do, 563
modelo logístico do, 564
restrito, 563-564
sem restrição, 563
taxa de, 182
cúbica bipartite, A12
cúbica torcida, 843
cunha, área em coordenadas polares, 723
cunha cilíndrica, 1048, 1049
cunha esférica, 1051
curva borboleta, 717
curva de nível, 909-911
gradiente normal à, 965-966
curva de posição *versus* tempo, 135, 288
análise de, 291
curva equipotencial, 917
curva isotérmica, 917
curva(s)
como assíntotas, 99
comprimento de uma, 438-440, 697, 859, 860
de nível, 909-911
integral, 327, 562
limite ao longo de, 917
lisa por partes, 1107
lisa, 438
ortogonais, 191
paramétrica, 694
polar, 707
posição *versus* tempo, 288
velocidade *versus* tempo, 377
curva(s) paramétrica(s), 694, 841
comprimento de arco de, 443, 698
definida por partes, 702
fechada, 1113
geração com recursos gráficos, A9
integral de linha ao longo de, 1096-1097
limite ao longo de, 918-919
mudança de escala em, A10
mudança de parâmetros de, 861
orientação de, 694, 841
reta tangente a, 695-697
simples, 1115
translação de, A10
tridimensional, 841-842
curva(s) polar(es)
área delimitada por, 719, 724, 725
comprimento de arco de, 721
geração com recurso gráfico, 715
interseções de, 726
reta tangente a, 719-721
reta tangente na origem, 721
seções cônicas, 755, 756
curvas $u$ constantes, 1028, 1032, 1060
curvas $v$ constantes, 1028, 1032, 1060
curvatura, 873, 875, 877
interpretação bidimensional, 877
cúspide, 259
custo de produção, 281
custo fixo, 281
custo marginal, 283


## D


da Pisa, Leonardo (Fibonacci), 607
datação por carbono, 574
de Riemann, *ver* soma de Riemann
decaimento exponencial, 571-573
decaimento radioativo, 230, 573
decibéis, 59
decimal finita, 622
decresce sem cota, 75
densidade
de circulação, 1164
de fluxo, 1154
de lâmina, 458, 1071, 1130
de massa, 469
de peso, 469
depressão do bulbo molhado, 914
derivação, 150
com CAS, 178
como propriedade inversa da integração, 371
de série de potências, 678, 679
e taxas relacionadas, 204-208
implícita, 187-190, 952, 955
logarítmica, 194-195, 199
regras de, 167
técnicas de, 155, 156, 158-160, 163-167, 174
derivação parcial implícita, 931, 932
regra da cadeia, 955-956
derivada direcional, 960-963
derivada parcial de primeira ordem, 933
derivada parcial de segunda ordem, 933-934
derivada pela esquerda, 150

derivada segunda, 159
  teste da, 247
derivada terceira, 160
derivada(s)
  da composição, 174
  da função constante, 155
  da função posição, 146
  das funções exponenciais, 198
  das funções logarítmicas, 193
  das funções trigonométricas inversas, 200
  das funções trigonométricas, 169-172
  de funções vetoriais, 849, 850
  de produto escalar e vetorial, 852
  de um produto, 163, 164
  de um quociente, 165
  de um recíproco, 167
  de uma função linear, 145
  definição, 143, 150, 151
  enésima, 160
  equação da reta tangente, 144
  lateral, 150
  notação de, 143, 150, 151
  pela direita, 150
  pela esquerda, 150
  quociente de diferenças, 143
  regra da potência, 156, 195
  regra do múltiplo constante, 157
  velocidade como, 146
derivada(s) parcial(is)
  como taxa de variação e inclinação, 929-930, 932
  de funções a duas variáveis, 927, 930-932
  de funções a mais de duas variáveis, 932
  de funções vetoriais, 1031, 1032
  de ordens superiores, 933-934
  e continuidade, 932
  estimativa de, a partir de dados tabulados, 930-931
  funções definidas por, 928
  implícita, 931-932
  mistas, 933
  notação de, 928, 932
  regra da cadeia com, 952-953
  símbolo de, 928
derivadas parciais mistas de segunda ordem, 933
  igualdade de, 934
Descartes, René, 187, 275, 468, 698
descontinuidade(s), 29, 110-111
  de salto, 110
  e integrabilidade, 358
  em um ponto, 110
  infinita, 110
  limites em, 119, 923
  removível, 111, 119
  significado físico, 111
desigualdade triangular, 5
  vetorial, 784
deslocamento, 135
  em movimento curvilíneo, 884
  encontrando por integração, 372, 376
  na curva velocidade *versus* tempo, 378
determinante 2  2, 795
determinante 3  3, 795
determinantes, 795
diagrama de árvore, 950
diferenciabilidade, 146, 148, 150, 151
  de funções de duas ou três variáveis, 940-942
  de funções definidas implicitamente, 190
  de funções vetoriais, 849, 850
  e continuidade de derivadas parciais de primeira ordem, 943
  e continuidade, 148, 943
  falta de, 147
  interpretação geométrica da, 147
diferenciais, 213-214, 944, 945
  fórmulas de, 216-217
  propagação do erro, 215-216
diferencial total, 944, 973
diferenciável
  em $(a, b)$, 146
  em toda parte, 146, 943
  em um intervalo, 150
  em um ponto, 146
  em uma região, 943
diminuir a velocidade, 290
dina-centímetro (erg), 450
dinas, 450
Diofante, 275
diretriz, 731, 754
disco
  aberto, 919
  fechado, 919
discriminante, 752
distância no espaço tridimensional, 768
distância percorrida
  em movimento curvilíneo, 884
  em movimento retilíneo, 377
  encontrando por integração, 376
  na curva velocidade *versus* tempo, 378
distorção na proporção da aparência, A6
divergência, 1088-1090, 1149
  absoluta, 641
  como densidade de fluxo, 1154
  de integral imprópria, 549-551
  de sequências, 600
  de séries infinitas, 616
divisão
  de funções, 15, 16
doença, equação diferencial que modela disseminação de, 564
domínio, 7
  conexo, 1114
  considerações físicas sobre o, em aplicações, 9, 10
  de funções a duas ou mais variáveis, 907
  de funções inversas, 40, 44
  de funções vetoriais, 843
  efeito de operações algébricas sobre o, 8
  multiplamente conexo, 1115
  natural, *ver* domínio natural
  restrito para tornar função invertível, 44
  restrito, 44
  simplesmente conexo, 1115
domínio natural, 7
  de função a duas ou mais variáveis, 907
  de função vetorial, 843
*dx*, 213
*dy*, 213
*dy*/*dx*, 150, 213

## E

*e*, 193, 400, 402
eclíptica, 896
Economia, problemas de otimização, 281, 282
eixo conjugado, 732
eixo focal, 732
eixo maior, 731
eixo menor, 731
eixo semiconjugado, 737
eixo semifocal, 737
eixo *x*, 767
eixo *y*, 767
eixo *z*, 767
eixo(s)
  de revolução, 425
  de uma elipse, 732
  de uma hipérbole, 732
  de uma parábola, 732
  polar, 705
  rotação de, 749, 750
elemento de volume esférico, 1051
elipse(s), 730, 731
  área de, 746, 1125
  equações padrão, 734, 735
  equações polares da, 756
  esboço de, 736, 737
  esboço em coordenadas polares de, 756-758
  excentricidade como medida de achatamento, 755
  propriedade foco-diretriz, 755
  propriedades de reflexão, 743
  translação de uma, 740
elipsoide, 823, 824
  identificando um, 829
energia, 449
  cinética, 449, 455
  conservação de, 1119
  potencial, 1119
  relação com trabalho, 454-455
energia cinética, 449, 455
energia cinética newtoniana, 691
energia cinética relativística, 691
energia potencial, 1119
enésima(o)
  derivada, 160
  polinômio de Maclaurin, 650, 656, 659
  polinômio de Taylor, 653, 655, 659
  resto, 655, 668
  resto, estimativa do, 669, 670
  soma parcial, 616
equação da onda, 935
equação da onda unidimensional, 935
equação das lentes finas, 211
equação de, 313
equação de continuidade para fluidos incompressíveis, 1154
equação diferencial homogênea, 595
equação diferencial linear, 586

equação do calor, 939
equação padrão
  da elipse, 735
  da esfera, 769
  da hipérbole, 737, 738
  da parábola, 732, 733
equação simétrica, 812
equação(ões) diferencial(is), 561-562
  autônomas, 585
  campo de direções de, 329, 580
  de Bernoulli, 595
  e integração, 328
  e taxas de variação, 561
  homogênea, 595
  ordem de, 561
  problemas de valor inicial, 328
  separáveis, 568-571
  solução de, 561
equação(ões) paramétrica(s), 692-693
  de interseções de superfícies, 842
  de retas, 806-809
  de uma reta tangente, 851
  em recursos gráficos, 715, 842
  expressando funções comuns em, 694
  movimento de projétil, 889
  orientação imposta por, 694, 842
equações de Cauchy-Riemann, 939
  forma polar das, 959
equações de rotação, 749, 750
equações diferenciais de primeira ordem, 561, 562, 570, 586-591
  e campos de direções, 580
  funções de duas variáveis e, 579-580
  lineares, 586
  modelagem com, 571-574, 589-591
  problemas de mistura, 589-590
  separáveis, 569-570
equações diferenciais parciais, 935
equações quadráticas
  eliminação do termo misto, 750-751
  em $x$ e $y$, 741, 748
equilíbrio, 460
equilíbrio estático, 784
erg, 450
erro
  de amostragem, A7
  de medição, 215
  em aproximação linear local, 213
  intrínseco, 540
  propagado, 215
  relativo, 216
erro absoluto, 116, 583
  do método de Euler, 583
erro de arredondamento, 540
  em aproximação por série de potências, 672
erro de truncamento, 540, 557
  em aproximação por série de potências, 672
erro percentual, 216
  no método de Euler, 583
escala logarítmica, 59
escala pH, 59, 62
escala Richter, 59, 63
esfera, 769, 836
esferoide oblato, 831
espaço bidimensional, 767
espaço de dimensão $n$, 907
espaço tridimensional, 767
espaço unidimensional, 767
espelho parabólico, 743
espiral, 714
  equiangular, 729
  família de, 714
espiral de Arquimedes, 714, 718
espiral de Lituus, 714
espiral equiangular, 729
espiral hiperbólica, 714, 719
espiral logarítmica, 714, 729
espiral parabólica, 714, 718
Estação Espacial Internacional, 452
estado estacionário, 1140
Euler, Leonhard, 3, 622, 990
  método de, 581-583
evoluta, 880
excentricidade, 754
  como medida de achatamento, 755
exp, 54
extremo absoluto, 266, 977
extremo absoluto condicionado, 991-993
extremo relativo condicionado, 991-993
extremo(s), 244, 267, 268, 977
extremos absolutos
  de funções com um extremo relativo, 270, 271
  em intervalos abertos, 270
  encontrar em conjuntos limitados e fechados, 982-985
  encontrar em intervalos ilimitados, 269, 270
  encontrar em intervalos limitados e fechados, 268
  no Teorema do Valor Extremo, 267
extremos relativos, 244, 254, 977
  e pontos críticos, 245
  encontrando, 979-981
  teste da derivada primeira para, 246
  teste da derivada segunda para, 247
  teste das parciais de segunda ordem, 980-981
extrusão, 770

## F

família(s)
  de cardioides, 713, 714
  de círculos, 712, 713
  de curvas, 27
  de espirais, 714
  de limaçons, 713, 714
  de rosáceas, 713
famílias de funções
  cosseno, 32, 34
  exponenciais, 53
  seno, 32, 34
fator de escala, A2
fator de integração, 587
fator de polinômio, C4
fator de *zoom*, A5
fator linear, 516, 517
  regra do, 516
fator quadrático, 518-520
fator quadrático irredutível, C1
fatoração linear completa, C2
fatorial ($n!$), 603, 650
Fermat, Pierre de, 274, 698
  princípio de, 287
  Último Teorema de, 275
fluido compressível, 1140
fluido(s), 467
  dinâmica de, 467
  estática de, 467
  força do, sobre superfície vertical, 470-471
  homogêneo, 469
  pressão de, 469
fluidos incompressíveis, 1140
  equações de continuidade, 1154
fluxão, 1102
fluxo, 1140, 1142
  de **F** através de $\sigma$, 1142
  densidade, 1154
  integrais de, 1142
  para fora, 1151-1153
  usando o Teorema da Divergência para obter o, 1151-1153
fluxo de saída, 1151-1153
fluxo fluido, 1084
  em estado estacionário, 1140
foco(s), 731, 754
  de elipse, 731
  de hipérbole, 731
  de parábola, 731
fólio de Descartes, 186, 189, 128
fonte, 1154
força central, 896
força centrípeta, 903
força de retardamento, 590
força(s)
  constante, 449-451
  de fluido, 471
  linha de ação da, 805
  pressão, 468-469
  resultante de duas forças concorrentes, 780-781
  trabalho realizado por campo de forças, 1105
  variável, 451-453
forças concorrentes, 781
forma aberta de somatório, 343
forma fechada de somatório, 343
forma geral da equação do plano, 814
forma indeterminada, 85, 219, 222-225
  do tipo $\infty \cdot \infty$, 225
  do tipo $\infty/\infty$, 222
  do tipo $0 \cdot \infty$, 224
  do tipo 0/0, 219
  dos tipos $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$, 225
forma polar
  da equação de Laplace, 958
  das equações de Cauchy-Riemann, 959
forma ponto-normal
  de um plano, 813
  de uma reta, 820

forma vetorial de uma reta por dois pontos, 845
fórmula da distância, 768
fórmula de Machin, 677
fórmula de Taylor com resto, 655, 656
fórmulas de ângulo duplo, B9
fórmulas de Frenet-Serret, 881
fórmulas de integração, 324, 489, 490
  de funções trigonométricas inversas 337, 490
  de funções vetoriais, 854
fórmulas de recursão, 604
fórmulas de redução, 497
  em tabelas de integrais, com ajustes, 525, 526
  para integrais de potências e produtos de funções trigonométricas, 500, 501
fórmulas de soma em produto, B10
fórmulas do ângulo metade, B10
fórmulas do cosseno, de Wallis, 508
fórmulas do seno, de Wallis, 508
fração(ões) parcial(is), 514, 515
  de funções racionais impróprias, 520, 521
  decomposição em, 515
  fator linear em, 516, 517
  fator quadrático em, 518-520
fractais e o método de Newton, 300
Frenet, Jean Frédéric, 871
  triedro de, 871
frequência
  de corrente alternada, 395
  de movimento harmônico simples
  de seno e cosseno, 33
Fresnel, Augustin, 404
  função seno e cosseno de, 404
fronteira, 920
  ponto de, 920
fronteira externa de região polar simples, 1019
função aceleração, 290
função arco cosseno, 45
função arco secante, 45
função arco seno, 45
função arco tangente, 45
função constante, 27, 80, 155, 233
função densidade, 1071
função densidade de massa, 1071
função derivada, 143-145
  definição, 143
  domínio, 143
  notação "linha" da, 143
  que produz inclinação, 144
função erro [erf($x$)], 404, 530
função exponencial de base $b$, 401
função exponencial natural, 54
  definição formal da, 400
função gama, 559
função integrável, 354
  em [$a$, $b$], 354
função linear, 31
função logaritmo natural, 56
  aproximação com série de Maclaurin, 673
  derivada da, 397
  integral da, 493
  propriedades da, 398
função maior inteiro, 27
função posição, 135, 288, 882
  derivada da, 146
função potência, 28
  com expoentes fracionários e irracionais, 52, 401
  com expoentes não inteiros, 30
função potência irracional, 52, 401
  derivada da, 195
função valor absoluto, 5
  continuidade da, 114
  derivada da, 147
  propriedades da, 5
função velocidade instantânea, 146
função(ões), 1, 6
  a duas variáveis, 579-580, 907
  a $n$ variáveis reais, 907
  a três variáveis, 907
  aproximação com série de potências, 670-675
  composição de, 17, 18
  constante, 27
  crescente sem cota, 60
  crescente, 42
  crescentes e decrescentes, 232-234
  custo, 181
  de fora, 18
  decrescente, 42
  definida explícita ou implicitamente, 185-186
  definida por integral, 403, 404
  definida por partes, 6
  definida por série de potências, 656, 666
  derivada, *ver* função derivada
  derivadas parciais de, 928
  derivável, 146
  descrita por tabela, 908
  diferenciável, 146
  domínio de, 7
  domínio natural, 7
  elementar, 403
  expressa como composição, 18, 19
  gráfico de uma, 4
  homogênea de grau $n$, 999
  imagem, 7
  ímpar, 23, 28, 29
  injetora, 41, 197-198
  inversa(s), *ver* função(ões) inversa(s)
  invertível, 41
  limitada, 359
  lisa, 438, 858
  logarítmica(s), *ver* função(ões) logarítmica(s)
  lucro, 281
  maneiras de descrever, 2
  máximos e mínimos relativos de, 244
  operações aritméticas com, 15
  par, 23, 28, 29
  potência, *ver* função potência
  potencial, 1087
  produto de, 15, 16
  propriedades de, 4-10
  racionais, *ver* função(ões) racionais
  real de variável real, 3
  receita, 281
  recursos gráficos e, A1
  restrição de, 44
  saída de, 2, 3
  soma de, 15
  teste da reta vertical para, 4
  trigonométricas, *ver* função(ões) trigonométrica(s)
  vetoriais, *ver* função(ões) vetorial(is)
função(ões) inversa(s), 38, 39, 55
  continuidade da, 121
  domínio e imagem da, 50
  encontrando uma, 40
  equações do cancelamento, 39
  equações paramétricas da, 695
  existência da, 41
  gráfico da, 43
  notação para, 39
  recursos gráficos e, A9
  teste da reta horizontal, 42
função(ões) logarítmica(s), 55, 57
  comportamento no infinito, 95
  continuidade de, 122
  de base $b$, 55
  derivada de, 192-193
  integral de, 493
  propriedades da função exponencial comparadas com as da, 57
  propriedades da, 57
  resolução de equações envolvendo, 57, 58
função(ões) racional(is), 31, 32
  continuidade de, 113
  de seno e cosseno, 527
  esboço do gráfico de, 255, 261
  integração por somas parciais, 514, 516-521
  limites quando $x \to a$, 82, 84
  limites quando $x \to \pm\infty$, 92
  próprias, 515
  propriedades de interesse, 254
função(ões) trigonométrica(s)
  aproximação com série de Taylor, 670-672
  continuidade de, 121
  de triângulos retângulos, B3
  derivada de, 170
  encontrando ângulos com, B10
  fórmulas de integração de, 489
  hiperbólicas, 474-478, 480-482
  inversas de, 44, 46, 47, 337
  limites de, 121
função(ões) vetorial(is), 843
  antiderivada de, 854
  cálculo de, 848-852, 854
  continuidade de, 849
  diferenciabilidade de, 850
  domínio de, 843
  domínio natural de, 843
  fórmulas de integração de, 854
  gráfico de, 844, 845
  integral de, 853
  limites de, 848
  reta tangente ao gráfico de, 851, 852
funções a duas variáveis
  continuidade de, 922-923, 924
  curva de nível de, 909-911

derivadas parciais de, 927, 939-932
gradiente de, 963
gráfico de, 908-909
gráficos com recursos computacionais, 912, 914
integral dupla de, 1000-1003, 1005, 1006, 1009-1011
mapa de contornos, 909-911
máximos e mínimos de, 977, 979-982, 984-985
funções a três variáveis
continuidade de, 924
derivadas parciais de, 932
gradiente de, 963
integração múltipla de, 1000, 1039-1041
superfície de nível de, 911-912
funções algébricas, 32
fórmulas de integração de, 489
funções arco, 44
funções componentes, 843
funções contínuas
propriedades de, 113
valor médio de, 385-387
funções elementares, 403
funções exponenciais, 53
análise de crescimento usando a regra de L'Hôpital, 223
aproximando com série de potências, 672
comportamento no infinito, 95
continuidade de, 122
de base *b*, 53
derivadas de, 198-199, 230
e decaimento radioativo, 230
fórmulas de integração, 489
gráfico, 53
natural, 54
resolvendo equações envolvendo, 57, 58
funções hiperbólicas, 474
aplicações de, 475
e a hipérbole unitária, 476-477
fórmulas das derivadas de, 477
fórmulas de integração de, 477-478, 489
gráficos de, 475
inversas, 478-480
funções hiperbólicas inversas, 478-480
derivadas e integrais, 481-482
forma logarítmica das, 480
funções implícitas, 185-186
funções trigonométricas do triângulo retângulo, B3-B4
funções trigonométricas inversas, 38, 44, 200
cálculo das 46
derivadas, 200
identidades, 47
funções vetoriais de duas variáveis, 1031
derivadas parciais de, 1031, 1032


## G


*g*, aceleração devida à gravidade, 127
*Galileo*, espaçonave, 698
Galileu, 698
Galois, Evariste, C5
gases, 467
Gauss, Carl Friedrich, 354, 1084, 1150
curva de, 1150
leis de, 1155-1156
teorema de, 1149-1151
Geometria Analítica, 275
Geometria Projetiva, 468
grades de retas, A2
gradiente(s), 963-965
para encontrar retas tangentes a cortes de superfícies, 974
gráfico(s)
cortes com o eixo *x*, 4
de curvas paramétricas no espaço tridimensional, 842
de funções a duas variáveis, 908-909
de funções exponenciais, 54
de funções hiperbólicas, 475
de funções inversas, 43
de funções logarítmicas, 56
de funções potência, 29
de funções racionais, 255, 261
de funções vetoriais a duas variáveis, 1031
de funções vetoriais, 844, 845
de funções, 4
de seções cônicas em coordenadas polares, 756-758
de superfícies quádricas, 824-826
de uma sequência, 599
e raízes, 4
em coordenadas polares, 707, 709
expansão e compressão de um, 22
no espaço tridimensional, 769
propriedades de interesse em, 254
reflexão de um, 21
simetria de um, 23
tangentes verticais e cúspides em, 259
translações de, 20
zeros, 4
gráficos usando Cálculo junto a recursos gráficos, 262
grande pirâmide de Gaza, 230
grau de polinômio, 31, C1
Green, George, 1123
teorema de, 1122-1123
Gregory, James, 673
Gregory of St. Vincent, 397
guarda-chuva de Whitney, 1033


## H


Hale, Alan, 762
hélice circular, 842
helicoide, 1038
hipérbole(s), 730, 731
equações padrão, 737, 738
equações polares da, 756
equilátera, 29, 740
esboço de, 739, 740
esboço em coordenadas polares de, 756, 757, 759
propriedades de reflexão da, 743
translação de uma, 740
unitária, 477
hiperboloide, 836
hiperboloide de duas folhas, 823, 825
identificação de, 829
hiperboloide de uma folha, 823, 824
identificação de, 829
hipocicloide de quatro cúspides, 26, 190
Hooke, Robert, 452
lei de, 452
Humason, Milton L., Apêndice Web-J8


## I


identidades hiperbólicas, 476
identidades trigonométricas, B6-B8
imagem, 7
considerações físicas em aplicações, 9, 10
de função inversa, 40
imagem de *S* por *T*, 1059
imagem de *x* por *f*, 3
inclinação
de uma reta, B11
de uma superfície, 930, 960
derivada parcial como, 929-930, 932
função que produz, 144
incremento, 150, 941
no método de Euler, 582
independência de caminho de integral de trabalho, 1111-1113
independência do caminho, 1113
índice
de sequência, 598
de somatório, 341
índice de sensação térmica (WCT), 6, 15, 908, 929-930
ínfimo, 612
infinidade de descontinuidades, 110
integrandos com, 551
integrabilidade e descontinuidades, 358
integração, 323
como propriedade inversa da derivação, 371
constante de, 323
de séries de potências, 679, 680
de taxas de variação, 371
e campos de direções, 329
e equações diferenciais, 328
iterada (ou repetida), 1003, 1009, 1010
limites de, 354
notação para, 323, 324
numérica, *ver* integração numérica
parcial, 1003
substituição hiperbólica em, 514
substituição *u* na, 332, 333, 335, 336
trocando a ordem de, 1013
integração de funções racionais impróprias, 520, 521
integração numérica, 533-543
aproximação pela reta tangente, 536
aproximação pelo ponto médio, 534
aproximação por somas de Riemann, 533
aproximação trapezoidal, 534
erro absoluto, 535, 538

erro, 535, 538, 540
pela regra de Simpson, 537-540
integração por partes, 491-493
de integrais definidas, 496
fórmulas de redução, 497
LIATE, 493, 494
repetida, 493
tabulada, 495
integração repetida, 1003
por partes, 493
integrais de trabalho, 1111
caminho de integração de, 1111-1112
Teorema Fundamental das, 1112-1113
integral de linha, 1094, 1096, 1097, 1105, 1107
ao longo de caminhos fechados, 1113
ao longo de curvas fechadas simples, 1124
ao longo de curvas lisas por partes, 1107
área como, 1095, 1099, 1124
cálculo de, 1096-1097, 1099-1100, 1102-1103, 1113
de  ao longo de $C$, 1103-1104
em relação a $x$, $y$ e $z$, 1100, 1102
em relação ao comprimento de arco, 1094-1095
independência de caminho, 1113
interpretação geométrica de, 1104
massa de um arame, 1094-1095, 1098
no espaço tridimensional, 1098
orientação de $C$ na, 1097, 1101
Teorema de Green, 1122
Teorema Fundamental de, 1112
trabalho como uma, 1105, 1107
integral de superfície, 1130
área de superfície como, 1131
cálculo de 1131-1132, 1134-1135
massa de lâmina curva, 1130-1131, 1135
integral definida
calculando com substituição, 390-392
definição, 354
e o Teorema Fundamental do Cálculo, 363, 365, 366, 369, 370
integração por partes, 496
propriedades da, 356-358
integral dupla polar, 1019, 1020
cálculo de, 1020-1022
cálculo de área com, 1022
integral imprópria, 547, 549-551, 553
comprimento de arco e área de superfície usando, 553
de integrando com uma infinidade de descontinuidades, 551
sobre intervalo infinito, 548-550
integral indefinida, 323, 324
e o Teorema Fundamental do Cálculo, 365, 366
propriedades da, 325-327
integral(is)
curvas, 327, 562
de funções vetoriais, 853, 855
de Riemann, 354
de superfície, 1130
definida parcial, em relação a $x$ e $y$, 1003
definidas, *ver* integral definida
dupla, *ver* integral(is) dupla(s)
elíptica completa de primeira espécie, 560, 685
funções definidas por, 403, 404
imprópria, *ver* integral imprópria
indefinida, *ver* integral indefinida
iterada, 1003, 1009, 1010, 1013
notação para, 323
relação entre definida e indefinida, 365, 366
símbolo () de, 323, 324
simples, 1006
tabelas de, 489, 490, 523-528
Teorema do Valor Médio para, 368, 369, 386
tripla, *ver* integral(is) tripla(s)
integral(is) dupla(s), 1002
cálculo de área por, 1014
cálculo de, 1002-1005
convertendo de coordenadas retangulares para polares, 1023
em coordenadas polares, *ver* integral dupla polar
em coordenadas retangulares, 1020
limites de integração, 1011-1013, 1021
mudança de variáveis em, 1063, 1065
propriedades da, 1006
sobre regiões não retangulares, 1009-1011
trocando ordem de integração em, 1013
integral(is) trigonométrica(s), 500, 501, 503-506
integral(is) tripla(s), 1039
cálculo de volume com, 1042-1044
cálculo de, 1040-1042
convertendo de coordenadas retangulares para cilíndricas, 1050
convertendo de coordenadas retangulares para esféricas, 1055
em coordenadas cilíndricas, 1048, 1049
em coordenadas esféricas, 1051, 1052
limites de integração, 1042, 1044, 1050
mudança de variáveis em, 1065-1067
ordem de integração em, 1040, 1044, 1050
integrando, 323
intensidade de terremoto, 59, 63
intensidade sonora, 59
interior, 920
interpolação linear, 908
intervalo de convergência, 662
de séries de potências em $x$  $x_0$, 663-664
encontrando, 662, 663
intervalo fechado
continuidade em, 112
extremos absolutos em, 267
intervalo infinito
extremos absolutos em, 269, 270
integrais sobre, 548-550
intervalo $x$ para janela de inspeção, A2
intervalo $y$ para janela de inspeção, A2
isóbara, 916

## J

Jacobi, Carl Gustav Jacob, 1059
jacobiano, 1058
em duas variáveis, 1061, 1062
em três variáveis, 1066
janela de inspeção, 912, A2
compressão de gráfico, A5
escolha de, A3, A5
fazendo *zoom*, A5
Johannes, 759
joule, 450
juros compostos
anualmente, 301, 577
bimestralmente, 577
continuamente, 129, 577
$n$ vezes ao ano, 129
trimestralmente, 577

## K

Kramer, Gerhard (Mercator), 506

## L

L'Hôpital
Guillaume François Antoine de, 221, 698, 699
regra de, 220-226
lacuna falsa com recurso gráfico, A8
lado final de um ângulo, B1
lado inicial de um ângulo, B1
Lagrange
identidade de, 804
Joseph Louis, 906, 990
multiplicador de, *ver* multiplicador de Lagrange
lâmina, 458
centro de gravidade de uma, 458-462, 1074
centroide de uma, 462-464, 1074, 1076
curva, 1130
densidade de uma, 458, 1071, 1130
homogênea ou não homogênea, 458, 1071
massa de, 458, 1071, 1072, 1130-1131, 1135
momento(s) de uma, 460-462, 1074
primeiro momento de uma, 461, 1074
Laplace
equação de, 939, 1091
forma polar da equação de, 958
Pierre-Simon de, 274, 1000, 1091
transformada de, 556
largura de cilindro reto, 422
largura de cunha cilíndrica, 1048
latitude, 1030
Lei
da Gravitação Universal de Newton, 2, 37, 162, 896, 1084, 1086
do Resfriamento de Newton, 154, 387, 565
lei da órbitas, 759, 895, 899
lei das áreas, 759, 895, 899
lei de Boyle, 30, 36
lei de Coulomb, 36, 1087
lei de Gauss
para campos de quadrado inverso, 1155
para campos elétricos, 1156
Lei de Ohm, 109
lei de Torricelli, 578
lei dos cossenos, 50, B8-B10
para um tetraedro, 840

lei dos gases ideais, 927, 988
lei dos períodos, 759, 895, 899, 900
lei dos senos, B13
Leibniz, Gottfried Wilhelm, xix, 67, 221, 319, 698, 699
  notação de derivada de, 213
  notação de integral de, 213, 323
leis de Kepler, 313, 759, 895
  primeira lei, 759, 895, 899
  segunda lei, 759, 895, 899
  terceira lei, 759, 895, 899, 900
leis físicas, modelagem com série de Taylor, 685
lemniscata, 190, 712
LIATE, estratégia para integração por partes, 493
Libby, W. F., 573
libras, 450
limaçons, 713, 714
limite de integração inferior, 354
limite de integração superior, 354
limite inferior de somatório, 341
limite infinito, 74, 105
  ponto de vista informal, 75
limite superior de somatório, 341
limite(s), 67-76, 78, 80-86, 89-96, 98-105, 848, 919-921, 925
  abordagem intuitiva, 67, 73, 74
  ao longo de curvas, 917-918
  área definida como, 343, 344
  armadilhas de amostragem, 71
  assíntotas horizontais, 89
  bilaterais, 72-73, 100-101
  cálculo de, 80, 85, 91, 94
  comportamento no infinito, 91, 94
  de função definida por partes, 86
  de funções a duas variáveis, 920-921
  de funções a três variáveis, 924
  de funções racionais quando $x \to a$, 82, 84
  de funções racionais quando $x \to \pm\infty$, 92
  de funções simples, 80, 81, 91
  de funções trigonométricas, 121
  de funções vetoriais, 848
  de integração, 354
  de polinômios quando $x \to a$, 82, 84
  de polinômios quando $x \to \pm\infty$, 91, 92
  de radicais, 85
  de sequências, 599, 600, 602
  de somas de Riemann, 345, 1002, 1040
  de somatório, 346
  de $x^n$ quando $x \to \pm\infty$, 91
  definição épsilon-delta, 101
  discussão rigorosa de, 100-102, 105
  do produto, 81
  do quociente, 81
  em descontinuidades, 119, 923
  envolvendo radicais, 85
  expansão decimal e, 69
  forma indeterminada do tipo 0/0, 85
  formas indeterminadas de, 219-223, 225
  infinito, 74, 105
  lateral, 72, 101
  não existe, 72-74, 95, 124
  no infinito, 89-90
  ponto de vista informal, 71
  prova dos teoremas básicos, D1-D2
  quando $x \to \pm\infty$, 103, 105
  raiz enésima, 81
  soma de, 81
  Teorema do Confronto, 122
linearidade local, 212, 944, 946
  e diferenciais, 213-214, 215-216
linha de ação, 805
linha de fluxo, 1093
líquidos, 467
Lissajous
  curva de, 703
  Jules Antoine, 703
logaritmo(s), 55
  aproximação com séries de potencias, 673
  fórmula de mudança de base, 59
  propriedades do, 57
logaritmos gerais, 402, 403
logística
  crescimento, 239, 240, 243, 564
  curva, 239, 577
  equação diferencial, 564
longitude, 1030
Lua, excentricidade da órbita, 902
lucro marginal, 283

## M

Maclaurin, Colin, 649
  polinômio de, 649-651
  série de, 660-663
magnitude, 5
  de um vetor, 778
malhas de curvas, 821
manipulação algébrica de integrando, 488
Mantle, Mickey, 765
mapa de contornos, 909-911
  usando recursos computacionais, 911
mapa topográfico, 909
*Maple*, A1, A2
Marte, 763
massa de lâmina curva, 1130-1131
massa de lâmina plana, 458, 1071, 1072
massa de um arame, 1094-1095
  como integral de linha, 1098
*Mathematica*, A1, A2
máximo absoluto, 266, 977
máximo relativo, 244, 977
média aritmética, 385, 757
média geométrica, 757, 758
medida em graus, B1
medida em radianos, B1
meia-vida, 572-573
Mercator (Gerhard Kramer), 506
método
  das arruelas, 426
  das camadas cilíndricas, 432-435
  do fator integrante, 587-589
  dos discos, 425
  dos mínimos quadrados, 987
método de Euler, 581-583
método de integração, 488, 490
Método de Newton, 298, 299
  dificuldades com o, 299
método dos retângulos para a área, 318
milibar, 916
Miller, Norman, 286
mínimo absoluto, 266, 977
mínimo relativo, 244, 977
minuto (de ângulo), B1
Möbius
  August, 1138
  faixa de, 1138
modelagem com equações diferenciais, 561, 563-566, 571-574, 589-591
  crescimento populacional, 563-564
  crescimento/decrescimento exponencial, 571-573
  disseminação de doença, 564-565
  equações diferenciais, 561
  farmacologia, 564
  lei do resfriamento de Newton, 565
  meia-vida, 572-573
  oscilação de molas, 565-566
  tempo de duplicação, 572, 573
modelo de crescimento irrestrito, 564
modelo de pequenas oscilações, 686
modelo de primeira ordem do período do pêndulo, 686
modelo de produção, 999
modelo de produção de Cobb-Douglas, 999
modelo de queda livre, 380
  com resistência, 590-591
modelo de segunda ordem do período do pêndulo, 686
modelo harmônico simples, 180
mola, 565
  constante de, 452
  rigidez de, 452
momento
  de inércia, 1079
  de lâmina, 460-462, 1074
  em relação a um ponto, 459
  em relação a uma reta, 460
momento escalar, 802-803
momento vetorial, 802
movimento
  curvilíneo, 882, 883, 885-890
  em queda livre, 380-382, 590, 591
  harmônico simples, 180, 567
  retilíneo, *ver* movimento retilíneo
  rotacional tridimensional, 802
  uniformemente acelerado, 378
movimento balístico
  equações paramétricas de, 889, 891
  modelo vetorial, 888-889
movimento circular uniforme, 903
movimento retilíneo, 134-136, 288-292, 376-381
  aceleração, 290
  distância percorrida, 377
  em queda livre, 381, 382
  função posição de, 135
  posição *versus* tempo em, 135

uniformemente acelerado, 378-380
velocidade escalar instantânea, 289
velocidade escalar, 289
velocidade instantânea, 136, 146
velocidade média, 135
velocidade, 146, 289
$m_{tg}$, 132
mudança de parâmetro, 861, 862
mudança de variáveis
em integrais duplas, 1063-1065
em integrais simples, 1058
em integrais triplas, 1065-1067
multiplicação de funções, 15, 16
multiplicador de Lagrange, 990-993
com três variáveis e uma restrição, 993-995
multiplicidade, 249, C2
interpretação geométrica da, 249
múltiplo escalar, 774

## N

negativo de um vetor, 775
Newton
discípulo Maclaurin, 649
Isaac, xviii, 3, 67, 319, 698, 699, 759, 1084
notação de derivada de, 213
solução do problema da braquistócrona de próprio punho, 700
Newton-metro, 450
newtons, 450
norma de partição, 353
norma de vetor, 778
normalização de um vetor, 779
notação sigma, *ver* somatório, notação
números reais, 611

## O

octante, 768
operador del $\nabla$, 1090
operador laplaciano $\nabla^2$, 1090
órbita elíptica, 760, 895, 899
órbita geossincrônica, 900
órbita planetária, 313, 705, 759, 895-900
ordem de derivada, 160
ordem de equação diferencial, 561-562
Oresme, Nicole, 622
orientação, 1139
de superfície fechada lisa por partes, 1148
de superfície não paramétrica, 1144-1145
de superfície paramétrica lisa, 1140
de uma curva, 694, 841
no espaço tridimensional, 841
positiva/negativa, 1125, 1140
relativa, 1158
orientação negativa de superfície
não paramétrica, 1144
paramétrica, 1140
orientação para dentro, 1148
orientação para fora, 1148
orientação positiva
de região multiplamente conexa, 1125
de superfície não paramétrica, 1144-1145
de superfície paramétrica, 1140
origem, 705, 767
simetria em torno da origem, 710
ortogonal(is)
componentes, 788-789
curvas, 191
projeção, 790-791
superfícies, 976
trajetórias, 191
vetores, 787
oscilação de cordas, 935
oscilação de molas, 565-566

## P

Pappus
de Alexandria, 465
teorema de, 464-465
parábola(s), 730
definição de, 731
equação padrão da, 732, 733
equação polar de uma, 756
esboço de, 733, 734
esboço em coordenadas polares, 756
método de Kepler para construção de, 766
propriedade foco-diretriz, 755
propriedades de reflexão de, 742, 743
semicúbica, 697
translação de uma, 740
paraboloide, 823, 824, 826, 836
paraboloide circular, 824-825
paraboloide elíptico, 823, 824, 826
identificando um, 829
paraboloides hiperbólicos, 823, 824, 826
identificação de, 829
parametrização lisa, 858
parametrização pelo comprimento de arco, 860
encontrando uma, 862-864
propriedades de, 864, 865
parâmetro(s), 27, 692
comprimento de arco como, 860
mudança de, 861, 862
partição
de um intervalo, 353
regular, 353
Pascal
Blaise, 468
princípio de, 473
pascal (Pa), 468
pé-libra, 450
pêndulo, modelagem com série de Taylor, 685
pêndulo simples, 559
periélio, 760, 900
perigeu, 759, 900
de satélite terrestre artificial, 210
periodicidade, 254
período, 219
de corrente alternada, 395
de modelo de primeira ordem do pêndulo, 686
de movimento harmônico simples, 180
de seno e cosseno, 33
do pêndulo simples, 560
do pêndulo, 219
peso, 452
pi ($\pi$)
aproximação, 317, 318, 673, 674
Piazzi, Giuseppi, 1150
pico de voltagem, 395
pixel, A7
plano normal, 871
plano osculador, 871
plano $xy$, 768
plano $xz$, 768
plano $yz$, 768
plano(s)
ângulo entre dois, 816
determinado por um ponto e um vetor normal, 813-814
paralelo a um plano coordenado, 813
perpendiculares, 787
problema da distância entre, 816-817
retificador, 871
tangente, *ver* plano(s) tangente(s)
transformações de, 1059, 1060
plano(s) tangente(s), 972
a superfícies de nível, 971-972
a superfícies paramétricas, 1032-1034
a superfícies $z = F(x, y)$, 972-973
e diferencial total, 973
gráfico da aproximação linear local, 973
plotagem em tubo, 842
Plutão, 762
poço, 1154
polinômio constante, C1
polinômio cúbico, 31, C1
polinômio de Maclaurin, 649-651
notação de somatório, 652, 654, 655
polinômio de Taylor, 653
notação de somatório com, 652, 654, 655
polinômio linear, 31, C1
polinômio(s), C1-C2
coeficientes de, C1
continuidade de, 113
de grau $n$, C1
de Maclaurin, *ver* polinômio de Maclaurin
de Taylor, *ver* polinômio de Taylor
em $x$, 31
esboçando o gráfico de, 249-251
grau de, C1
implicação geométrica da multiplicidade de uma raiz de um, 249
limite quando $x \to a$, 82, 84
limite quando $x \to \pm\infty$, 91
método para encontrar raízes, C5-C6
propriedades de, 250, 254
quadrático, 31, C1
quártico, 31, C1
quíntico, 31, C1
raízes de, 297
revisão de, 31
Teorema da Fatoração de, C4
Teorema do Resto, C3
polo, 705
polônio, 210, 576
ponta de Folsom, 576
ponto crítico, 245, 979

ponto de bico, 147
ponto de inflexão, 236, 238, 254
  aplicações, 238, 239
ponto de minimax, 826
ponto de referência em parametrização por comprimento de arco, 860
ponto de sela, 826, 979
ponto de tangência vertical, 147
ponto de vista, 912
ponto estacionário, 245
ponto final de vetor, 774
ponto inicial de vetor, 774
ponto interior, 920
ponto singular, 696
pontos de mudança, 6
população mundial, 572
  tempo de duplicação da, 573
posição de partícula por integração, 376
posição padrão
  da elipse, 735
  da hipérbole, 737
  da parábola, 732, 733
  de ângulo, B4
potências inteiras, 52
pressão, 468-469
primeiro momento de lâmina, 1074
  octante, 768
princípio da substituição, 98
princípio de conservação da energia, 1119, 1168
princípio de Fermat, 287
princípio dos extremos condicionados
  duas variáveis e uma restrição, 991-993
  três variáveis e uma restrição, 993-994
princípio dos mínimos quadrados, 287
problema da área, 317
problema da braquistócrona, 699
problema da tautócrona, 699
problema de valor inicial, 328
  de equações diferenciais de primeira ordem, 562
  método de Euler para, 581-583
problema de valor inicial de primeira ordem, 562
problema do volume, 1001
  em coordenadas polares, 1019
problemas de extremos
  de duas variáveis e uma restrição, 989, 991-993
  de três variáveis e uma restrição, 989, 993-995
  de uma variável, 267
  em aplicações, 274-278, 280-282
problemas de mistura, equações diferenciais de primeira ordem dos, 589-590
problemas de otimização, 232
  aplicados à Economia, 281, 282
  categorias de, 274
  envolvendo intervalos fechados finitos, 274-279
  envolvendo intervalos não fechados ou infinitos, 279-281
  mal condicionados, 280
  máximos e mínimos absolutos, 268-270
  máximos e mínimos de funções a duas variáveis, 977-983, 985
  máximos e mínimos em aplicações, 274-281, 283
  multiplicadores de Lagrange em, 990-995
  procedimento de cinco passos para resolver, 276
problemas mal formulados, 230
produtividade marginal do capital, 999
produtividade marginal do trabalho, 999
produto escalar, 785
  derivada do, 852
  independência de coordenadas, 801
  propriedades algébricas do, 785
  símbolo do, 787
produto misto, 800
  propriedades algébricas, 801
  propriedades geométricas, 800-801
produto vetorial, 796
  derivada do, 852
  independência de coordenadas, 801
  propriedades algébricas do, 797-798
  propriedades geométricas, 798-799
projeção de Mercator, 506
propagação do erro, 215
proporcionalidade inversa, 29
propriedade foco-diretriz de cônica, 754
propriedade válida a partir de um certo termo, 610
pseudo-esfera, 1038

## Q

quadratriz de Hippias, 228
quadratura do círculo e do crescente, 728
quádrica especial de Lamé, 190
questões de escala e unidade em gráficos, 10
quociente de diferenças, 143

## R

radianos, B1
radônio-222, 576
raio(s), 712, B2
  de convergência, 662, 664
  de curvatura, 877
  vetor, 844, 1031
raiz média quadrada, 395
raiz quadrada e valor absoluto, 5, 6
raiz(es), C2
  aproximação com o método de Newton, 297, 299
  aproximação com o Teorema do Valor Intermediário, 116-117
  aproximação com *zoom*, 117
  de funções, 4
  multiplicidade de, 249
  simples, 249, C2
Ramanujan
  fórmula de, 677
  Srinivasa, 677
ramos de hipérbole, 731
razão de série geométrica, 617
receita marginal, 283
recursos gráficos computacionais
  aproximação de raízes com *zoom*, 117
  curvas polares com, 715
  distorção na proporção da aparência, A6
  e a verdadeira forma do gráfico, A9
  e funções de duas variáveis, 912, 914
  e funções não elementares, 407
  e gráficos de funções inversas, A9
  erros de amostragem, A7
  erros de omissão de, A8
  funções racionais com, 261
  lacuna falsa e segmento de reta falso com, A8
  obtenção de curvas paramétricas com, 842, A9
  para esboçar mapa de contornos, 911
  resolução, A7
reflexão, 21
  de superfície no espaço, 828
região, 464
região do tipo I/II, 1009
região polar simples, 1018
regra da cadeia, 174
  de derivadas parciais, 952-953
  de derivadas, 949-952, 954
  de duas variáveis, D10-D11
  de funções a *n* variáveis, 953
  e derivação implícita, 955
  e derivação parcial implícita, 955-956
  fórmula generalizada da derivada, 176
  notação de Leibniz, 213
  prova da, D3
  versão alternativa, 175
regra da mão direita, 799
regra da mecânica, 301
regra da potência, 156, 195
regra de Simpson, 537-540
  erro na, 538
  estimativa do erro, 541, 542
regra do fator quadrático, 518
regra do produto, 164, 491, 493
regra do quociente, 165
regra do terço, 540
regra dos 70, 576
regressão reta de, 987
relação trabalho-energia, 449, 454-455
relatividade, teoria da, 79, 98
representação por série de potências, 665
resíduo, 987
resistência do ar, 590
resolução em recursos gráficos, A7
restrição de uma função, 44
resultante, 781
reta de melhor ajuste de mínimos quadrados, 987
reta normal a superfície de nível, 972
reta tangente vertical, 259, 696
reta(s)
  ângulo de inclinação de uma, B11
  como cônicas degeneradas, 730
  determinadas por ponto e vetor, 805-807
  equações vetoriais de, 808-809

famílias de, 712
forma ponto-normal de uma, 820
reta(s) tangente(s), 131, 133, 134
a curva polar na origem, 721
a curvas paramétricas, 695-697
a curvas polares, 719-721
a gráficos de funções vetoriais, 851
a interseção de superfícies, 974
como limite de retas secantes, 131
definição da, 132
equação da, 132, 144
equações paramétricas da, 851
inclinação de, 132
vertical, 259, 696
retangulares, *ver* coordenadas retangulares
retângulo de inspeção, A2
retângulo polar, 1019
retas reversas, 808
revolução
sólido de, 424
superfície de, 444, 835
Riemann
aproximação por soma de, 533
Bernhard, 354
função zeta de, 668
integral de, 354
soma de, *ver* soma de Riemann
Rolle
Michel, 302
Teorema de, 302
rosácea, 713
rosácea de quatro pétalas, 709, 713
rotacional, 1088-1090
campo, 1165
visto como circulação, 1163
Ryan, Nolan, 381


## S


Saarinan, Eero, 484
satélite de observação terrestre, 173
secante, B3
continuidade da, 121
derivada da, 170
hiperbólica, 474
integração de potências da, 503, 504
integração de produtos com tangente, 504, 505
seção cônica, 730-732
aplicações, 743
caracterização foco-diretriz, 754
degenerada, 730
equações polares de, 755, 756
equações quadráticas, 748-752
esboçando em coordenadas polares, 756-758
propriedades de reflexão, 742, 743
translação de uma, 740-742
seção transversal, 417, 421
segmento de reta, 808
forma vetorial de, 845
segmento de reta falso com recurso gráfico, A8
Segunda Lei do Movimento de Newton, 454
segundo (de ângulo), B1
sela de macaco, 821
semieixo
maior, 734
menor,734
semieixo, A10
seno, B3
continuidade do, 121
derivada do, 169, 173
família do, 32, 34
fórmulas, B8, B10
funções racionais de, 527
hiperbólico, 474
identidades trigonométricas, B6-B8
integração de potências do, 500, 501, 505
integração de produtos com cossenos, 501, 503
sentido do parâmetro crescente, 694
no espaço tridimensional, 841
sentido negativo, 1140, 1158
na parametrização por comprimento de arco, 860
sentido positivo, 1140, 1158
parametrização por comprimento de arco, 860
separação de variáveis, 568-569
sequência de Fibonacci, 607
sequência infinita, 596
sequência monótona, 607
convergência de, 610, 611
propriedades que valem a partir de um certo termo, 610
teste de monotonicidade de, 608, 610
sequência(s), 596, 597, 599, 600, 604
convergência de, 600
cota inferior de, 611
cota superior de, 611
crescente/decrescente, 607
de somas parciais, 616
definida recursivamente, 604
estritamente crescente/decrescente, 607
estritamente crescente/decrescente, 607
estritamente monótona, 607
gráfico de, 599
limite de, 599, 600, 602
monótona, 607, 609-612
propriedades de, que valem a partir de um certo termo, 610
Teorema do Confronto para, 602, 603
termo geral de, 597
tipos de, 607
série de Maclaurin, 660-663, 669, 670, 672-675, 681, 683-685
aproximação de funções trigonométricas, 670, 672
aproximação de logaritmo com, 673
da função binomial, 674, 675
da função exponencial, 672
de várias funções, 675
derivação da, 678
integração de, 680
maneira prática de encontrar, 683, 684
série de potências, 661, 664
aproximação da função exponencial com, 672
aproximação de função trigonométrica, 670-672
aproximação de $\pi$, 673, 674
aproximação logarítmica, 673
convergência de, 662, 664
derivação de, 678, 679
e série de Taylor, 781
função definida por, 665, 666, 675
integração de, 679, 680
intervalo de convergência de, 662, 663
série(s) de Taylor, 660, 661, 670
convergência de, 668, 669
encontrando com multiplicação e divisão, 684
maneiras práticas de encontrar, 682, 684
modelando leis físicas com, 685
representação em série de potências com, 681, 682
série(s) infinita(s), 596, 614-617, 619, 620
alternada, *ver* séries alternadas
binomial, 674, 675
convergência absoluta de, 641, 642
convergência condicional de, 643
convergência e divergência de, 616
de Maclaurin, 660-663, 669-675, 681, 683, 684, 686
de potências, 661-666
de Taylor, 659-663, 669, 670, 681, 683-685
enésima soma parcial, 616
erro de arredondamento com, 672
erro de truncamento com, 672
geométrica, 617-619
harmônica alternada, 639
harmônica, 620
hiper-harmônica, 627
*p*, 627
propriedades algébricas de, 624-626
soma de, *ver* soma de série infinita
termo geral de, 623
termos de uma, 614
teste da comparação no limite para, 633, 634, 645, D7-D8
teste da comparação para, 631-633, 645
teste da integral para, 626, 628
teste da raiz para, 635
teste da razão para, 634, 635
teste de divergência para, 624, 645
testes de convergência para, 623-628, 631-635, 638, 640-643, 645
séries alternadas, 638-641
teste para, 638, 645, 671
setor, B3
simetria, 23, 254
área em coordenadas polares, 724-725
em relação à origem, 23
em relação ao eixo $x$ ou $y$, 34
Simpson, Thomas, 539
sinais de escala, A2
sistema algébrico computacional (CAS), 530, A1
derivação usando, 178
integração usando, 338, 488, 528, 529
*Maple*, A1, A2

*Mathematica*, A1, A2
raízes de polinômios, C5
sistemas lineares, 519
sistema de coordenadas cartesiano, 767
sistema de coordenadas retangulares, 767, 768
ângulos em, B4-B6
com a regra da mão direita, 767
com a regra da mão esquerda, 767
sistema de depreciação linear, 35
*Sistema Geodésico Mundial de 1984* (WGS 84), 831
sistema hiperbólico de navegação, 743
Sistema Internacional de Unidades (SI), 450
Snell
lei de, 287, 288
Willebrord van Roijen, 288
*Sobre o Método de Avaliação de Máximos e Mínimos*, 274
Sol, órbita de planeta em torno do, 759
sólido de revolução, 424
sólido finito, 1039
sólido simples
em $xy$, 1041
em $xz$, 1044, 1045
em $yz$, 1044, 1045
solução de equação diferencial, 561-562
solução geral, 562
soma
de vetores, 774
em forma aberta/fechada, 343
parcial, 616
telescópica, 352, D6-D7
soma de Riemann, 354, 413, 533
para integral dupla, 1002
para integral tripla, 1040
polar, 1020
soma de série infinita, 614-617
e convergência, 616
somatório
em polinômios de Taylor e Maclaurin, 652, 654, 655
fórmulas de, 342, D6-D7
índice de, 341
mudança de limites de, 341
notação de (), 340, 341
propriedades de, 342
Sprintz, Joe, 384
Stokes
George Gabriel, 1169
teorema de, *ver* teorema de Stokes
integrais envolvendo $ax^2 + bx + c$, 512
substituição $u$, 332-337, 390-392, 488
roteiro para a, 334
substituição(ões)
em integral definida, 390-392
em tabelas de integrais, 524, 526-528
hiperbólica, 514
trigonométrica, 508-512
$u$, *ver* substituição $u$
subtração de funções, 15, 16
sudário de Turin, 574
supercondutor, 109
superfície constante, 832-833
superfície de nível, 911-912
plano tangente a, 971-972
vetor ou reta normal a uma, 972
superfície de revolução, 444, 835-836
representação paramétrica de, 1046
superfície fechada, 1148
superfície não orientável, 1139
superfície orientada, 1138-1139, 1144-1145
superfície quádrica, 822
esboço de, 824-826
identificação de, 829
reflexão no espaço de, 828
translação de, 827
superfície vertical, força do fluido sobre, 470-471
superfície(s)
área de, *ver* área de superfície
de revolução, *ver* superfície de revolução
integral de, *ver* integral de superfície
orientação relativa de, 1158
orientada, 1138-1139
traço de, 821, 822
superfície(s) paramétrica(a), 1028
área de, 1028, 1034, 1035
de revolução, 1030
orientação de, 1140
plano tangente a uma, 1032-1034
superfícies cilíndricas, 770-771
supremo, 612

## T

Tabela de Integrais das Capas, 523-528
tamanho de passo no método de Euler, 582
tangente, B3
continuidade da, 121
derivada da, 170
fórmulas do ângulo duplo, B9
hiperbólica, 474
identidades trigonométricas, B6-B10
integração de potências do, 503-505
integração de produtos com secantes, 504, 505
taxa de crescimento populacional, 182
taxa de crescimento relativo, 572
taxa de decaimento relativo, 572
taxa de variação instantânea, 67, 138
velocidade escalar instantânea em movimento curvilíneo, 882
taxa de variação média, 138
taxa(s) de variação, 137-139
aplicações, 140
derivadas parciais como, 929-930, 932
e taxas relacionadas, 204-208
em equações diferenciais, 561
instantânea, 138
integração de, 371
média, 138
taxas relacionadas, 204-208
estratégia para resolver, 205
Taylor
Brook, 653
polinômio de, *ver* polinômio de Taylor
série de, *ver* série(s) de Taylor
tempo de duplicação, 572-573
Teorema da Diferença Constante, 306, 307
Teorema da Divergência, 1149-1151
para campos de quadrado inverso, 1155
para encontrar o fluxo, 1151-1153
Teorema da Estimativa do Resto, 655, 656, 669, 671
prova do, D8-D10
Teorema da Fatoração, C4
teorema de existência, 267
Teorema de Gauss (da divergência), 1149-1151
Teorema de Green, 1122-1123
e o Teorema de Stokes, 1162
em regiões multiplamente conexas, 1125-1126
obtenção de área com, 1124-1125
obtenção de trabalho com o, 1124
Teorema de Pappus, 464-465
Teorema de Pitágoras para tetraedro, 840
Teorema de Stokes, 1159-1160
cálculo de trabalho com o, 1160-1162
circulação de fluido, 1163
e o Teorema de Green, 1162
Teorema do Confronto, 123
para sequências, 603
Teorema do Resto, C2-C3
Teorema do Valor Extremo, 267, 274, 978
Teorema do Valor Intermediário, 115
Teorema do Valor Médio, 304-306
consequências do, 306
interpretação de velocidade do, 305
prova do, 304
Teorema do Valor Médio para Integrais, 368, 386
Teorema Fundamental das Integrais de Trabalho, 1112-1113
Teorema Fundamental do Cálculo, 362-364, 369, 370
e integração de taxas de variação, 371
e relação ente integrais definidas e indefinidas, 365, 366
variável muda no, 397, 368
versão vetorial do, 854
teoria da relatividade, 79, 98
termo
de sequência infinita, 596
de série infinita, 615
termo constante de polinômio, C1
termo geral, 597, 623
termo misto, 750, 751
Terra
coordenadas esféricas na, 836
projeção de Mercator, 506
teste da derivada primeira, 246, 247
teste da razão, 634, 635, 645
para a convergência absoluta, 643, 645
prova do, D7-D8
teste da reta horizontal, 42
teste da reta vertical, 4
teste das parciais de segunda ordem para extremos relativos, 980-981

teste de comparação no limite, 633, 634, 645
  prova do, D6-D7
teste(s)
  da comparação no limite, 633, 634, 645, D6-D7
  da comparação, 631-633, 645
  da divergência, 623, 645
  da integral, 626, 628, 645
  da raiz, 635, 645
  da série alternada, 638-641, 645
  de campo de vetores conservativo, 1087, 1115-1118
  de simetria, 23, 708, 710-712
testes de convergência
  da integral, 626, 628
  da raiz, 635
  da razão, *ver* teste da razão
  de comparação no limite, 633, 634
  de comparação, 631, 632
  de séries *p*, 627
  resumo, 645
  séries alternadas, 638-641
toro, 1038
  nó de, 842
torque, 802
  vetor de, 802
torsão, 881
trabalho, 449, 451-455
  calculando com o Teorema de Green, 1124
  calculando com o Teorema de Stokes, 1160-1162
  como integral de linha, 1105-1107
  formulação vetorial do, 791
  realizado por campo de forças, 1105
  realizado por força constante, 449-450
  realizado por força variável, 451
traço de uma superfície, 821-822
tractriz, 484
*Traité de Mécanique Celeste*, 1091
trajetória, 692, 882
transformação, 488, 1065
  do plano, 1059, 1060
transformação injetora, 1059
transformação inversa, 1059
transformada, 556
transição lisa, 880
translação, 20
  de curva paramétrica, A10
  de superfície quádrica, 827-828
triedro **TNB**, 871
trissectriz, 190

## U

Último Teorema de Fermat, 275
unidades em gráficos, 10

## V

valor de $f$ em $x$, 3
valor médio, 385, 396, 1008, 1017
  e velocidade média, 387
valores mínimos absolutos, 977
*Vanguard I*, espaçonave, 763, 902
variável de escala, A2
variável(is)
  dependente e independente, 3
  muda, 367, 368
  mudança de, em integrais duplas, 1063
  mudança de, em integrais simples, 1058
  mudança de, em integrais triplas, 1065, 1067
  separação de, 569
velocidade, 134, 289, 882
  em movimento curvilíneo, 882
  em movimento retilíneo, 146, 377
  encontrando por integração, 376
  escalar, *ver* velocidade escalar
  função, 146, 289
  na curva velocidade *versus* tempo, 377
  terminal, 65, 591
velocidade de escape, 899
velocidade escalar, 134, 289
  em movimento curvilíneo, 882
  instantânea, 289, 882
  terminal, 591
velocidade instantânea, 136
  como um limite de velocidades médias, 136
  definição, 136
  em movimento curvilíneo, 882
  em movimento retilíneo, 136, 146
  interpretação geométrica, 136
velocidade média, 135, 385, 387
  interpretação geométrica da, 136
vértice
  de ângulo, B1
  de elipse, 731
  de hipérbole, 732
  de parábola, 731
vetor binormal, 871
  resumo das fórmulas, 878
vetor de intensidade elétrica, 970
vetor normal unitário para dentro, 870
vetor tangente unitário, 868, 878
  de curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, 870
vetor(es), 773-774
  ângulo diretor de, 787-788
  ângulo entre, 786-787
  aritmética de, 776-777
  com ponto inicial fora da origem, 776-777
  componente de, 789
  componentes de, 775
  de força, 774
  decomposição em componentes ortogonais, 788-789
  deslocamento, 773, 791
  determinado por comprimento e ângulo, 779-780
  determinado por comprimento e um vetor de mesma direção, 780
  em sistemas de coordenadas, 775
  iguais, 774
  magnitude de, 778
  na equação de uma reta, 809
  norma de, 778
  normal, 787, 972
  normal unitário principal, 869, 878, 1033
  normalização de, 779
  ortogonal, 787
  ponto de vista geométrico de, 774-775
  posição, 844
  produto misto de, 805
  projeção ortogonal de, 790-791
  tangente, 851
  unitário, 778-779
  unitário radial, 905
  unitário transversal, 905
  velocidade, 774
  zero, 774
vetores iguais, 774
vetores paralelos, 775
$v_{inst}$, 136
volume
  com funções a três variáveis, 906
  de sólido de revolução, 424-426
  líquido com sinal, 1002
  por camadas cilíndricas, 432-435
  por discos e arruelas, 424-426
  por fatiamento, 421-423
  por integral tripla, 1042, 1044
  sob uma superfície, 1002

## W

Weierstrass, Karl, 101, 102, 527
Wiles, Andrew, 275
Wren, Sir Christopher, 699

## Z

zero, C2
  de função, 4
zero absoluto, 988
zona esférica, 448
*zoom*, A5
  em aproximação de raízes, 117